情報理論 配布資料 #12

担当：井上 純一 (情報科学研究科棟 8-13)
URL：http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/

平成 17 年 7 月 11 日

目 次

演習問題 11 の解答例

配布資料 #11 に示した方法にならって計算を進めればよい．ラグランジュの未定係数を λ, β とすると，最大化すべきなのは次の汎関数である．

$$
\begin{aligned}
F(P_X(x), \lambda, \beta) &= -\int_0^\infty dx P_X(x) \log P_X(x) + \lambda \left(\int_0^\infty dx P_X(x) - 1 \right) \\
&+ \beta \left(\int_0^\infty dx x P_X(x) - m \right)
\end{aligned} \tag{395}
$$

極値条件を書き下すと

$$
\frac{\delta F}{\delta P_X(x)} = -\int_0^\infty \{\log P_X(x) + 1 + \lambda + \beta x\} = 0 \tag{396}
$$

$$
\frac{\partial F}{\partial \lambda} = \int_0^\infty dx P_X(x) - 1 = 0 \tag{397}
$$

$$
\frac{\partial F}{\partial \beta} = \int_0^\infty dx x P_X(x) - m = 0 \tag{398}
$$

が得られるが，(396) 式が任意の x に対して成り立つためには，被積分関数がゼロであるべきであり，これから直ちに

$$
P_X(x) = \mathrm{e}^{-1-\lambda-\beta x} \tag{399}
$$

と $P_X(x)$ の関数形が確定する．後は未定係数 λ, β を決めてやればよい．この (399) 式を (397) に代入することにより，$\mathrm{e}^{-1-\lambda} = \int_0^\infty dx \mathrm{e}^{-\beta x}$ が得られるので，$P_X(x)$ は β のみを未定係数として

$$
P_X(x) = \frac{\mathrm{e}^{-\beta x}}{\int_0^\infty dx \mathrm{e}^{-\beta x}} \tag{400}
$$

のように書けることになる. 後はこの式を (398) 式に代入してやれば β が確定する. すなわち

$$\frac{\int_0^\infty dx x \mathrm{e}^{-\beta x}}{\int_0^\infty dx \mathrm{e}^{-\beta x}} = m \tag{401}$$

を β について解けばよいのであるが, この式の左辺は

$$\frac{\int_0^\infty dx x \mathrm{e}^{-\beta x}}{\int_0^\infty dx \mathrm{e}^{-\beta x}} = -\frac{\partial}{\partial \beta} \log \int_0^\infty dx \mathrm{e}^{-\beta x} \tag{402}$$

と書き直すことができることに気がつけば

$$\int_0^\infty dx \mathrm{e}^{-\beta x} = \left[-\frac{1}{\beta} \mathrm{e}^{-\beta x} \right]_0^\infty = \frac{1}{\beta} \tag{403}$$

であるから, $-(\partial/\partial\beta)\log(\beta)^{-1} = 1/\beta = m$, すなわち, $\beta = 1/m$ と β が定まる. 従って, 求める分布は

$$P_X(x) = \frac{1}{m} \mathrm{e}^{-\frac{x}{m}} \tag{404}$$

である.

10 連続信号の解析：標本化定理について

ここからは連続信号の取り扱いとして重要な**標本化定理**について見ていく.

一般的に言って連続的な時間信号 $u(t)$ は, ある時間間隔の信号値が失われると再生できないが, **信号の周波数成分がある有限範囲内に限られる場合には時間軸上にある密度 (間隔) でとった点における信号値のみで全ての時間の信号値が決定できる.** これが「標本化定理」と呼ばれる定理としてまとめられている.

10.1 連続信号が周期関数の場合

まずは話として幾分簡単である, 連続的信号 $u(t)$ が周期的な関数の場合を扱う. より実用性が高く重要な $u(t)$ が非周期関数の場合に関しては後にに述べることにしょう.

10.1.1 準備：フーリエ級数展開

$u(t)$ を冪関数で展開する方法として 1 年次の「物理学 I」等の講義でテーラー展開：

$$u(t) = u(0) + \left.\frac{du}{dt}\right|_{t=0} t + \frac{1}{2!} \left.\frac{d^2u}{dt^2}\right|_{t=0} t^2 + \cdots \tag{405}$$

を学び, 実際に様々な場面で用いたことと思うが, 関数 $u(t)$ が周期 T の周期関数の場合には, $u(t)$ を次のように調和関数 (三角関数) で展開 (分解) することができる.

