レポート問題 No. 2. ver. 2005. 6.21

締切 8/12 (Fri.) P.M. 5:00

問題 1 i^i を求めよ.

問題 2 定数 e を次のように定義する.

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

このとき次の式を示せ.

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

問題 3 環

$$\mathbb{Z}[\sqrt{-7}] = \{a + \sqrt{-7}b | a, b \in \mathbb{Z}\}$$

で積の形に二通り分解できる例を示せ.

問題 4 環

$$\mathbb{Z}[i] := \{a + bi | a, b \in \mathbb{Z}\}$$

は素元分解の一意性が成り立つ環であることを示せ.

問題 5 p, q を互いに素な整数で $p^2 + 3q^2$ が奇数であるようなものとする. $p \pm \sqrt{-3}q$ が互いに素であることを以下の手順で証明せよ.

(a) $p \pm \sqrt{-3}q$ の公約数を α とする. α は $2p$ および $2q\sqrt{-3}$ を割り切ることを示せ.

(b) α が 2 を割り切るとする. このとき $\alpha\bar{\alpha}$ を計算することによって $p^2 + 3q^2$ が奇数であることに矛盾することを示せ.

(c) (b) から p は α で割り切れる. p, q は互いに素なので, $\sqrt{-3}$ は α で割り切れる. このとき $p^2 + 3q^2$ も 3 で割り切れることを示せ.

(d) (c) から矛盾を導き, $p \pm \sqrt{-3}q$ は互いに素であることを確認せよ.

問題 6 $\omega = (-1 + \sqrt{-3})/2$ とし, $p + \sqrt{-3}q$ を $p^2 + 3q^2$ が奇数であるような整数 p, q からなる数とする. このとき,

$$\omega(p + \sqrt{-3}q)$$

は $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ の元とは**ならない**ことを複素平面を利用して示せ.

問題 7 x, y, z を整数で $x^3 + y^3 = z^3$ をみたすものとする. このとき, 以下の問いに答えよ.

(a) x, y が公約数 d を持ったとき, z も d で割り切れることを示せ.

(b) x, y は互いに素とする. このとき, x, y, z を適当におきかえることによって, x, y は共に奇数として良いことを示せ. [ヒント $y^3 = z^3 + (-x)^3$]

問題 8 円分整数 α が単数であるのは $N\alpha = 1$ であるとき, またそのときに限ることを示せ.

問題 9 $l = 13$ とし, $\zeta = e^{2\pi i/l}$ とする. 円分整数 $\mathbb{Z}[\zeta]$ の元 $2-\zeta$ のノルム $N(2-\zeta)$ を求めよ.

問題 10 ζ を問題 9 と同じものとする. 円分整数

$$\sum_{i=0}^{12} a_i \zeta^i = a_0 + a_1\zeta + \cdots a_{12}\zeta^{12} = 0$$

であれば, a_i はすべて**等しい**ことを示せ.

問題 11 $\alpha(\zeta), \beta(\zeta)$ を円分整数とする. ノルムに関する次の等式を示せ.

$$N\alpha(\zeta)N\beta(\zeta) = N(\alpha(\zeta)\beta(\zeta))$$

問題 12 l を奇素数, $\zeta = e^{2\pi i/l}$ とし, $f(\zeta)$ を円分整数とする. このとき二項展開を用いて, 次の合同式を示せ

$$f(\zeta)^l \equiv f(\zeta^{-1})^l \pmod{l}$$

問題 13 l, ζ は問題 12 と同じものとする. $\eta(\zeta)$ を単数で共役な元すべてが絶対値 1 を持つとき, η は 1 の l 乗根, すなわち $\eta = \zeta^r$ であることを示せ.

問題 14 $\zeta = \exp(2\pi i/5)$ とおく. 61 を円分整数 $\mathbb{Z}[\zeta]$ で因数分解せよ.

問題 15 $x^n + y^n = z^n$ が $n \geq 3$ のとき自明な整数解以外の解を持たないことを示すには $n = 4$ および n が奇素数の場合に自明な整数解以外の整数解を持たないことを示せば十分であることを証明せよ.

問題 16 $3^{2^n} - 1$ は 2^n で割り切れることを証明せよ.

問題 17 多項式 $f(x)$ に対し $n(f(x))$ で $f(x)$ の既約因子を一つずつ掛けあわせた多項式とする. このとき, 次の Mason の定理が成立する.

> $a(x), b(x)$ を互いに素な複素係数の多項式とし, $c(x) = a(x) + b(x)$ とする. このとき
>
> $$\max\{\deg a(x), \deg b(x), \deg c(x)\} \leq \deg n(a(x)b(x)c(x)) - 1$$

この定理を用いて, 互いに素な定数でない複素係数の多項式 $a(x), b(x), c(x)$ で

$$a(x)^p + b(x)^p = c(x)^p$$

をみたすものは $p \geq 3$ であれば存在しないことを示せ.

問題 18 この講義の感想を書け.

おしまい