

水産海洋工学テキスト(Ver.2)

2008年12月
水産科学研究科 水産海洋工学領域 芳村 康男

目次

1. 水産における船・機械工学	-----	1
2. 海洋の機械・漁具・船に働く力	-----	5
3. 制御の概要(物を自在に動かすには)	-----	10
4. 制御系要素の特性と表現	-----	16
(運動の表記と解法、伝達関数、インパルス応答・ステップ応答)		
5. システムの構成例	-----	34
6. システムの安定性	-----	39

【概要】

水産において、捕獲・選別・加工する一連の生産プロセスの中で、漁船やこれに搭載される各種の機械・装置が使用される。本授業ではこうした機械・装置を効率よく安全に動かすために必要な工学の基本について初歩から解説し、船・機械に働く力のメカニズムや運動特性の取り扱い方を学習する。

【学習目的】

1. 静止流体から受ける力のメカニズムとその具体的計算法を理解する。
2. 浮体運動時の流体力メカニズムと特性を理解する。
3. 船の操縦装置や自動制御の観念を知る。
4. 制御系動作の基礎理論を理解する
5. 制御系要素の特性と数量的表現法を知る

【到達目標】

1. 運動方程式が導入や機械要素の運動が理解でき、これらを解法する中でその運動をイメージすることができる。
2. フィードバックシステムを中心とした基礎的な制御理論が理解でき、簡単な制御システムが構成できる。
3. システムが安全に作動するための安定性理論を理解し、具体的安定条件を求めることができ、安定した御システムの設計や評価ができる

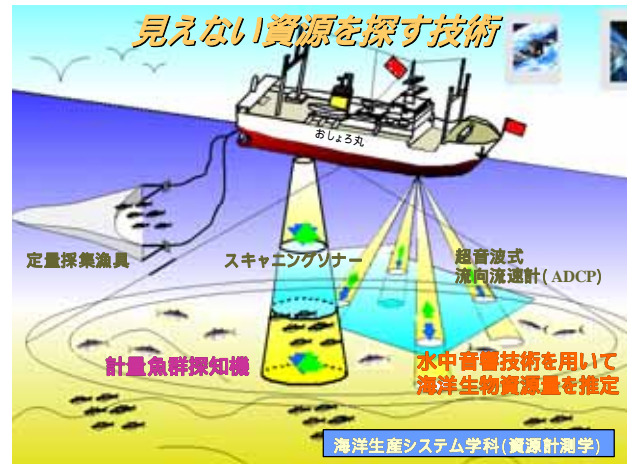
【学習内容】

1. 浮力のメカニズムとその計算法
2. 船・浮体のダイナミックな運動の基礎力学
3. 船の操縦運動の力学的メカニズムとその性能
4. 自動制御の概要とフィードバック制御：船の操縦運動を例にフィードバック制御の概念とブロック線図の表現，解析方法について学習する。
5. 制御要素の特性と表現：制御要素の記述法について学習する。またこれらを用いてシステムの伝達関数の表現，周波数応答，インパルス応答，ステップ応答についてそれぞれ関連付けて学習する。
6. システムの安定性：構成されたシステムが安定に作動するための安定性について理解し，具体的システムの安定条件を考察する。

1. 水産における船・機械工学

1.1 水産における船の役割

1) 資源・環境計測



資源・環境調査の方法

宇宙から：衛星を使った資源計測

(光・赤外線・電波を媒体とした計測

→広い海域を観測できる反面、水面、表層に限定される。太陽光を吸収する植物プランクトン、海水温度分布の広域調査に適する。)

船から：超音波による資源計測

(超音波を媒体とした計測

→海中を含め比較的広い海域を観測できる。生物資源をやや推測ながら定量的に調査可能。また、海水流速なども計測できる。)

生物採取による資源計測 (局所的に限られるが、

→海水の成分、深さ方向の水温分布を精密に計測でき、生物の種類、サイズを確定的に調査できる。)



おしよ丸

調査船：

水圏で観測・研究するプラットフォーム (移動基地)

水圏で科学を行うに必要な道具



うしお丸

船による海の環境・資源の調査

物理観測

(1)気象・海象

風速・風向、気温・湿度、気圧、波高

(2)海水計測

温度・塩分・溶存酸素(CTD, XCTD)

透明度(Secchi 板: 30cm 白色)、

流向・流速(ADCP)、照度

化学観測

硝酸塩などの栄養塩, CO₂

(ロゼッタ採水装置・バンドン採水他)

