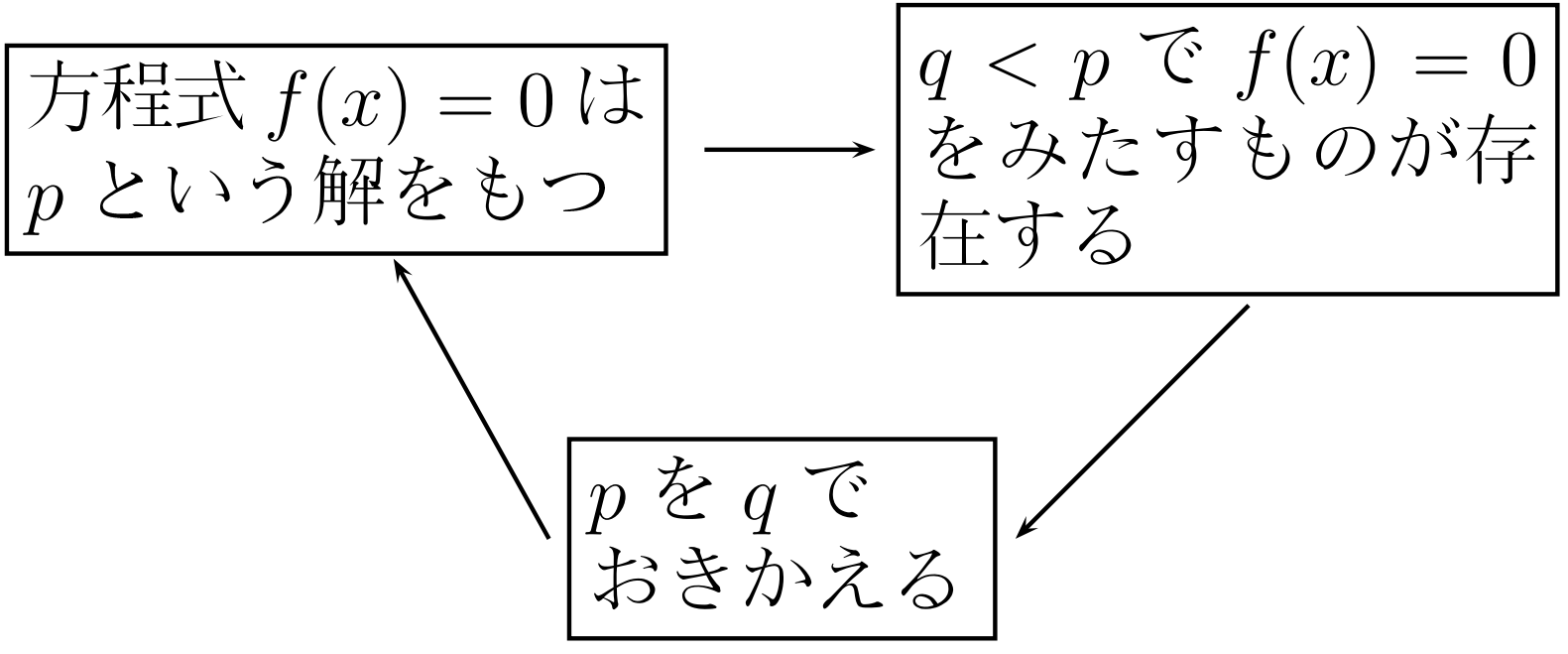
科学・技術の世界
– Fermat の大定理を巡って –

第六回 平成１７年５月２４日 (火)

:このマークが付してある著作物は、第三者が有する著作物ですので、同著作物の再使用、同著作物の二次的著作物の創作等については、著作権者より直接使用許諾を得る必要があります。

無限降下法

無限降下法の議論を本日使う形で見なおしておく.



上のサイクルを一回りするごとに絶対値が小さい解が得られることになる.

第 45 の書き込み

第 45 の書き込みは以下のようなものである.

> 数でできた直角三角形の面積は平方数ではありえない.
>
> 私が見つけたこの定理の証明を与えよう; それを私はつらくて困難な思索なくして発見したわけではない; この種の証明は数の科学にすばらしい進歩をもたらすであろう.