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \mathrm{e}^{\frac{2\pi i n}{T} t} \tag{406}$$

$$A_n \equiv \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u(t) \mathrm{e}^{-\frac{2\pi i n}{T} t} dt \tag{407}$$

ここで, $2\pi/T \equiv \omega$ は**角周波数**, $1/T \equiv f$ を**周波数**と呼ぶ. A_n は**フーリエ係数**と呼ばれる係数であり, フーリエ級数に展開するとはつまるところ, (406) 式で定義される $u(t)$ の「重み $\mathrm{e}^{-2\pi int/T}$ 付き積分」を実行し, A_n を n の関数として求めることである (テーラー展開が $u(t)$ の微分係数を求めることであったように)[1] .

さて, 実際に (407) が展開 (406) の展開係数になっているかどうかを確かめておこう. (406) 式の両辺に $\mathrm{e}^{-2\pi imt/T}$ をかけて, t に関して $-T/2$ から $T/2$ まで積分し, T で割ってみると, $n=m$ ならば

$$\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u(t)\,\mathrm{e}^{-\frac{2\pi im}{T}t}\,dt = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \int_{-T/2}^{T/2} \mathrm{e}^{-\frac{2\pi i(n-m)}{T}t}\,dt = A_m \tag{408}$$

$n \neq m$ であるならば, ド・モアブルの公式 : $\mathrm{e}^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ を用いて

$$\begin{aligned}
\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u(t)\,\mathrm{e}^{-\frac{2\pi im}{T}t}\,dt &= \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \int_{-T/2}^{T/2} \mathrm{e}^{-\frac{2\pi i(n-m)}{T}t}\,dt \\
&= \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \left\{\int_{-T/2}^{T/2} \cos\left(\frac{2\pi(n-m)}{T}t\right)dt + i\int_{-\infty}^{\infty}\sin\left(\frac{2\pi(n-m)}{T}t\right)dt\right\} \\
&= \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \Bigg\{\left[\frac{T}{2\pi i(n-m)}\sin\left(\frac{2\pi(n-m)}{T}t\right)\right]_{-T/2}^{T/2} \\
&+ \left[-\frac{T}{2\pi(n-m)}\cos\left(\frac{2\pi(n-m)}{T}t\right)\right]_{-T/2}^{T/2}\Bigg\} = 0
\end{aligned} \tag{409}$$

となるから, 結局 (407) が展開係数であることがわかる.

また, $u(t)$ が実関数であるならば, A_n^* を A_n の複素共役として, $A_{-n} = A_n^*$ が成り立つので, フーリエ展開 (406) は

$$u(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) \tag{410}$$

$$a_n \equiv \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} u(t)\,\cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)dt \tag{411}$$

$$b_n \equiv \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} u(t)\,\sin\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)dt \tag{412}$$

$$a_0 \equiv A_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} u(t)dt \tag{413}$$

のように書くこともできる.

[1] 工学系の教科書では虚数単位を j を用いて記述することが多いと思うが, この講義ノートでは i を用いることに注意されたい.

10.1.2 標本化定理：周期関数に対して

(標本化定理：周期関数に対して)

周期 T の周期関数 $u(t)$ のフーリエ係数 A_n が $|n| > n_{\rm M}$ に対してゼロであるとき, 区間 $(0, T)$ 内の任意の時刻 t の信号値 $u(t)$ は, $N = 2n_{\rm M} + 1$, $\Delta t = T/N$ (**標本化間隔**), $t_k = k\Delta t$, $u_k = u(t_k)$ (**標本値**) として

$$u(t) = \sum_{k=1}^{N} u_k \, g_1(t - t_k)$$

で与えられる. ただし, $g_1(t)$ は**標本化関数**と呼ばれる関数であり

$$g_1(t) = \frac{1}{N}\sum_{n=-n_{\rm M}}^{n_{\rm M}} {\rm e}^{2\pi int/T} = \frac{1}{N}\frac{\sin(\pi Nt/T)}{\sin(\pi t/T)}$$

である.