生物観測

クロロフィル a: 採水装置, 人工衛星画像解析

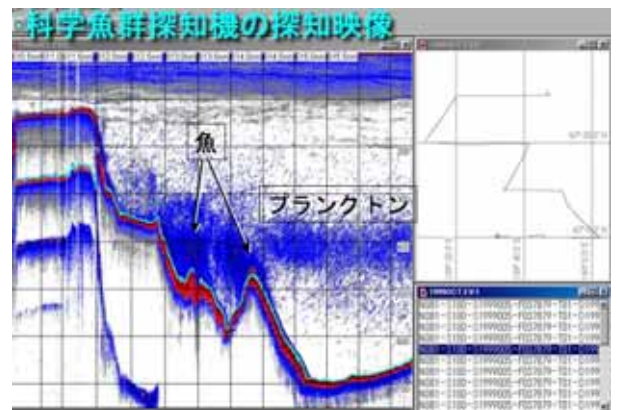
微生物 : J-Z 式無菌採水器

プランクトン : ノルパックネット, MTD ネット

稚魚 : 稚魚ネット, MOCNES

魚類 : 流し刺し網, フレームトロール,
中層・底層トロール, 延縄, イカ釣り機, 計量魚探,
スキャンニングソナー

鳥類・哺乳類: 目視観測



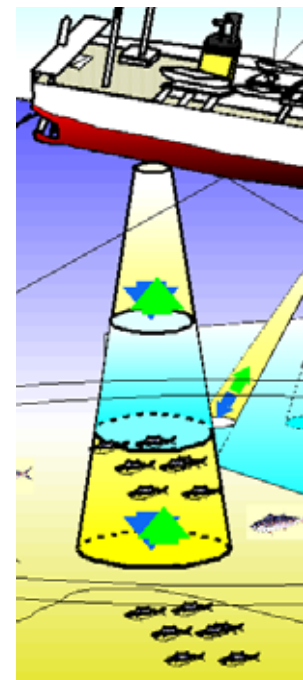
計量魚探, スキャンニングソナーによる資源調査

地学観測

海底地形図・水深図 : 超音波測深儀

地質図(岩・砂・泥) : 採泥器

鉱物資源(マンガン・原油): 超音波探査, ポーリング



2) 漁業生産(漁船)

栽培・養殖：(沿岸) 各種の設備・機械・漁船
(陸上) 水槽・ろ過装置・水温制御・餌装置

漁獲

トロール船(底曳, 中層, 表層)

巻網漁船(船団方式: 網船+探査船+灯船+輸送船)

延縄漁船, その他(イカ釣り, さんま・・・)

しかし, 過酷な海洋での生産活動は常に危険が伴う。

海難事故のトップが漁船。

資源を管理しつつ安全かつ効率的に生産する技術, 仕組み(制度)の発展が不可欠になる。

代表的な漁船

160 トン型
船尾トロール漁船



360 トン型 鮪延縄漁船



135 トン型 旋網漁船
(甲板室型)



3) 漁業生産 (漁具・養殖生け簀など)

漁具や養殖生け簀などは、主に以下で構成され、これらの種々の環境条件で効率よく使用可能にするための設計が必要になる。

- (1) 網 (トロール網、旋網、流し網、刺し網、定置網、養殖生け簀網)
- (2) 縄 (延縄)、索
- (3) 浮子 (アバ)
- (4) 沈子 (シンカー)

著作権処理の都合で、
この場所に挿入されていた
図を省略させていただきます。

トロール網の実験写真 (回流水槽)

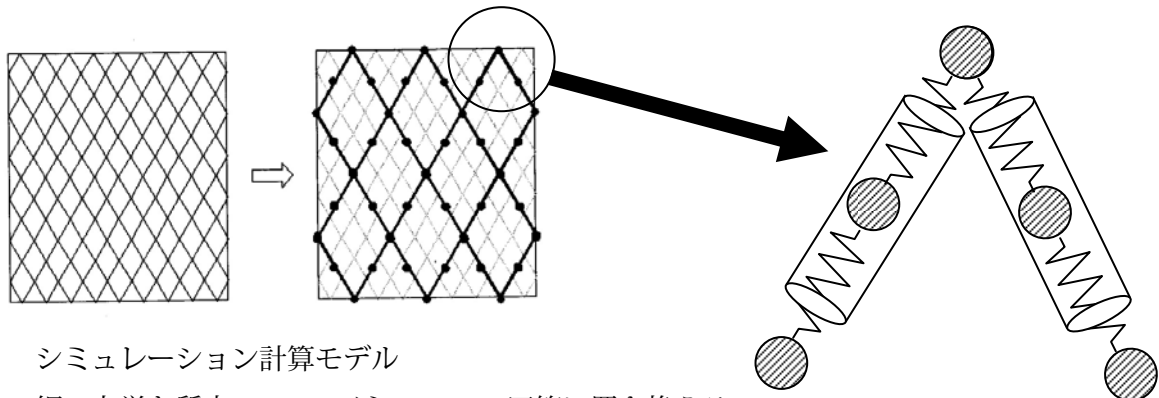
シミュレーション

(出典 : Fuxiang HU, at.al, Accuracy evaluation of numerical simulation for mid-water trawl nets, Contributios on the Theory of Fishing Gears and Related Marine Systems, Vol.4,(2005)

著作権処理の都合で、
この場所に挿入されていた
図を省略させていただきます。

潮流による生け簀用網の変形シミュレーション

(出典 : Shimizu,T. at.al, Application of NaLA to net-cage and purse seine, Contributios on the Theory of Fishing Gears and Related Marine Systems, Vol.4,(2005)