上記に見られる通り, この書き込みでは主張とともに証明が書かれているが, これは Fermat が証明 (大筋であっても) を残した唯一のものである.

第 45 の書き込み

まず Fermat の残した証明を読んでみよう. 翻訳は足立「フェルマーの大定理」から引用した.

もしも直角三角形の面積が平方数ならば, その差が平方数であるのような二つの 4 乗数が存在することになる; その結果, 和も差も平方数である二つの平方数が存在することになる. したがって, ある平方数ともう一つの平方数の 2 倍の和となる平方数があって, それを構成する二つの平方数の和が再び平方数となる.

足立恒雄 (1994, 2006), フェルマーの大定理—整数論の源流, 日本評論社／ちくま学芸文庫, より引用

第 45 の書き込み

しかしながら, 一つの平方数が平方数と平方数の 2 倍の和であるならば, その根も平方数と平方数の 2 倍の和であり, そのことは容易に証明できる. そこから, この根は直角三角形の直角をはさむ二辺の和で, 構成する, 一方の平方数は底辺, 他方の平方数の 2 倍は高さである.
この直角三角形はかくして二つの平方数から成り立ち, その平方数の和も差も平方数となる. しかこれらの平方数はともに初めに和も差も平方数であると仮定した二つの平方数より小さい. かくして, 和・差が平方数である二つの平方数を与えるならば, 同様の性質をもつ二つの平方数であって, 和がより小さなものを与えられることになる.

足立恒雄 (1994, 2006), フェルマーの大定理—整数論の源流, 日本評論社／ちくま学芸文庫, より引用

注意事項

- 自然数 p, q が互いに素で $pq = r^2$ となるとき, p および q は平方数.
- 自然数 p, q が互いに素であれば p と $p \pm q$ は互いに素. また $p + q, p - q$ は p, q が互いに奇数であるときのみ, 最大公約数 2 を持つ.
- Fermat の証明では計十三の文字 $p, q, p_1, q_1, \alpha, \beta, \gamma, \alpha_1, \beta_1, e, s, \eta, \xi$ が出てくる. それらの関係を見失いがちなのでメモを取ることを勧める.
- この証明は長く, 複雑であるので, はじめは全体のつながりを追うことよりも, 各段落で何をやっているかにのみ注意して聞くとよい.

第 45 の書き込み

以下, Fermat の証明を文字を使って解読してみよう. 仮定として, 直角三角形があり, 以下をみたすとする.

- 三辺の長さが自然数 x, y, z で互いに素.
- 面積が平方数.

> ... もしも直角三角形の面積が平方数ならば, その差が平方数であるのような二つの 4 乗数が存在することになる...

x, y, z は Pythagoras 数なので, 互いに素な自然数 p, q を用いて $x = p^2 - q^2, y = 2pq$ と書ける.

第 45 の書き込み

仮定から

$$\frac{1}{2}xy = (p^2 - q^2)pq$$

は平方数となる. p, q は互いに素なので, $p^2 - q^2, p, q$ は全て互いに素. よって, 自然数 γ, α, β を用いて

$$p^2 - q^2 = \gamma^2, \quad p = \alpha^2, \quad q = \beta^2$$

とかける. ここで γ, α, β は互いに素であることに注意する. p, q を α, β でおきかえると

$$\alpha^4 - \beta^4 = \gamma^2$$

を得る.

第 45 の書き込み

... その結果, 和も差も平方数である二つの平方数が存在することになる...

$$\gamma^2 = \alpha^4 - \beta^4 = (\alpha^2 + \beta^2)(\alpha^2 - \beta^2)$$

となり, α と β は互いに素なので, α^2 と β^2 は和も差も平方数である平方数. ここで

$$\alpha^2 - \beta^2 = \xi^2, \quad \alpha^2 + \beta^2 = \eta^2$$

とする.

第 45 の書き込み

> ... したがって, ある平方数ともう一つの平方数の 2 倍の和となる平方数があって, それを構成する二つの平方数の和が再び平方数となる...

前項の式から

$$\eta^2 = 2\beta^2 + \xi^2, \quad \alpha^2 = \beta^2 + \xi^2$$

を得る.