(証明)

$|n| > n_{\rm M}$ で $u(t) = 0$ に注意して $u(t)$ をフーリエ展開すると

$$u(t) = \sum_{n=-n_{\rm M}}^{n_{\rm M}} A_n \, {\rm e}^{2\pi int/T} \tag{414}$$

が得られるが, $N = 2n_{\rm M} + 1, \Delta t = T/N, u(k\Delta t) = u_k, t = k\Delta t$ とおけば, 上式は

$$u_k = \sum_{n=-n_{\rm M}}^{n_{\rm M}} A_n \, {\rm e}^{2\pi ink/N} \tag{415}$$

と書き直すことができる. そこで, この両辺に ${\rm e}^{-2\pi imk/N}$ をかけて, k に関して 1 から N まで和をとると

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N} u_k \, {\rm e}^{-2\pi imk/N} &= \sum_{n=-n_{\rm M}}^{n_{\rm M}} \sum_{k=1}^{N} A_n \, {\rm e}^{\frac{2\pi i(n-m)k}{N}} \\ &= N \sum_{n=-n_{\rm M}}^{n_{\rm M}} A_n \delta_{n,m} = NA_m \end{aligned}\tag{416}$$

が得られる. ただし, $\delta_{n,m}$ はクロネッカのデルタであり, 整数 n, m に対して成り立つ次の恒等式：

$$\sum_{k=1}^{N} {\rm e}^{\frac{2\pi i(n-m)k}{N}} = N\delta_{n,m} \tag{417}$$

を用いた.

※ この恒等式の成立は次のように示すことができる. まず, $n = m$ のときには

$$\sum_{k=1}^{N} 1 = N \tag{418}$$

となるので, 与式 (417) が成り立つのはあきらか.
$n \neq m$ のときには, $\sum_{k=1}^{N} {\rm e}^{2\pi i(n-m)k/N}$ が初項 ${\rm e}^{2\pi i(n-m)/N}$, 公比 ${\rm e}^{2\pi i(n-m)/N}$ の等比数列であるから, 等

比数列の和の公式から

$$\sum_{k=1}^{N} \mathrm{e}^{2\pi i(n-m)\frac{k}{N}} = \frac{\mathrm{e}^{\frac{2\pi i(n-m)}{N}}(1-\mathrm{e}^{2\pi i(n-m)})}{1-\mathrm{e}^{\frac{2\pi i(n-m)}{N}}} \tag{419}$$

となるが, 任意の自然数 n, m に対し, $\mathrm{e}^{2\pi i(n-m)} = 1$ となるので, 上式はゼロとなり, 結局

$$\sum_{k=1}^{N} \mathrm{e}^{2\pi i(n-m)\frac{k}{N}} = N\delta_{mn} \tag{420}$$

が成り立つことがわかる.

従って,

$$A_n = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} u_k \, \mathrm{e}^{-\frac{2\pi i n k}{N}} \tag{421}$$

なので, これを (415) 式に代入すれば

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} u_k \sum_{n=-n_{\mathrm{M}}}^{n_{\mathrm{M}}} \mathrm{e}^{\frac{2\pi i n(t-k\Delta t)}{T}} \\ &= \sum_{k=1}^{N} u_k \frac{\sin\{\pi N(t-t_k)/T\}}{N\sin\{\pi(t-t_k)/T\}} \end{aligned} \tag{422}$$

が得られる. ただし, ここでは恒等式 :

$$\sum_{k=-K}^{K} \mathrm{e}^{ik\phi} = \frac{\sin(K+1/2)\phi}{\sin(\phi/2)} \tag{423}$$

を用いた.

