グラフ理論　#13

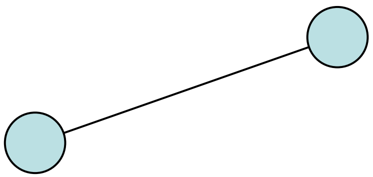
第13回（WEB公開）講義　9月3日

――― マッチング、ネットワーク・フロー ―――

情報科学研究科　井上純一

http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/

演習問題12 (i)の解答例



辺数 m=1 の場合、彩色多項式は陽に計算できて

$$P_G^{(1,n)}(k) \quad = \quad k(k-1) \times k^{n-2} = k^n - k^{n-1}$$

となり、題意成立。

辺数m－1の場合に題意の成立を仮定すると

$$P_{G-e}^{(m-1,n)}(k) \quad = \quad k^n + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i k^{n-i}$$ (辺eの削除により辺数m－1)

$$P_{G/e}^{(m-1,n-1)}(k) \quad = \quad k^{n-1} + \sum_{i=2}^{n} \beta_i k^{n-i}$$ (辺eの縮約により辺数m－1)

関係式:

$$P_G^{(m,n)}(k) \quad = \quad P_{G-e}^{(m-1,n)}(k) - P_{G/e}^{(m-1,n-1)}(k)$$ より

$$\boxed{P_G^{(m,n)}(k) \quad = \quad k^n - (1-\alpha_1)k^{n-1} + (k^{n-2} \text{以下の項})}$$ となりmのとき成立

演習問題12 (ii)の解答例

$$P_G^{(1,n)}(k) = k(k-1)\times k^{n-2} = k^n - k^{n-1}$$ だったので、m=1のとき成立。

辺数m－1の場合に題意の成立を仮定すると、(i)と同様に

$$P_{G-e}^{(m-1,n)}(k) = k^n - (m-1)k^{n-1} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i k^{n-i}$$ （辺eを削除）

$$P_{G/e}^{(m-1,n-1)}(k) = k^{n-1} + \sum_{i=2}^{n} \beta_i k^{n-i}$$ （辺eを縮約）

関係式:

$$P_G^{(m,n)}(k) = P_{G-e}^{(m-1,n)}(k) - P_{G/e}^{(m-1,n-1)}(k)$$ より

$$\begin{aligned} P_G^{(m,n)}(k) &= k^n - (m-1)k^{n-1} - k^{n-1} + (k^{n-2}\text{ 以下の項}) \\ &= k^n - mk^{n-1} + (k^{n-2}\text{ 以下の項}) \end{aligned}$$

となり、辺数mのときも成立。

演習問題12 (iii)の解答例

既に求めているように $P_G^{(1,n)}(k) = k^n - k^{n-1}$ であり、m=1のとき成立。

辺数m－1のときの題意の成立を仮定すると、(i)(ii)の場合と同様に

$$P_{G-e}^{(m-1,n)}(k) = k^n + \sum_{i=1}^{n}(-1)^i \alpha_i k^{n-i}$$ （辺eの削除）

$$P_{G/e}^{(m-1,n-1)}(k) = k^{n-1} - \sum_{i=2}^{n}(-1)^i \beta_i k^{n-i}$$ （辺eの縮約）

$$P_G^{(m,n)}(k) = P_{G-e}^{(m-1,n)}(k) - P_{G/e}^{(m-1,n-1)}(k)$$ より

$$\begin{aligned} P_G^{(m,n)}(k) &= k^n - k^{n-1} + (-1)\alpha_1 k^{n-1} + \sum_{i=2}^{n}(-1)^i(\alpha_i + \beta_i)k^{n-i} \\ &= k^n - mk^{n-1} + \sum_{i=2}^{n}(-1)^i(\alpha_i + \beta_i)k^{n-i} \end{aligned}$$