第 45 の書き込み

> ... しかしながら, 一つの平方数が平方数と平方数の 2 倍の和であるならば, その根も平方数と平方数の 2 倍の和であり, そのことは容易に証明できる...

$\eta^2 = 2\beta^2 + \xi^2$ と表せるのであれば, ある数 r, s を用いて $\eta = r^2 + 2s^2$ とかけることを示せばよい. 式 $\eta^2 = 2\beta^2 + \xi^2$ を変形した

$$(\eta - \xi)(\eta + \xi) = 2\beta^2$$

を考える. η と ξ は互いに素であり, また両者共奇数であるので,

第 45 の書き込み

互いに素な数 e, f を用いて,

$$\eta - \xi = 2e, \quad \eta + \xi = 2f$$

と書ける. すると $2ef = \beta^2$ となり, e, f のいずれかは奇数であるから e を奇数とすると,

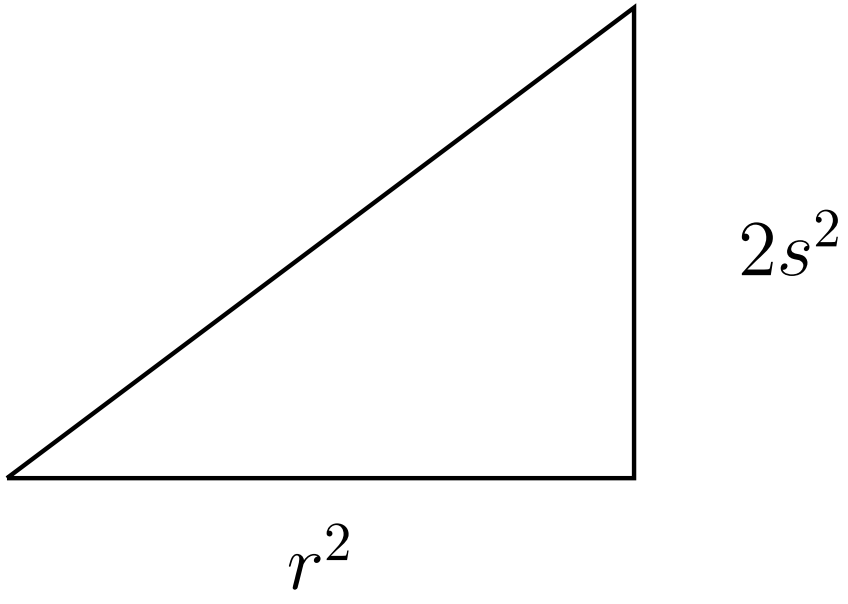
$$e = r^2, \quad f = 2s^2$$

とかける. よって $\eta = r^2 + 2s^2$ を得る.

第 45 の書き込み

> ... そこから, この根は直角三角形の直角をはさむ二辺の和で, 構成する, 一方の平方数は底辺, 他方の平方数の 2 倍は高さである...

次のような直角三角形を考える.



この三角形の斜辺が自然数であることを示す.

第 45 の書き込み

ここまでに出てきた文字の関係をおさらいする.

$$\begin{aligned} \eta - \xi &= 2e = 2r^2 \\ \eta + \xi &= 2f = 4s^2 \\ \alpha^2 + \beta^2 &= \xi^2 \\ \alpha^2 - \beta^2 &= \eta^2 \end{aligned}$$

これから

$$(r^2)^2 + (2s^2)^2 = \alpha^2$$

となる.

第 45 の書き込み

> ... この直角三角形はかくして二つの平方数から成り立ち, その平方数の和も差も平方数となる...

これまでの考察で各辺が自然数 $(r^2, 2s^2, \alpha)$ である直角三角形が得られた. これらは Pythagoras 数をなすので, ある互いに素な自然数 p_1, q_1 を用いて

$$r^2 = p_1^2 - q_1^2, \quad 2s^2 = 2pq$$

とかける. よって

$$r^2 s^2 = (p_1^2 - q_1^2) p_1 q_1$$

となる.

第 45 の書き込み

ここで p_1, q_1 は互いに素であるので

$$p_1 = \alpha_1^2, q_1 = \beta^2$$

とかけ, これから

$$p_1^2 - q_1^2 = \alpha_1^4 - \beta_1^4 = r^2$$

を得る. α_1, β_1 も互いに素であるので, 上の式を因数分解して和, 差が平方数であるような平方数を得る.