※この恒等式は次のように示すことができる. 等比級数の和の公式を用いた後に, ド・モアブルの公式を用いて $\mathrm{e}^{i\varphi}$ 等を三角関数で表すと

$$\begin{aligned} \sum_{k=-K}^{K} \mathrm{e}^{ik\varphi} &= \sum_{k=1}^{K} \mathrm{e}^{ik\varphi} + \sum_{k=1}^{K} \mathrm{e}^{-ik\varphi} + 1 \\ &= \frac{\mathrm{e}^{i\varphi}(1-\mathrm{e}^{iK\varphi})}{1-\mathrm{e}^{i\varphi}} + \frac{\mathrm{e}^{-i\varphi}(1-\mathrm{e}^{-iK\varphi})}{1-\mathrm{e}^{-i\varphi}} + 1 \\ &= \frac{\mathrm{e}^{i\varphi}(1-\mathrm{e}^{-i\varphi})(1-\mathrm{e}^{iK\varphi}) + \mathrm{e}^{-i\varphi}(1-\mathrm{e}^{i\varphi})(1-\mathrm{e}^{-iK\varphi})}{(1-\mathrm{e}^{i\varphi})(1-\mathrm{e}^{-i\varphi})} + 1 \\ &= \frac{2\cos\varphi - 2\cos(K+1)\varphi - 2 + 2\cos K\varphi}{2(1-\cos\varphi)} + 1 \\ &= \frac{\cos K\varphi - \cos(K+1)\varphi}{1-\cos\varphi} \\ &= \frac{\cos K\varphi - \{\cos K\varphi\cos\varphi - \sin K\varphi\sin\varphi\}}{2\sin^2(\varphi/2)} \\ &= \frac{2\cos K\varphi\sin^2(\varphi/2) + 2\sin K\varphi\sin(\varphi/2)\cos(\varphi/2)}{2\sin^2(\varphi/2)} \\ &= \frac{\cos K\varphi\sin(\varphi/2) + \sin K\varphi\cos(\varphi/2)}{\sin(\varphi/2)} \\ &= \frac{\sin(K+1/2)\varphi}{\sin(\varphi/2)} \end{aligned} \tag{424}$$

となり, 与式 (423) の成立を示すことができる.
(証明おわり).

例題 13
周期 T の関数 $u(t)$：

$$u(t) = \begin{cases} a & (mT - \frac{\tau}{2} \leq t \leq mT + \frac{\tau}{2} : m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \\ 0 & (t > mT + \frac{\tau}{2}, t < mT - \frac{\tau}{2} : m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \end{cases}$$

に対し

(1) $u(t)$ を図示せよ.
(2) $u(t)$ をフーリエ展開せよ.

(解答例)

(1) $u(t)$ を図示すると図 30 のようになる.

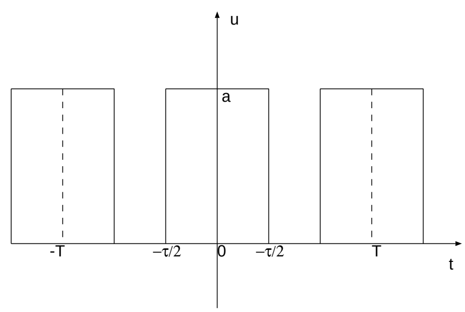

図 30: ここで考える $u(t)$ の概形.

(2) フーリエ展開を行おう. 各フーリエ係数は簡単に

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} u(t)\,dt = \frac{2}{T}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} a\,dt = \frac{2a}{T}[t]_{-\tau/2}^{\tau/2} = \frac{a\tau}{T} \quad (425)$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} a\cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)dt = \frac{2a}{T}\left[\frac{T}{2\pi n}\sin\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)\right]_{-\tau/2}^{\tau/2} = \frac{2a}{\pi n}\sin\left(\frac{\pi n\tau}{T}\right) \quad (426)$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} a\sin\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)dt = \frac{2a}{T}\left[-\frac{T}{2\pi n}\cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)\right]_{-\tau/2}^{\tau/2}$$
$$= \frac{a}{\pi n}\left\{\cos\left(-\frac{\pi n\tau}{T}\right) - \cos\left(\frac{\pi n\tau}{T}\right)\right\} = 0 \quad (427)$$

と求まるので[2], $u(t)$ のフーリエ展開表示は

$$u(t) = \frac{a\tau}{T} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2a}{\pi n}\sin\left(\frac{\pi n\tau}{T}\right)\cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) \quad (428)$$

となる.

[2] b_n に関しては被積分関数が奇関数なので, 積分するまでもなくゼロとわかる.