シミュレーション計算モデル

網の力学を質点(mass)、バネ(spring)、円筒に置き換える

2. 海洋の機械・船に働く力

海の中を遊泳する海洋動物の胴体は抵抗の少ない流線型をしており、尾ヒレを巧みに動かして強力な推進力を発生させることができる。また、胸ビレや背ビレなどは操縦運動や安定性を支えている。これらの力学的なメカニズムは、機械や船に作用する力も大変良く似ている。これらのメカニズムを考えてみよう。

2.1 重力

物質には多かれ少なかれ「重さ」があり、地球もまた大きな「重さ」があるので、相互に引力が働く。これは万有引力と呼ばれ、この力は物質の「重さ」に比例する。ニュートンはこの「重さ」を質量と定義し、力 F と運動の関係を次式で表現できるとした。

$$F = m \cdot a \quad \text{----- (2.1)}$$

m : 質量

a : 加速度(速度の時間的変化)

地上における重力加速度は g という記号で表示され、この値は地域・高度によって多少異なるが、およそ $9.8 \text{ [m/s}^2\text{]}$ である。「重さ」を表す質量は通常(kg)という単位が使用され、質量 1kg に作用する重力(地上に引きつけられる力)は(2.1)式にしたがって、 $9.8 \text{ [kg} \cdot \text{m/s}^2\text{]}$ となる。この単位 $[\text{kg} \cdot \text{m/s}^2]$ を N(ニュートン)と言う。

1) 質量等の物理単位

国際単位系(SI 単位)では質量・長さ・時間に関して、以下のような単位が使用される。

物理量	単位
質量	g(グラム)
長さ	m(メートル)
時間	s(秒)

しかし、これでは、大きなものから小さなものまで、一律に使えないので、大きさ(スケール)を表す補助単位が使用される。それを以下に示す。これは原則であり、必ずしも使用されないスケールもある。例外的に 1000 [kg]のことを 1 [Mg]でなく 1t という表現が認められている。

	1,000,000		1,000	100	10	1	1/10	1/100	1/1000		1/1000000
	10^6		10^3	10^2	10^1	10^0	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}		10^{-6}
	M		K	H	D	-	d	c	m		μ
	メガ		キロ	ヘクト	デカ		デシ	センチ	ミリ		マイクロ
長さ			Km	-	-	m	-	cm	mm		μm
質量	(t トン)		Kg	-	-	g	-	-	mg		μg
力			kN	-	-	N	-	-	-		
容積			k	hP	-	-	d	c	m		
圧力			kP	-	-	P	-	-	mP		μP

2) 密度

流体の質量などのように均一な物質の質量を表現する方法として、単位体積当たりの質量で表示する場合がある。この場合、原則として $1 \text{ [m}^3\text{]}$ の質量が使われるが、目的に応じて $1 \text{ [cm}^3\text{]}$ (1 立方センチメートル)などが使用される。

$$\begin{aligned} \text{清水の密度 (1 気圧, 4 }^\circ\text{C)} &= 1,000 \text{ [kg/m}^3\text{]} (= 1 \text{ [t/m}^3\text{]}) \\ &= 1,000 \text{ [kg/(10} \times \text{10cm)}^3\text{]} = 1 \text{ [kg/リットル]} \\ &= 1,000 \text{ [g/(10cm)}^3\text{]} = 1 \text{ [g/cm}^3\text{]} \end{aligned}$$

3) 比重

物質の密度を上記の蒸留水の密度(1気圧,4℃)に対して比率で表したものを比重と呼ぶ。代表的な物質の比重を下表に示す。15℃における平均的な海水の比重は約1.025である。

名称	比重
個体(金属)	
マグネシウム	1.74
炭素(石墨)	2.25
アルミニウム	2.699
ジュラルミン(合金)	2.79
炭素(石墨)	2.25
スズ	7.28
マンガン	7.43
鉄(鑄鉄)	7.05~7.30
鋼(炭素鋼・合金)	7.85
ニッケル・クロム鋼	7.80
ステンレス鋼	7.91
銅	8.89
青銅	8.74
ニッケル	8.90
銀	10.49
鉛	11.34
(ハンダ)	9.5)
水銀	13.546
金	19.32
白金	21.45
液体	
石油(原油)	0.85~0.93
植物油脂	0.88~0.95
動物油脂	0.91~0.97
海水	1.01~1.05