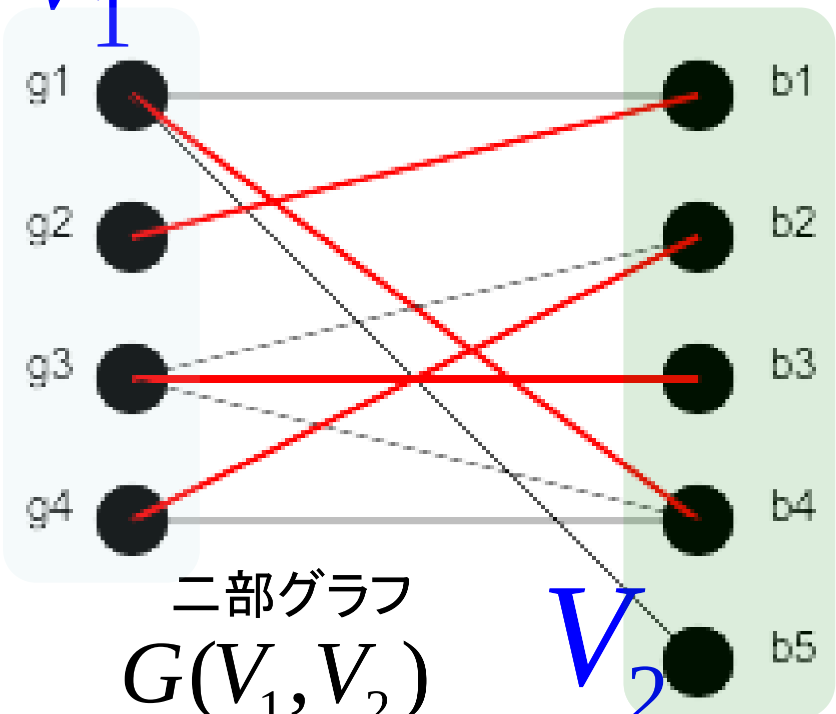
となり、辺数mのときにも成立。

結婚問題

女性の有限集合があり、各女性は何人かの男性と知り合いである。全ての女性が知り合いの男性と結婚できるようにカップルが組めるためにはどのような条件が必要であるか？

結婚問題

V_1



V_2

二部グラフ

$G(V_1, V_2)$

V_1, V_2の部分集合の一対一対応で、かつ、対応する点は辺で結ばれたもの

完全マッチング

$G = G(V_1, V_2)$ が二部グラフのとき、

G において V_1 から V_2 への完全マッチングがあるのはどのようなときか?

結婚問題の完全マッチングを用いた言い換え

Hallの定理とその証明

結婚問題に解があるための必要十分条件は、どのk人の女性も合わせてk人以上の男性と知り合いであることである。

Hallの結婚定理

（証明）

必要性は明らか（k人の女性の誰かと知り合いの男性がk人未満であれば、誰かが余る）

十分性を以下で証明する。

「女性がm人未満であれば成立する」と仮定。（m＝1であれば、
k=1 人の女性は一人の男性と知り合いなので、その男性と結婚すればよい。）
m人の女性がいる場合には以下の2つの場合にわける。

（1） k < m なる、どの k 人の女性をとっても、合わせて k + 1人の男性と知り合いのとき

女性1人を選び、知り合いの任意の男性と結婚させれば、残り(m−1)人の女性は(m−1)人の男性と知り合いであるので、仮定より証明終わり。

（2） k(< m) 人の女性がちょうど k 人の男性と知り合いのとき

帰納法の仮定より、k人の女性は結婚可能。残りは(m−k)人である。(m−k) 人のどのh人(h≦m−k)も残りのh人以上の男性と知り合いである。従って(m−k)人の女性に対して成立。

横断

$E:$空でない有限集合

$F=(S_1,S_2,\ldots,S_m):E$ の空でない部分集合の族

F の横断:各集合 S_i から一つ選んだ E の相違なる m 個の元の集合

（例） $E=\{1,2,3,4,5,6\}$

$S_1=\{1,2\}$

$S_2=\{1,2\}$

$S_3=\{2,3\}$

$S_4=\{2,3\}$

$S_5=\{1,4,5,6\}$

$F=(S_1,S_2,S_3,S_4,S_5)$に横断はない

$F'=(S_1,S_2,S_3,S_5)$には横断$\{1,2,3,4\}$がある

与えられた集合族Fが横断を持つための必要十分条件がHallの定理である

Hallの定理と横断との関係

ラテン方陣

$m \times n$ $(m \le n)$ ラテン方陣：次の性質をもつ $m \times n$ 行列$\mathbf{M}$

(1) 任意の行列要素は $1 \le m_{ij} \le n$ を満たす

(2) どの行、どの列にも同じ要素は無い

ラテン長方形

（例）

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 3 \\ 3 & 5 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