10.2 連続信号が非周期関数の場合

ここからは信号 $u(t)$ が非周期関数の場合を考える．その前に, 既に学んだフーリエ級数の $T \to \infty$ (単位周波数 $\Delta f \to 0$) の極限としてフーリエ変換を定義しておこう．

10.2.1 準備：フーリエ変換

前回学んだフーリエ展開：

$$u_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \, \mathrm{e}^{\frac{2\pi i n}{T} t} \tag{429}$$

において, 単位周波数（隣り合う周波数間の間隔) Δf を

$$\Delta f \equiv \frac{1}{T} \tag{430}$$

で定義する．このとき, $T \to \infty$, つまり, 周期 T を十分に長くとれば, 単位周波数 Δf は微小量となる．また, この単位周波数の n 倍で周波数を

$$f = n\Delta f = \frac{n}{T} \tag{431}$$

で定める．ここで, フーリエ係数 A_n は

$$A_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u_T(t) \, \mathrm{e}^{-\frac{2\pi i n}{T} t} \, dt \tag{432}$$

で与えられたことを思い出すと, 単位周波数あたりの周波数成分は

$$\frac{A_n}{\Delta f} \equiv U(f) \tag{433}$$

で定義することができる．これから $A_n = U(f)\Delta f$ であるから, これと単位周波数を用いて (429) 式を書き直すと

$$u_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Delta f \, U(f) \, \mathrm{e}^{2\pi i f t} \tag{434}$$

となるが, ここで $\Delta f \to 0$ の極限をとれば

$$\lim_{\Delta f \to 0} u_T(t) = \int_{-\infty}^{\infty} df U(f) \, \mathrm{e}^{2\pi i f t} \equiv u(t) \tag{435}$$

が得られる．一方, $U(f)$ は (432)(433) から $T \to \infty$ の極限で

$$U(f) = \frac{A_n}{\Delta f} = \frac{1}{\Delta f T} \int_{-T/2}^{T/2} u_T(t) \, \mathrm{e}^{-\frac{2\pi i n}{T} t} \, dt = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \, \mathrm{e}^{-2\pi i f t} dt \tag{436}$$

となる．従って, 我々は次のような 1 対の積分を得ることができた．

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} df U(f) \, \mathrm{e}^{2\pi i f t} \tag{437}$$

$$U(f) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \, u(t) \, \mathrm{e}^{-2\pi i f t} \tag{438}$$

ここで, (438) を関数 $u(t)$ の**フーリエ変換**と呼ぶ．このフーリエ変換を用いることにより, 任意の時間の関数 $u(t)$ に対し, どのくらいの割合でどのような周波数 f が含まれるか — つまり $U(f)$ — を求めることができる．一方, (437) 式で定義される積分は**フーリエ逆変換**と呼ばれる．その作り方から明らかに, $u(t), U(f)$ のどちらか一方がわかれば他方は自動的に定まることになる．

10.2.2　標本化定理：非周期関数に対して

(標本化定理：非周期関数に対して)

時間の関数 $u(t)$ のフーリエ変換 $U(f)$ が $|f|>W$ でゼロであるとする．このとき，時間軸上に $\Delta t=1/2W$ で標本点 $t_k=k\Delta t\ \ (k=0,\pm1,\pm2,\cdots,)$ をとり，$u_k=u(t_k)$ とすると，任意の時刻での関数値 $u(t)$ は

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_k\, g_2(t-t_k), \quad g_2(t)=\frac{\sin(2\pi Wt)}{2\pi Wt}$$

で与えられる．(g_2 は標本化関数)

この定理は，その周波数成分が $|f|\le W$ に制限されてさえいれば，信号 $u(t)$ を観測値から再構成する場合に無限個の連続した観測点を設ける必要はなく，$1/2W$ の間隔で「飛び飛び」の値さえ調べておけば十分であり，それら有限個の標本値をつなぎ合わせていけば元の信号 $u(t)$ が必ず再構成できることを保障している．