第 45 の書き込み

> ... しかしこれらの平方数はともに初めに和も差も平方数であると仮定した二つの平方数より小さい...

これまでの式で必要なものをまとめると,

$$r^2 = \alpha_1^4 - \beta_1^4, \quad 2s^2 = 2\alpha_1^2\beta_1^2$$
$$4r^2s^2 = \beta^2, \quad r^4 + 4s^4 = \alpha^2$$

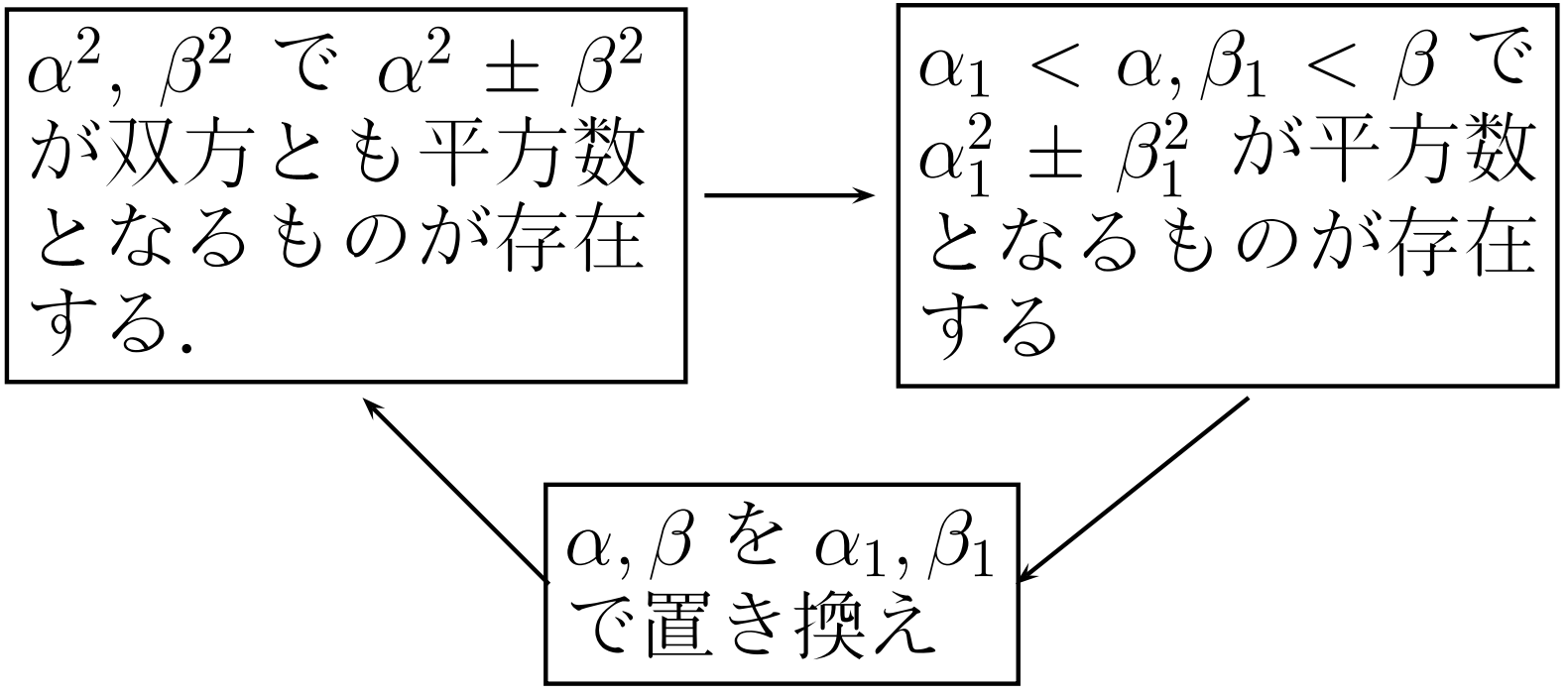
以上の式から α, α_1 および β, β_1 を比較すると,

$$\alpha > \alpha_1, \quad \beta > \beta_1$$

を得る.