どの行、どの列にも同じ要素が無い

ラテン長方形からは**ラテン方陣（正方形）**へ拡張することができる

ラテン長方形からラテン方陣

M は $m<n$ からなる $m\times n$ ラテン長方形であるとすると
M に $n-m$ 本の新しい行を加えてラテン方陣に拡張できる

（例）

$$\mathbf{M}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&4&1&5&3\\3&5&2&1&4\end{pmatrix}$$

$E=\{1,2,3,4,5\}$をラテン長方形 **M** の要素

$F=(S_1,S_2,S_3,S_4,S_5)$

$S_1=\{4,5\},S_2=\{1,3\},S_3=\{4,5\},S_4=\{2,3\},S_5=\{1,2\}$

第1列に現れない要素

作成の指針　：　Fから横断を見つけて、それを長方形へ加える

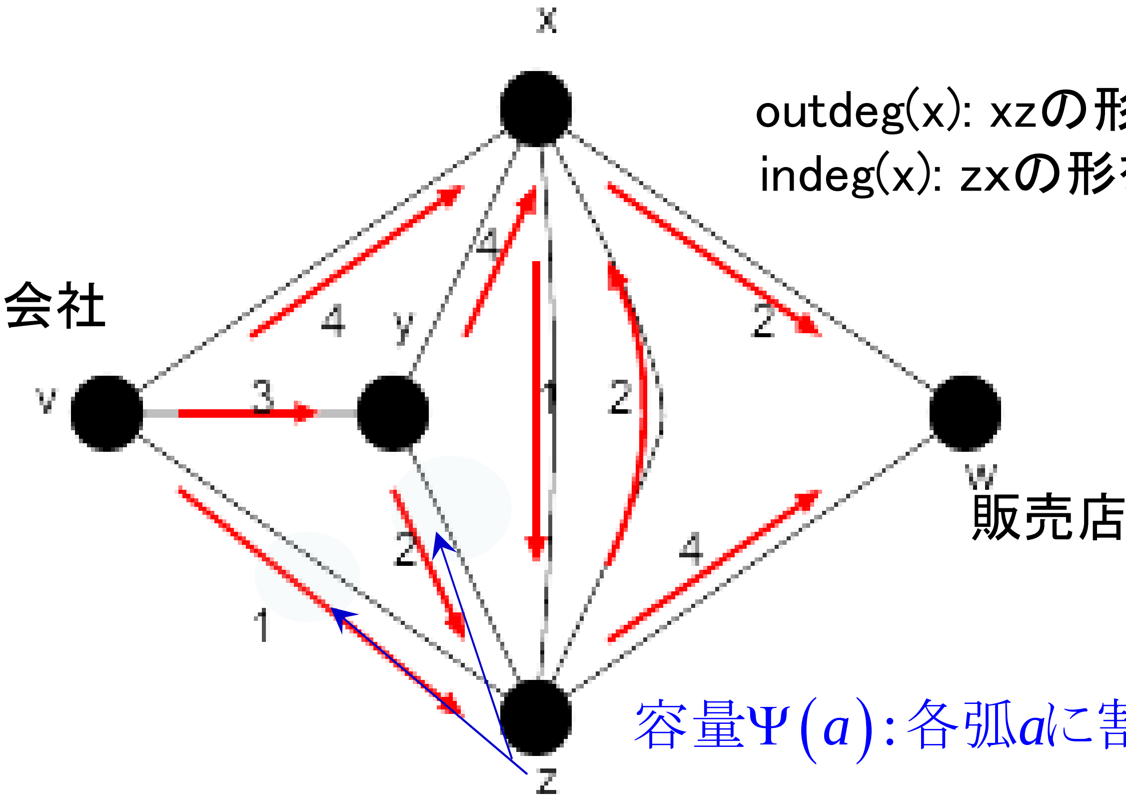
$$\mathbf{M}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&4&1&5&3\\3&5&2&1&4\\4&3&5&2&1\\5&1&4&3&2\end{pmatrix}$$

今の場合は (4,3,5,2,1),(5.1.4.3.2)