さて，ここで周波数 W，周期 $T=1/W$ の単振動の解を考えてみると (以下，各自が周期 $T=1/W$ の正弦曲線を頭に思い描きながら読んでください !)，その正弦曲線の「山」と「谷」の間の間隔が $1/2W$ であることは直ちにわかるであろう．ここがこの定理のポイントの一つである．つまり，**「山」と「谷」の間隔 $T/2=1/2W$ でもって信号 $u(t)$ をサンプリングしさえすれば，その間隔の中でさらに細かく $u(t)$ がギザギザと波打っているという状況はありえない** (もし，この間隔の中でさらに細かな「山」「谷」が現れたとすると，それは周波数の最大値が W であるという前提に反する)．従って，この間隔「$1/2W$」でサンプリングした点を「滑らかに」つなげば，サンプリングの間隔が荒いのではなかろうか，ということを一切気にすることはなく，元の信号 $u(t)$ が再構成できるであろうことは容易に想像できる (ほぼ自明だと思う)．

しかし，かと言って「どのように標本点を滑らかにつなげばよいか」に関しては自明ではない．それがこの定理では具体的に与えられているわけである．そこで定理の証明を詳しく見ていくことにしょう．

(証明)

証明はさほど難しくない．まずは $u(t)$ のフーリエ変換 $U(f)$ が $|f|>W$ でゼロであるから

$$u(t) = \int_{-W}^{W} df\, U(f)\, \mathrm{e}^{2\pi i f t} \tag{439}$$

となるので，この $U(f)$ は f の関数としてフーリエ級数展開することができ，

$$U(f) = \sum_k B_k\, \mathrm{e}^{-\frac{2\pi i k f}{2W}} \tag{440}$$

$$B_k = \frac{1}{2W}\int_{-W}^{W} df\, U(f)\, \mathrm{e}^{\frac{2\pi i k f}{2W}} \tag{441}$$

となる．従って，(440) を (439) に代入して f に関する積分を実行すれば

$$u(t) = \sum_k B_k \int_{-W}^{W} df \mathrm{e}^{2\pi i f(t-\frac{k}{2W})} = \sum_k B_k \frac{\sin\left[2\pi W\left(t-\frac{k}{2W}\right)\right]}{\pi\left(t-\frac{k}{2W}\right)} \tag{442}$$

となるが，(439)(441) 式より

$$B_k = \frac{u(t_k)}{2W} \tag{443}$$

であるから, 結局

$$u(t) \quad = \quad \sum_{k} u(t_k) \frac{\sin\left[2\pi W\left(t-\frac{k}{2W}\right)\right]}{2\pi W\left(t-\frac{k}{2W}\right)} \tag{444}$$

となり, 確かに $u(t)$ は標本化関数 $g_2(t)$ を用いて定理のように書くことができる. **(証明おわり)**.

ところで, この標本化関数を $\sin(x)/x$ としてプロットしてみると図のようになる. $x=0$ のとき, この関

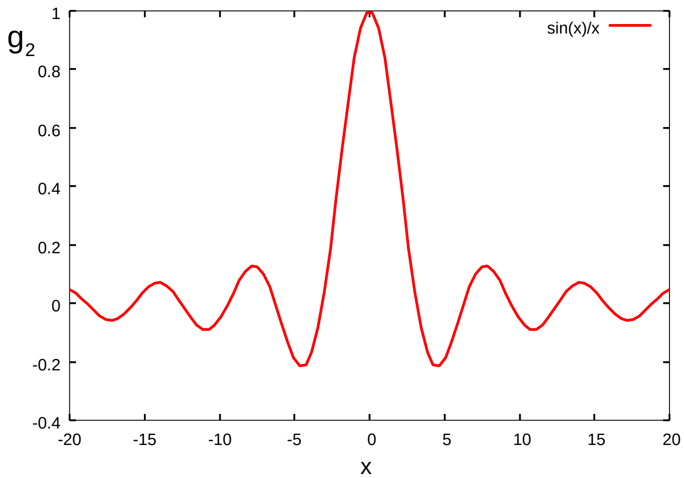

図 31: 標本化関数.