4) 圧力

単位面積あたりに受ける力のことを圧力と言う。1[m²](1平方メートル)に1[N](ニュートン)の力を受ける時、この圧力を1[P](パスカル)と呼ぶ。[Pa]と書く場合もある。

$$\text{圧力 } 1 [P] = 1 [N/m^2] \quad \text{----- (2.2)}$$

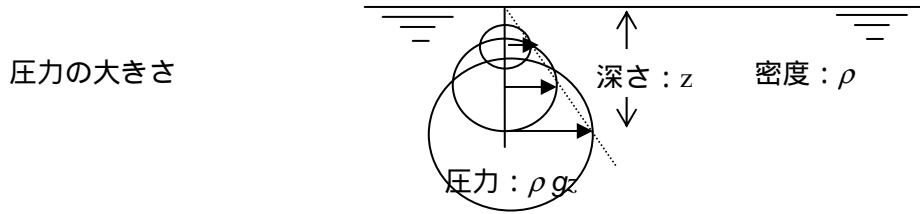
海面下 10 [m]では、1[m²](1平方メートル)上部にある海水の質量は 10 [m] × 1000[kg] × 1.025 であり、その重力は 10 [m] × 1000 [kg] × 9.8 [m/s²] × 1.025 = 100,450[N] となるので、圧力は 100,450 [P]になる。あるいは **1004.5 [hP]**(ヘクトパスカル)、100.45 [kP](キロパスカル)となる。

一方、地上の大気圧は水銀柱で約 75cm に相当するので、1平方メートル当たりの大気の重力は 0.7533 [m] × 13.546 × 1000 [kg/m³] × 9.8 [m/s²] = 100,000 [N]となるので大気圧は 100,000 [P]となる。あるいは **1,000 [hP]**(ヘクトパスカル)、100 [kP](キロパスカル)。

これはほぼ、上記の海水 10 [m]の深さの圧力に等しく、これを旧メートル法では「1気圧(1 [bar], パール)=1,000 [mm bar] (ミリパール)」と呼んできた。SI単位系では[bar]は使用しないが、海洋観測においてCTDの深度は圧力で表示され、海水 10 [m]の圧力が 10 [d bar](デシパール=0.1気圧)になることから、水深を[d bar]で表記する場合がある。(特例)

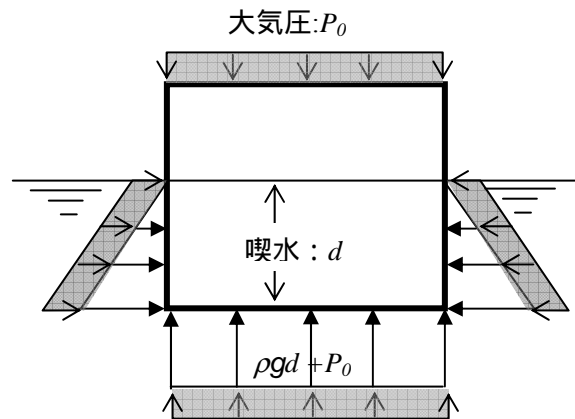
2.2 浮力

上記のように、質量中の物質の中では、深さに応じてその物質の重力が変わるので、圧力が深さに比例して変化する。ある密度 ρ の物質で深さ z における単位面積当たりの重力は ρgz であるから、これが圧力となり、深さに比例して大きくなる。



船を浮かす力は浮力と呼ばれるが、これは水や海水の圧力が船体表面に作用し、この上下方向成分の総和が浮力となる。

今、直方体が上面を水平にして液体密度： ρ に浮かんでいる場合を考えてみよう。直方体の表面に受ける圧力は深度に比例するので、直方体の喫水を d とすると、直方体の周りには左図のように、浮体の表面と垂直な方向に圧力が作用する。



大気圧は水圧と同様、高さによって圧力が異なり空気の浮力を受けるが、空気の密度は水の約 $1/800$ なので、物体周辺の高さの違いによる影響はほとんど無いと考えてよい。

この図から、浮体の底面には一様に上向きに $\rho gd + P_0$ の圧力がかかり、また浮体の上面には一様に下向きに P_0 の圧力がかかっているので浮力 B は、

$$\begin{aligned}
 B &= (\rho gd + P_0) \times \text{直方体の底面積} - P_0 \times \text{直方体の底面積} \\
 &= \rho gd \times \text{直方体の底面積} \\
 &= \rho g \times \text{没水体積}
 \end{aligned}
 \tag{2.3}$$

となる。ただし、 g : 重力加速度

また、直方体の側面にかかる圧力は全て水平なので、浮力には結びつかない。したがって、浮力は流体密度、重力加速度と没水体積の積、すなわち、**物体が排除した流体の重力に等しくなり**、これがいわゆるアルキメデスの法則（アルキメデスの原理）である。この法則は直方体でなくても任意の形状について成立する。

（これを種々の形状で確認してみよう）

(2.3)式の浮力の式で、 ρ を(kg/m^3)、 g を(m/s^2)、没水体積を(m^3)という単位でそれぞれ表記した場合、浮力の単位はN(ニュートン)となる。

ただし、船では $\rho \times$ 没水体積のことを**排水量**と言い、浮力と重量が釣り合っていることから質量の単位で表現する。特に清水の ρ は $1,000\text{kg}/\text{m}^3$ であるから、体積を m^3 で表すと、排水量の単位は $1,000\text{kg}$ 、すなわち 1t (トン)になるから取り扱いが大変便利になる。