ネットワーク・フロー

各ルートの許容量を超えないようにして会社から販売店に送ることのできる箱の個数はいくつか？

ここで考える問題



outdeg(x): xzの形をした弧の容量の総和
indeg(x): zxの形をした弧の容量の総和

容量$\Psi(a)$:各弧aに割り当てられた非負実数

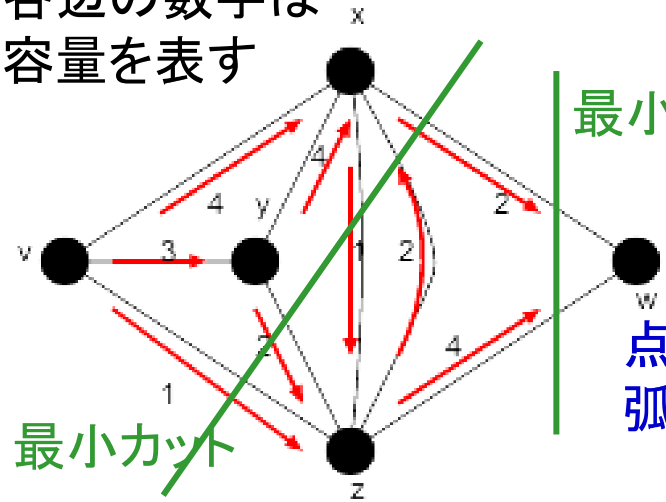
フローとカット

各弧 a に対し、非負実数 $\phi(a)$ を割り当てる関数 ϕ で、次の条件を満たす

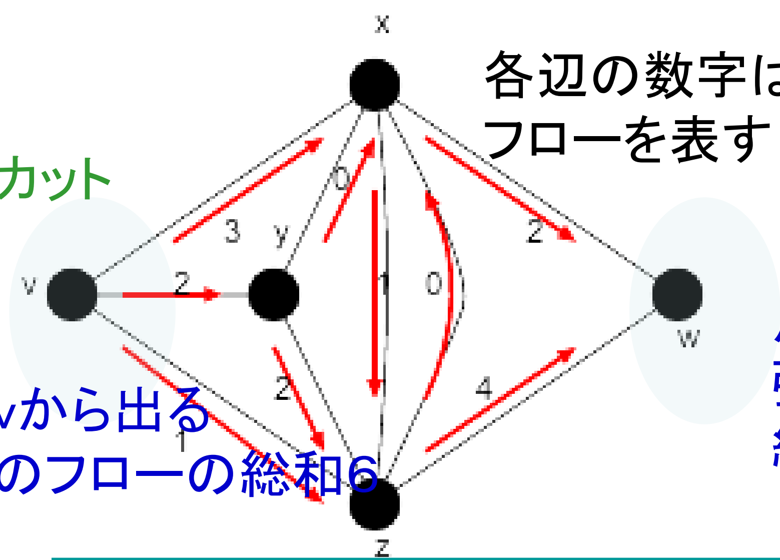
(1) 各弧 a に対し、$\phi(a) \le \Psi(a)$

(2) v と w 以外の各点において、入次数と出次数が等しい　フロー(flow)

各辺の数字は容量を表す



各辺の数字はフローを表す



点wへ入る弧のフローの総和6

有向グラフのvw−非連結化集合

カット(cut)