第 45 の書き込み

これまでの議論をまとめると, 以下のようになる.



上のサイクルを一回りするごとに二つの数は絶対値が小さくなるが, 小さい自然数で上記を満すものは存在しないので, 矛盾を生じる.

第 45 の書き込み

系 **1** 自然数 x, y, z で 方程式 $x^4 + y^4 = z^4$ をみたすものは存在しない.

証明. 必要があれば公約数で割り, 互いに素な x, y, z で方程式を満すものが存在すると仮定する. 方程式を変形して,

$$z^4 - y^4 = (z^2 - y^2)(z^2 + y^2) = (x^2)^2$$

とすると, y, z は互いに素なので, $z^2 \pm y^2$ は双方とも平方数. 従って以前の議論からより小さい自然数 x_1, z_1 で $x_1^2 \pm z_1^2$ が双方とも平方数となるものが見い出せる. これを続けると先程と同じように矛盾が生じる.

その他の書き込み

時間の都合で扱えなかったその他の書き込みの内，次のものはとても興味深い．足立「フェルマーの大定理」から引用すると，

> ... その上，私がその最初の発見者であるところの大変美しい，そしてまったく一般的な命題がある：すべての数は三角数であるか，2 個または 3 個の三角数の和である；四角数であるか，2，3，4 個の四角数の和である...

となる．

足立恒雄 (1994, 2006)，フェルマーの大定理—整数論の源流，日本評論社／ちくま学芸文庫，より引用

その他の書き込み

前項の赤字の部分を記号で書くと,

すべての自然数は n は

$$n = x^2 + y^2 + z^2 + w^2$$

と 4 個の平方数の和でかける

となる. 証明は

アンドレ・ヴェイユ「数論」pp227–229

を見よ.

二つの挑戦状

1630 年頃からはじまったヨーロッパの数学者との交流で, Fermat の数論に関する結果はほとんど興味を持たれなかった. 1654 年頃に確率論をめぐって Pascal と文通したとき, この人であれば, と共同研究を持ちかけた. しかし, Pascal からの返答はつれないものであった. 以下に足立「フェルマーの大定理」から引用する.

... 私はあなたをヨーロッパ第一の幾何学者と信じておりますが, 私があなたにひきつけられておりますのはそんなことのためではありません. そうではなくて, あなたのお話の中には才智誠実が充ち溢れているように思い, そのためにあなたにご交際をお願いしているのです.

足立恒雄 (1994, 2006), フェルマーの大定理—整数論の源流, 日本評論社／ちくま学芸文庫, より引用

二つの挑戦状

といいますのは, 幾何学について腹蔵なく申せば, 私はこれを精神の最高の訓練とは考えていますが, また同時に, それが本当に無益なものだということをよく承知しておりますので, 単なる幾何学者にすぎない人と器用な職人との間に, 殆ど差異を認めないのです. それ故私は, 幾何学をこの世で最もすぐれた職業とは呼びますが, 結局それは職業にすぎないのです. またしばしば申上げましたように, それはわれわれの力を試すのには適していますが, 自分の力を系統するに足るものではないのです. だから私は, 幾何学のためになら一足だって動きはしないだろうと思います...

† 足立恒雄 (1994, 2006), フェルマーの大定理—整数論の源流, 日本評論社／ちくま学芸文庫, より引用

二つの挑戦状

Fermat は Pascal だけでなく全世界に向かって数論に興味を引くために, 1657 年に二つの挑戦状を送ることになる. この挑戦状には計 4 題の問題があげられていたが, そのうちの 4 番目の問題を現代の記号で書くと次のようになる.