2.3 推力と抵抗

1) 推進力

海洋動物は色々な方法で遊泳しているが、共通して言えることは、尾ヒレあるいは魚体全体を運動させて、水を後方に押し出して推進しているということである。この中には、クジラやイルカのように尾ヒレを上下に振動させるものと、魚のように左右に振動させるものがある。これらの違いは、哺乳類と魚類の背骨のしくみにあるが、推進性能という面からは両者に大きな違いはない。ただし、旋回といった運動性能の面では、左右に尾を振動させるものは左右の運動性能に優れ、上下に尾を振動させる動物はやはり上下の運動性能に優れている。この尾ヒレを振動させて推進させるメカニズムの基本は水を後方に押し出すことにある。今日多くの船の推進装置はスクリュプロペラであり、駆動のしくみは異なるものの、水を押し出して力を得る原理は基本的に同じである。

前述の(2.1)式に示したニュートンの運動方程式を若干変形すると、

$$F = m \cdot a = d(m \cdot v) / dt \quad \text{----- (2.4)}$$

m : 質量

v : 速度(位置の時間的変化, 加速度の時間積分)

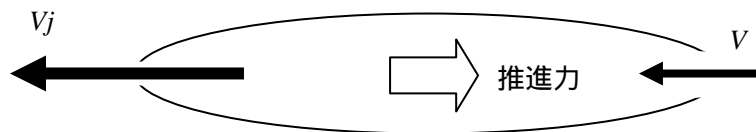
であり、 $m \times v$ を運動量という。すなわち、運動量の時間的変化が力になることを示しており、このようにして力を求める方法を運動量理論と言う。

以下の例で具体的に推進力を求めてみよう。

ある物体(あるいは生物)が一定速度 V で進みながら、前方から水を取込み、後方から速度 V_j で吐き出す場合、その吐き出し流量(体積)を毎秒 Q とすると、推進力は(2.4)式から、

$$F = \rho Q V_j - \rho Q V = \rho Q (V_j - V) \quad \text{----- (2.5)}$$

となる。



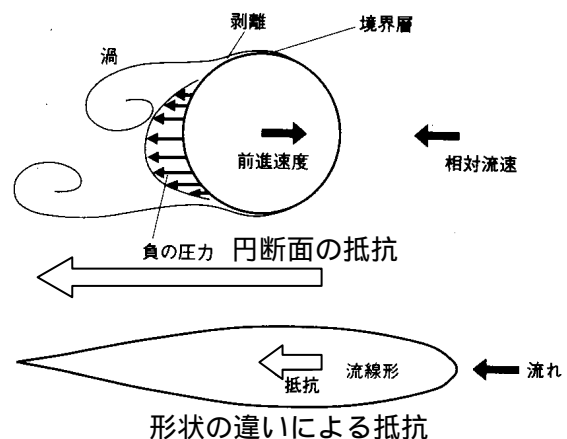
2) 抵抗

宇宙のように真空中を移動する人工衛星や宇宙ステーションでは、物体に働く抵抗(物体の移動を止めようとする力)はほとんど無い。音速の数十倍で飛行する人工衛星がキャシャな太陽電池パネルを大きく広げられるのも、こうした理由による。しかし、大気圏の中では空気、あるいは海の中では水という流体が存在し、これが物体に大きな力を与えることになる。

流体が物体に働く抵抗は、流体の密度: ρ ・物体の面積: A 、流速: V の2乗に比例する他、その形状に大きく依存することが知られている。これを式で書くと、

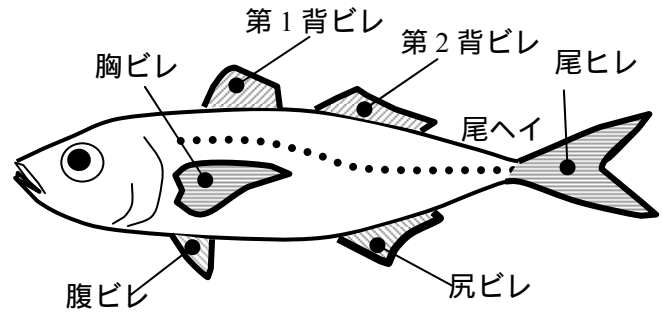
$$R = \left(\frac{\rho}{2} \right) C_D V^2 \quad \text{----- (2.6)}$$

特に水の密度は空気の約800倍もあるので、形状が同じなら800倍の力を受けることになる。海の中を行動する海洋生物はこの力ができるだけ小さく(したがってエネルギーも少なく)なるよう形状が工夫されていると言える。速く移動して獲物を捕獲する、あるいは捕獲から逃げる魚にとっては、魚体の形状ができるだけ流線型(右図のように流体の流れに沿った形状で抵抗が少ない)であることが必要になる。