任意のネットワークにおいて、最大フローの値は最小カットの値に等しい

最大フロー最小カット定理

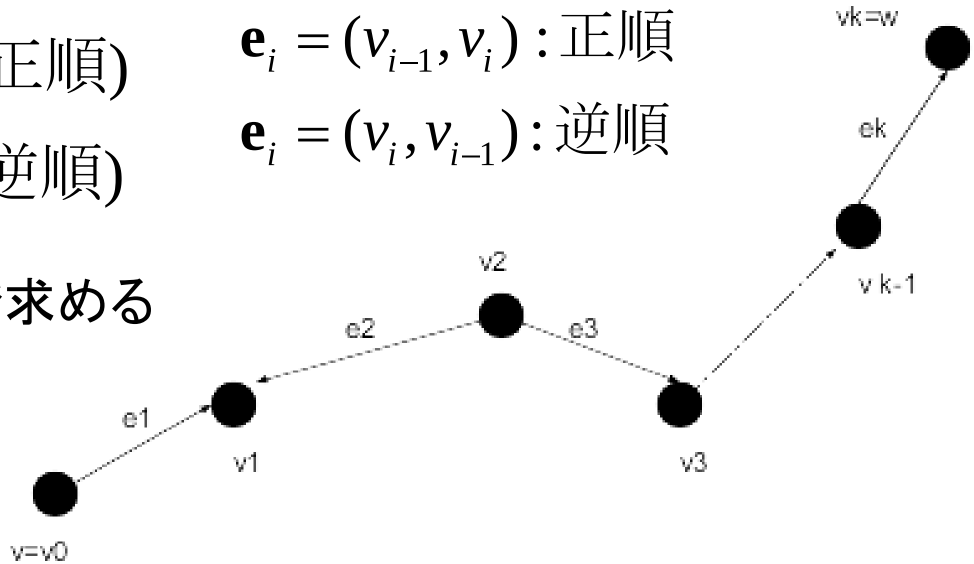
最大フローの逐次構成法

各辺の余裕を次で定義する

$$g(\mathbf{e}_i) = \begin{cases} \Psi(\mathbf{e}_i) - \phi(\mathbf{e}_i) & (\mathbf{e}_i\text{が正順}) \\ \phi(\mathbf{e}_i) & (\mathbf{e}_i\text{が逆順}) \end{cases}$$

$$\mathbf{e}_i = (v_{i-1}, v_i) : \text{正順}$$

$$\mathbf{e}_i = (v_i, v_{i-1}) : \text{逆順}$$



これを用いて各道pの余裕を次で求める

$$g(p) = \min_{1 \le i \le k} g(\mathbf{e}_i)$$

各辺のフローを次の規則で修正する

$$\boxed{\begin{array}{ll} \phi(\mathbf{e}_i) \leftarrow \phi(\mathbf{e}_i) + g(p) & (\mathbf{e}_i\ \text{が正順}) \\ \phi(\mathbf{e}_i) \leftarrow \phi(\mathbf{e}_i) - g(p) & (\mathbf{e}_i\ \text{が逆順}) \end{array}}$$