数は 1 を与え, x が大きくなるにつれて, その値は減少していくことがわかる. このグラフと式 (444) から明らかなように, 各標本点 $t_k = k/2W$ では $u(t)$ への寄与は重み 1 であり, それ以外では各標本点からの距離が大きければ大きいほど小さな重み (その重みは $1/t$ の形で減衰する) で $u(t)$ へ寄与するような形となっている. これは直観的にもっともらしい形と言えるであろう.

例題 14

1. 周期 $1/W$ の正弦波を $1/2W$ の間隔でサンプリングした場合と, 同じ波を $3/2W$ の間隔でサンプリングした場合とを比べ, 後者では本来の波の他, 各標本点を通る周波数のさらに低い波が存在することを図示することにより示せ. このような波が出現することを**エイリアシング**と呼んでいる.

2. 周期関数に対する標本化定理と非周期関数に関する標本化定理の間の関係はどのようになっているのか, を調べることは興味深い. これを見るために, $u(t) = \cdots$ の式で, $T/N = \Delta t$ (一定) のまま $N, T \to \infty$ とすると, 今回の標本化定理が得られることを示せ.

(解答例)

1. 簡単に示すと, 図 32 のようになり, 各標本点を取ることは取るが, 本来の波より周波数の低い波まで存在してしまうことになる. ちなみに, 映画などで車の走行が映されたとき, 車輪の回転がときおり本来とは逆に回転して見える場合があるが, それはこのエイリアシング現象に由来するものである. 現実の

車輪の動きを忠実にとらえるために必要である映画のフィルムのコマ数 (サンプリング点) が少なすぎたわけである.

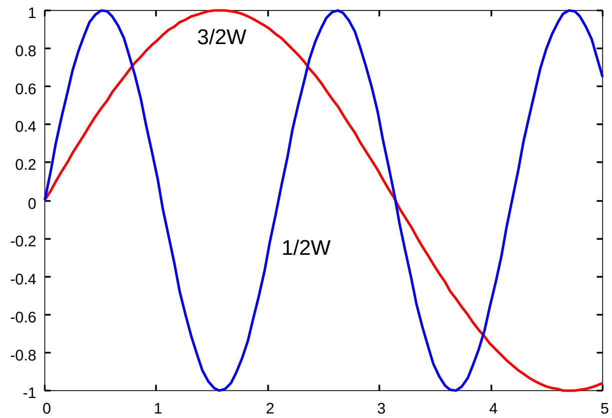

図 32: エイリアシングの一例.

2. 周期関数に対する標本化定理より, 標本化関数 $g_1(t)$ は, $T/N = \Delta t$ を一定のまま, N, T ともに無限大の極限をとれば

$$g_1(t) = \frac{1}{N}\frac{\sin\left(\frac{\pi t}{\Delta t}\right)}{\sin\left(\frac{\pi t}{N\Delta t}\right)} \simeq \frac{\sin\left(\frac{\pi t}{\Delta t}\right)}{\left(\frac{\pi t}{\Delta t}\right)} \tag{445}$$

となる. ここで, x が小さいとき, $\sin x \simeq x$ である事実を使った. そこで, この $g_1(t)$ を $u(t) = \cdots$ の式に代入すれば

$$u(t) = \sum_{k=1}^{N} u(t_k)\frac{\sin\left\{\left(\frac{\pi}{\Delta t}\right)(t-t_k)\right\}}{\left(\frac{\pi}{\Delta t}\right)(t-t_k)} \tag{446}$$

となるが, $t_k = k\Delta t$ であったことを思い出し, サンプリング間隔：$\Delta t = 1/2W$ で Δt を置きなおせば

$$u(t) = \sum_{k=1}^{N} u(t_k)\frac{\sin\{2\pi W(t-k/2W)\}}{2\pi W(t-k/2W)} = \sum_{k=1}^{N} u(t_k) g_2(t-t_k) \tag{447}$$

が得られるが, これは確かに非周期関数に対する標本化定理の関係式である.

演習問題 12

最大 W[Hz] の周波数を含む T[s] 間の信号を標本化定理に従って標本化し, 各標本点を 10 ビットのデジタル・データに変換したとすると, 合計何ビットのデータが得られるか？

※ **注**：今回のレポート締め切りは 7/25 の講義開始時までです. また, **試験は 8 月 8 日 (月) 第 2 講時に M151 で行います**.