2.4 揚力

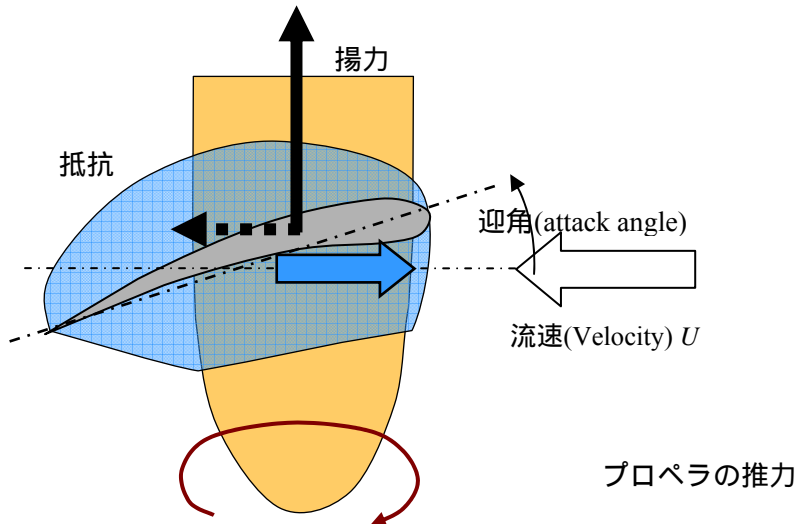
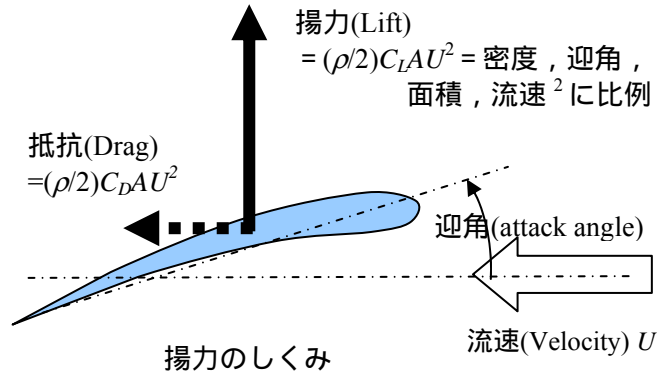
海洋動物は右図に示すように、実に多くのヒレを持っている。これらのヒレの多くは推力を補助的に発生させるものもあるが、横方向に必要な揚力をつくるのが主な役割である。一般に、下図のように、翼に流体が流れ込むと翼には流れと直角方向に揚力が発生する。すなわち飛行機や鳥が重力に逆らって飛ぶ基本原理である。この力は、先の抵抗の性質と似ており、流体の密度: ρ 、翼の面積: A 、流速: V の2乗、そして迎角: α に比例する。



$$L = \left(\frac{\rho}{2}\right) C_L V^2 A \alpha \quad \text{---- (2.7)}$$

魚はこの内、ヒレを動かして迎角を変え、揚力の大きさや向きを調整することができる。多くのヒレを巧みに動かすことによって、魚体の姿勢や運動を高度に制御することができる。背ビレや胸ビレ、腹ビレは魚の重要な制御装置（コントロール・サーフェス）である。

(2.4)式～(2.5)の推進力・抵抗・揚力の式で、 ρ を(kg/m^3)、速度 V を(m/s)、面積を(m^2)という単位でそれぞれ表記した場合、それぞれの力の単位はN(ニュートン)となる。



3. 船・機械と制御（物を自在に動かすには）

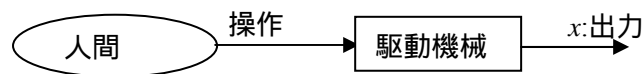
船や機械を自在に動かすには、運動や力のメカニズムを把握し、どのように操作するかが重要になる。すなわち制御の方法である。これらの詳細は「システム制御工学」で講義されることになっているが、ここではその概略について紹介する。

3.1 代表的な制御

a) 手動制御：人間が制御動作を行う制御

例) 自転車、自動車の運転

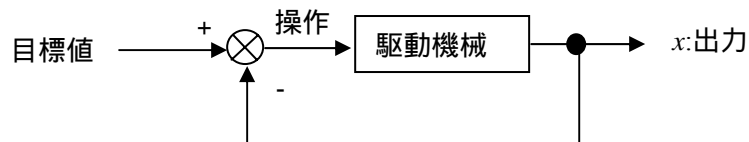
自動車の向きを変えようとしてハンドルを切ってもすぐ向きが変わらない。アクセルを踏んでもすぐに加速できない、ブレーキを踏んでもすぐには止まらない。このように、制御対象には遅れがある。（この遅れはハンドル、アクセル、ブレーキの操作のしかたによっても異なる。）この遅れを人間が習熟して操作して自動車を思うように動かせるようになる。



b) フィードフォワード制御：制御対象の応答を事前に予測して、操作を適切に調整する。ただし、結果の保証はないので、次のフィードバック制御と併用される場合が多い。

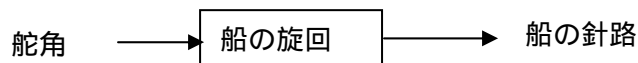


c) フィードバック制御：操作結果が所定の結果になるよう、常に結果を入力に戻す制御。制御対象の特性が複雑であったり、結果を乱す外乱が少々あっても、最終的に目標値に到達できる。