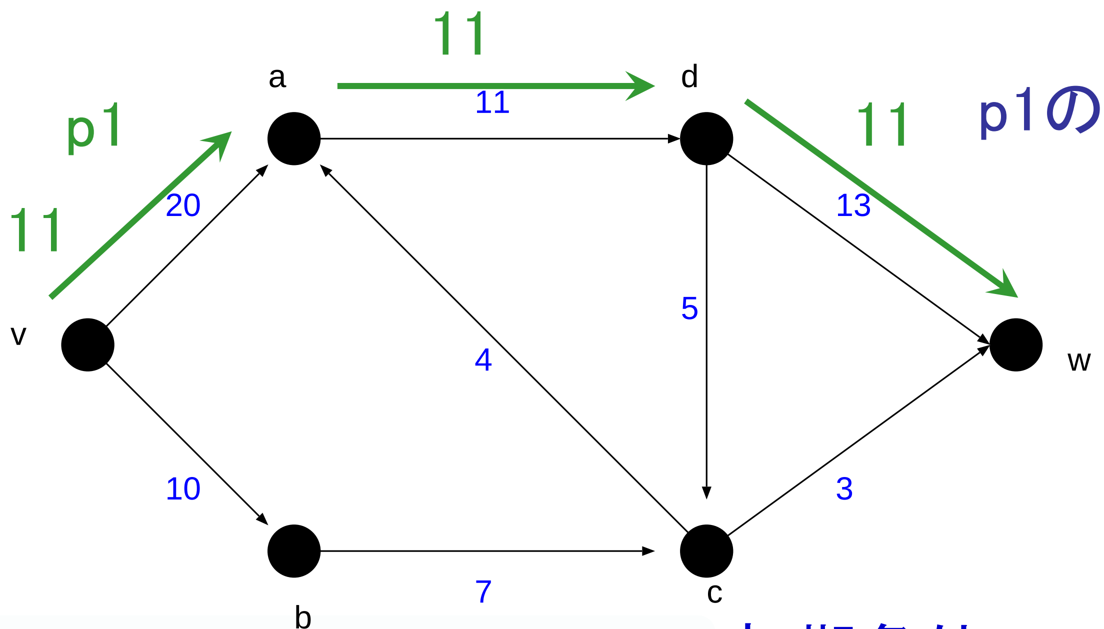
最大フローの逐次構成アルゴリズム

(1) 全ての辺 $\mathbf{e}$ に対して $\phi(\mathbf{e}) = 0$ とおく

(2) v から w への道 p で正の余裕 $g(p)$ を持つものを探し、無ければ終了。あれば(3)へ

(3) 修正規則に従って現在のフロー ϕ を更新し、(2)へ

例題12.1 #1



p1の各辺は同順

$$\phi(v,a)=\phi(a,d)=\phi(d,w)=0$$

初期条件

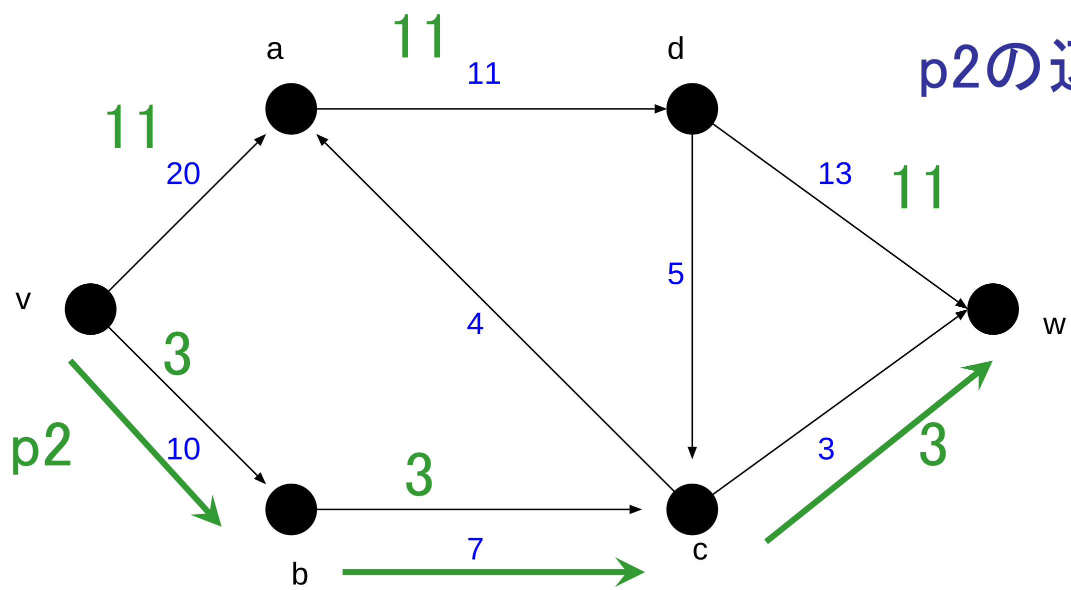
$$g(v,a)=\Psi(v,a)-\phi(v,a)=20-0=20$$
$$g(a,d)=\Psi(a,d)-\phi(a,d)=11-0=11$$
$$g(d,w)=\Psi(d,w)-\phi(d,w)=13-0=13$$

全ての辺は同順

$$g(p_1)=\min_{k=(v,a),(a,d),(d,w)} g(k)=11$$

各辺(p1)のフローはこの時点で11

例題12.1 #2



p2の辺は全て同順

$$\phi(v,b) = \phi(b,c) = \phi(c,w) = 0$$

初期条件

$$g(v,b) = \Psi(v,b) - \phi(v,b) = 10 - 0 = 10$$

$$g(b,c) = \Psi(b,c) - \phi(b,c) = 7 - 0 = 7$$

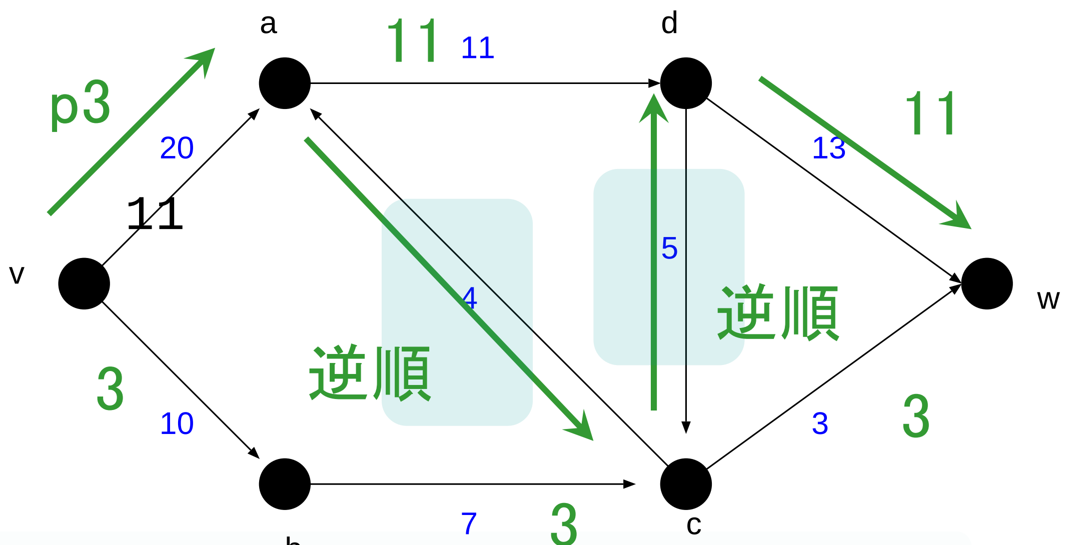
$$g(c,w) = \Psi(c,w) - \phi(c,w) = 3 - 0 = 3$$

