

科学・技術の世界 – Fermat の大定理を巡って –

第一回 平成17年4月12日(火)

†:このマークが付してある著作物は、第三者が有する著作物ですので、同著作物の再使用、同著作物の二次的著作物の創作等については、著作権者より直接使用許諾を得る必要があります。

欄外への書き込み

1630 年頃, フランスの法律家 Pierre De Fermat (1601 – 1665) は Diophantos の本の欄外に以下のような書き込みを残した.

他方, 立方を二つの立方に, あるいは二重平方を二つの二重平方に, そして一般に, 平方を越える不定の冪を同一の名の二つのものに分つことはできない. そのことの驚くべき証明を私は見つけたが, これを記すには余白が小さすぎる.



足立恒雄 (1994, 2006), フェルマーの大定理—整数論の源流, 日本評論社/ちくま学芸文庫, より引用

前項の内容を数式を使って表すと次のようになる.
定理 1 自然数 $n \geq 3$ に対して, 方程式

$$x^n + y^n = z^n$$

を満す自然数 x, y, z は存在しない.

Fermat の大定理の歴史

- 1630 頃, Fermat による「人騒がせな(?)」書き込み.
- 1738 Euler による $n = 4$ の場合の証明.
- 1753 Euler による $n = 3$ の場合の証明.
- 1823 Germain による結果.
- 1825 Legendre, Diriclet による $n = 5$ の場合の証明.
- 1839 Lamé による $n = 7$ の場合の証明.
- 1847 Kummer による結果.
- 1995 Weils による最終的な解決.

この講義の目標

- 古代の数論から, Fermat がこの定理を証明する (?) までの数学の発展を学ぶ.
- 失なわれた (?) 証明を求めて, 18, 19 世紀の数学者が行った思考錯誤を学ぶ.
- 上記を通じて, 数学においては答を出すことだけが大切なのではなく, 問題を提起すること, およびそれを解決する過程も重要であることを学習する.

注意 1 1995 年の Wiles の証明についてはこの講義では扱わない.

参考文献

- 足立恒雄, フェルマーの大定理, 日本評論社.
- ヴェイユ, 数論 – 歴史からのアプローチ, (足立恒雄, 三宅克也訳) 日本評論社
- 高木貞治, 近世数学史談, 岩波書店.
- 田口雄一郎, Fermat の最終定理,
<http://www.math.kyushu-u.ac.jp/taguchi/nihongo/bunsho.html>
- 加藤和也, 解決！フェルマーの最終定理, 日本評論社.

成績評価

- レポート二回, 一回目の締切は 6/10 (金), 二回目は 8/12 (金) の予定.
- 授業内に小テストを数回行う.
- 上記二つの評価を考慮して評価する.

Pythagoras 数

定義 1 方程式

$$x^2 + y^2 = z^2$$

を満たす自然数の組 (x, y, z) を *Pythagoras 数* という.

Pythagoras 数は古バビロニア期 (B.C. 1900 – 1600 頃) にはすでに知られていた. その頃すでに

$$(12709, 13500, 18541)$$

という巨大な組が計算されている.

問題 1 どうやって上のような巨大な組を見つけたのか?

Pythagoras 数の計算 – その 1 –

Pythagoras 数 (x, y, z) で x, y が互いに素であるようなものを全て求めてみよう.

x, y をともに奇数とする. このとき

$x = 2m - 1, y = 2n - 1$, (n, m は自然数) とかける.
これを式の左辺に代入すると,

$$x^2 + y^2 = 4(m^2 - m + n^2 - n) + 2$$

となる.

一方右辺を考えると,

• z が奇数とすると $\Rightarrow$ 4 で割って 1 余る

• z が偶数とすると $\Rightarrow$ 4 で割り切れる

となり矛盾である.

Pythagoras 数の計算 – その 2 –

前項より x 奇数, y 偶数と仮定してよい. このとき z は $\boxed{\text{奇数}}$ である.

さて

$$y^2 = (z + x)(z - x)$$

であるが, x, z は $\boxed{\text{奇数}}$ なので整数 U, V を用いて

$$z + x = 2U, z - x = 2V$$

とかける. このとき U, V は $\boxed{\text{互いに素}}$ である.

Pythagoras 数の計算 – その 3 –

y は偶数と仮定したので $y = 2Y$, Y は整数, とおく
ことができ, これを代入すると

$$Y^2 = UV$$

を得る.

U, V は 互いに素 であり, Y^2 は当然平方数なので, U, V はともに平方数. よって整数 p, q を用いて

$$U = p^2, V = q^2$$

とかける.

Pythagoras 数の計算 – その 4 –

$z + x = 2U, z - x = 2V$ と置いたことを思いだすと, x, y, z は p, q を用いて

$$\begin{cases} x = p^2 - q^2 \\ y = \boxed{2pq} \\ z = \boxed{p^2 + q^2} \end{cases}$$

とかける.

Eucrid の原論より

先に示したものはバビロニアで知られていたものを現代の記号を使って書いたものである. 実際の古代の記述はどのようなものであったかを Eucrid の原論を例に取って見てみよう.

定義 2 二つの数をかけあわせたものを平面数と呼ぶ. また, 二つの平面数が相似であるとは, それぞれの掛けあわせる数が比例しているときをいう.

- $15 = 3 \times 5 \leftarrow$ 平面数.
- 15, 60 は相似な平面数.
- 12, 48 は相似な平面数.

定理 2 和も平方数である二つの平方数を見いだすこと.

二つの数 AB および BC が定められ, 共に偶数または奇数であるとせよ. そうすれば偶数から偶数がひかれても, 奇数から奇数がひかれても, 残りは偶数であるから, 残りの AC は偶数である. AC が D において二等分されたとせよ. そして AB, BC が相似な平面数か平方数であるとせよ. すると AB, BC の積は平方数であり, これと CD の平方数の和は BD の平方数に等しい.

解説

- AB, BC を相似な平面数に取る $\Rightarrow$
 $AB = mn, AC = mnp^2$ とおく.
- すると AB と AC の積は $(mnp)^2$ と平方数となる.
- AB, BC の偶奇をそろえておけば
 $AB - BC = AC$ は偶数となり, 2 で割れる.
- $(mnp)^2$ と $AC = (mnp^2 - mn)/2$ の二乗したものの和は平方数 $((mnp^2 + mn)/2)^2$ となる.

今週の問題

問題 2 すべての *Pythagoras* 数は二つの自然数 (p, q) を用いて

$$(p^2 - q^2, 2pq, p^2 + q^2)$$

と表せる. $(12709, 13500, 18541)$ を与える (p, q) を求めよ.