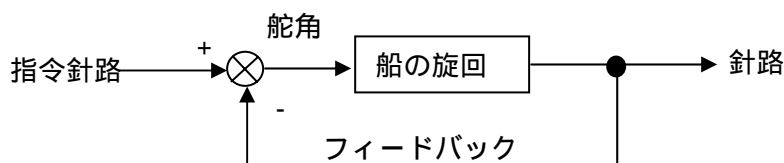


3.2 フィードバック制御

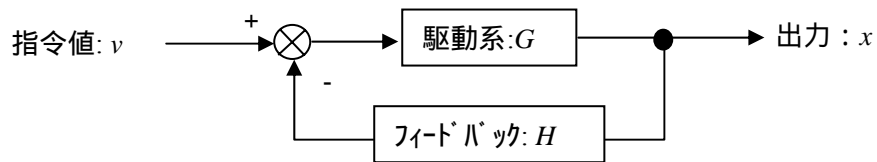
船の旋回運動は通常、舵によって引き起こされる。舵を右に切ると船は右に旋回をはじめ、やがて一定の速さで旋回する。舵を中央に戻すと、旋回する速さは次第に減速し、十分時間が経つと船の旋回が止まる。この操作を簡単な図（ブロック線図）に示すと下図のような手動制御になっている。



これを手動でなく自動的に操舵できれば大変便利である。これはどのようにすれば可能だろうか？ その一つの方法に、指令値（目標針路）と現状との違いによって制御対象の入力（上記では舵角）を自動的にとると言う方法であろう。現針路が目標より 10° 少ないなら例えば右の 10° 操舵すると言う方法である。これを図に示したのが下図である。

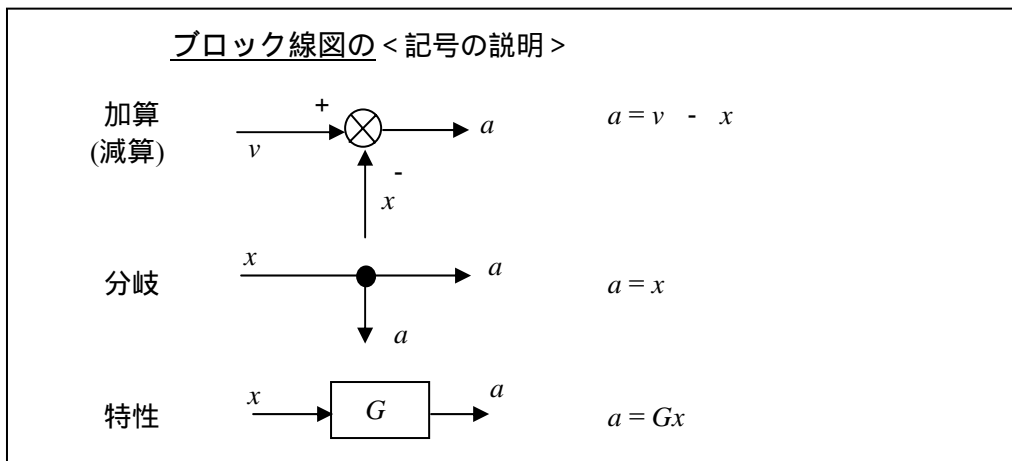


このように、運動の結果（針路）を制御対象の入力に戻す操作のことをフィードバック(feed back)と言い、こうした制御をフィードバック制御という。またこのようなシステムでは閉ループ(closed loop)を形成しているので閉ループ制御系と言われる。より一般的に書くと下図となる。



フィードバック制御の基本ブロック線図

このシステムでは、制御対象の特性が複雑であったり、結果を乱す外乱が少々あっても、最終的に目標値に到達できることになるが、制御対象の特性やフィードバックの特性によっては、「行き過ぎ」あるいは「不足・遅過ぎ」などが生じることがある。つまり目標値の周辺で「振動する」あるいは「なかなか目標値に到達しない」等が生じる。安定な制御系の設計とは、制御対象の特性に合ったフィードバック特性を設計することである。



上図のようなフィードバックの例で、入力 v に対する出力 x は次式で計算できる。すなわち、駆動系 G の入力、 $(v - Hx)$ 、 G の出力は $G(v - Hx)$ となり、これが x になることから、次式が成り立つ。

$$x = G(v - Hx) \tag{3.1}$$

これより、

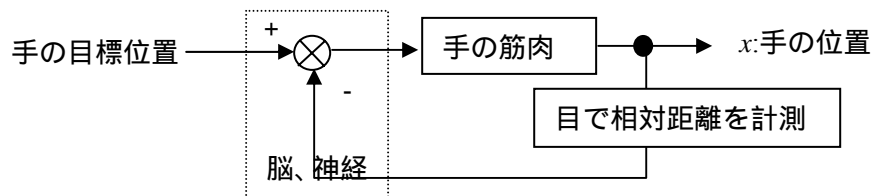
$$x = \left(\frac{G}{1 + GH} \right) v \tag{3.2}$$