問題 **1** A を平方数でない自然数とする. 方程式

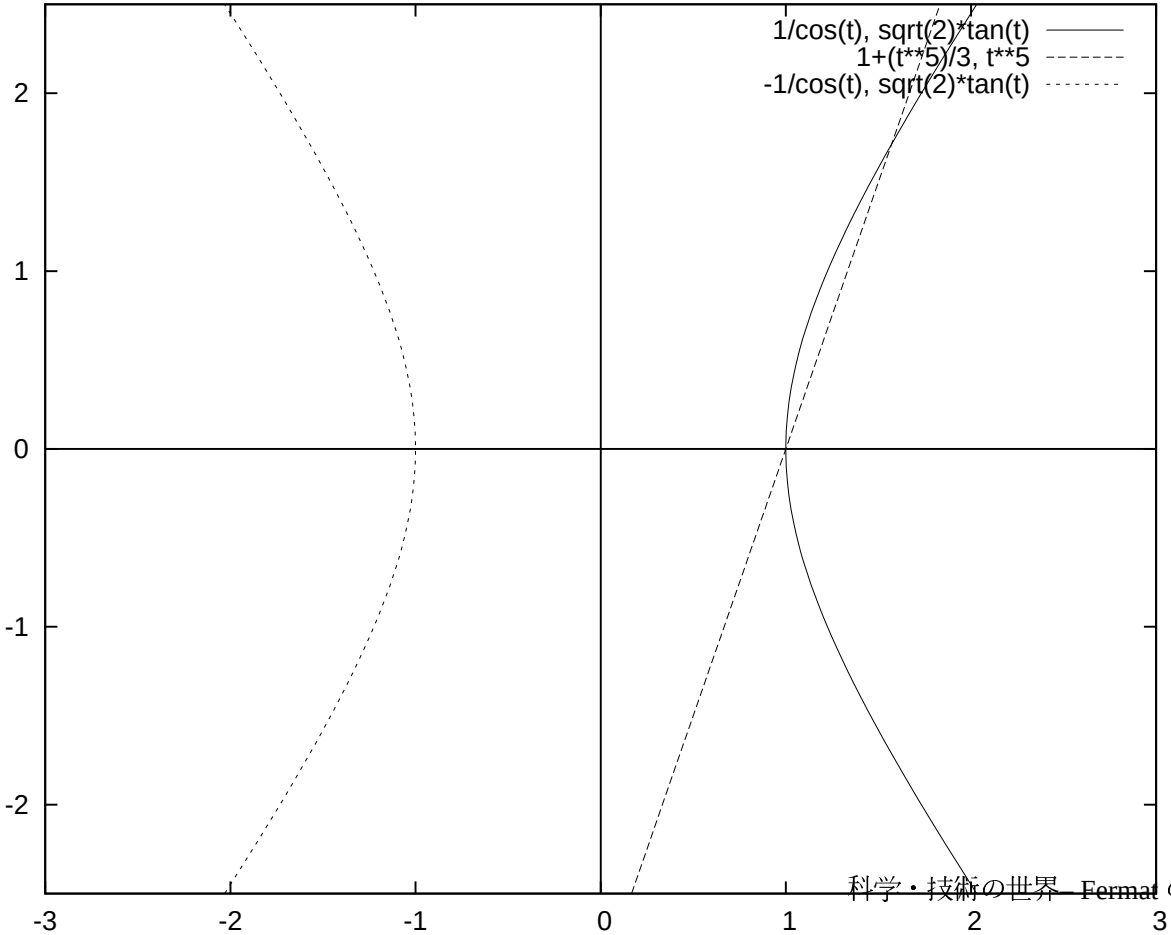
$$x^2 - Ay^2 = 1$$

の自然数解をすべて求めよ.

この方程式は Pell 方程式と呼ばれている.

Pell 方程式

今回は Pell 方程式の有理数解をすべて求めてみよう. まず Pell 方程式には $x = \pm 1, y = 0$ という自明な解が存在するこ
とに注意する. 次に $x^2 - Ay^2 = 1$ のグラフを考える.



Pell 方程式

さて, $x^2 - Ay^2 = 1$ に有理数解があったとすると, その解が表す点と点 (1,0) を結ぶ線の傾きは有理数となる.

一方, 直線 $x = 1 + ay$, (a は有理数) と $x^2 - Ay^2 = 1$ との交点の y 座標は方程式

$$(1 + ay)^2 - Ay^2 = 1 \Leftrightarrow (a^2 - A)y^2 + 2ay = 0$$

の解 $0, -2a/(a^2 - A)$ であり, 特に有理数である.
よって $x^2 - Ay^2 = 1$ のすべての有理数解は

$$x = \frac{A + a^2}{A - a^2}, \quad y = \frac{2a}{A - a^2}$$