全ての辺は同順

$$g(p_2) = \min_{k=(v,b),(b,c),(c,w)} g(k) = 3$$

各辺(p2)のフローはこの時点で3

例題12.1 #3



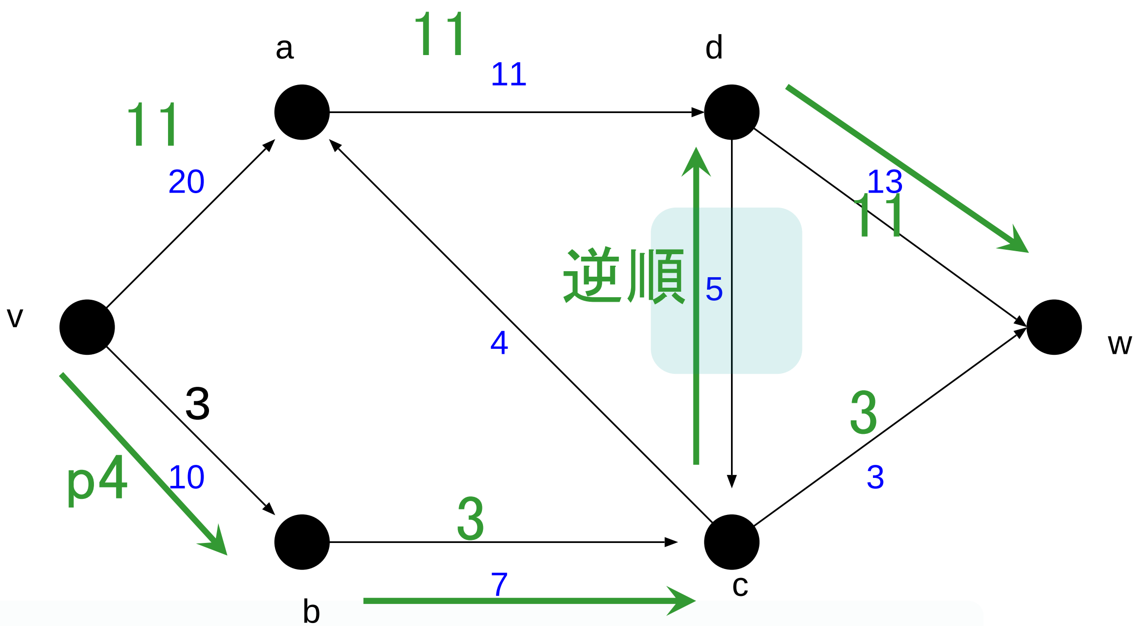
$$\phi(v,a)=11, \phi(a,c)=0, \phi(c,d)=0, \phi(d,w)=11$$

$$g(v,a)=\Psi(v,a)-\phi(v,a)=20-11=9$$
$$g(a,c)=\phi(a,c)=0=0$$
$$g(c,d)=\phi(c,d)=0=0$$
$$g(d,w)=\Psi(d,w)-\phi(d,w)=13-11=2$$

$$g(p_3)=\min_{k=(v,a),(a,c),(c,d),(d,w)} g(k)=0$$

この段階で各辺のフローは変わらず

例題12.1 #4



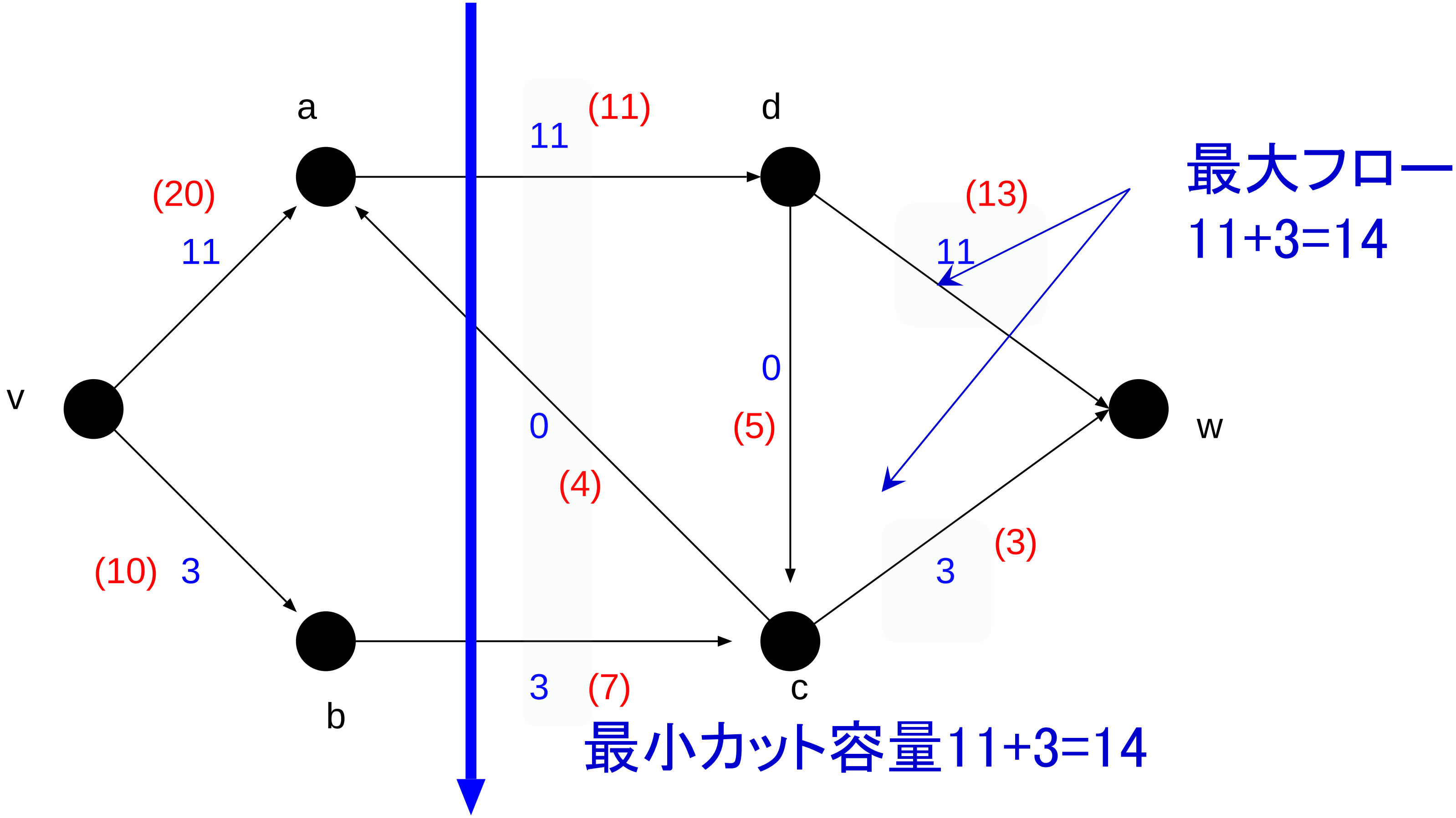
$$\phi(v,b)=3, \phi(b,c)=3, \phi(c,d)=0, \phi(d,w)=11$$

$$g(v,b)=\Psi(v,b)-\phi(v,b)=10-3=7$$
$$g(b,c)=\Psi(b,c)-\phi(b,c)=7-3=4$$
$$g(c,d)=\phi(c,d)=0=0$$
$$g(d,w)=\Psi(d,w)-\phi(d,w)=13-11=2$$

$$g(p_4)=\min_{k=(v,b),(b,c),(c,d),(d,w)} g(k)=0$$

この時点で各辺のフローに変化なし

例題12.1 #5



最大フロー最小カット定理が満たされている