となる。

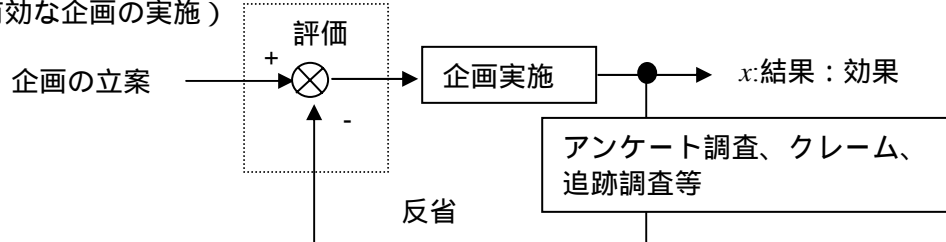
1) フィードバックシステムの例

見方によれば、フィードバックとは「反省」であって、このようなシステムは生体、社会科学でも多く見られ、応用されている。

(生体现象の例：目で見てもつかむ操作)



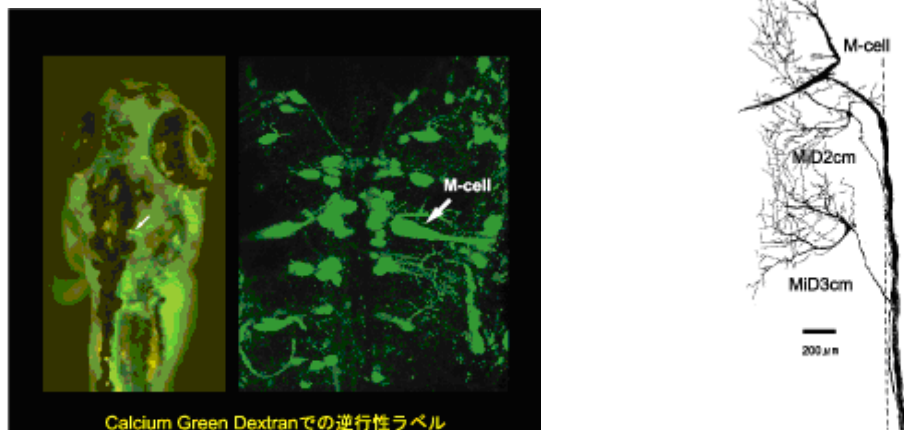
(社会現象の例：有効な企画の実施)



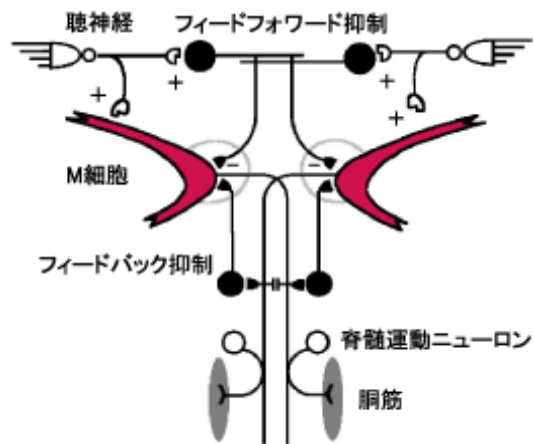
2) 生物（魚類）における制御システムの例

人間の行動や多くの調整機能は制御システムでかなりのことが説明できる。魚の行動も同様に、特に逃避行動は、生命を防御するために不可欠なシステムであり、この仕組みを、小田洋一教授（名古屋大 理学（当時）；下図は論文紹介から引用）らが明らかにしている。

魚の脳の後方には、各種のトリガー細胞が存在し、脊椎の神経（ニューロン）に通じている。その中でも最大の大きさを持つトリガー細胞がマウスナー(M)細胞と呼ばれる。このマウスナー細胞は左右に一对存在し、聴覚・視覚の各種の神経の出力がここにつながれている。また、マウスナー細胞の出力は専用の太い神経で、魚の胴筋に接続されている。



ゼブラフィッシュの後脳脊髓路とマウスナー細胞



キンギョの逃避運動(左)を引き起こすマウスナー回路(右)

(出典：小田 洋一、脳のセグメント構造に見られるパラレルプロセッシング。

「さがけ研究 21」研究報告会 「形とはたらき」領域 講演要旨集
(研究期間：1999-2002)、2002. p.15 - 23.)

ここで、注目すべきことは、神経が脊髄に入る直前に左右で交差していることである。これによって、上図のように、左側で強い視覚・聴覚（圧力）を受けると、この信号が左側のマウスナー細胞にただちに伝達され、ここから発信（トリガー）された信号が交差した脊椎神経を通して、右側の胴筋を収縮させる。魚の逃避のメカニズムはこうした神経回路によって達成されている。

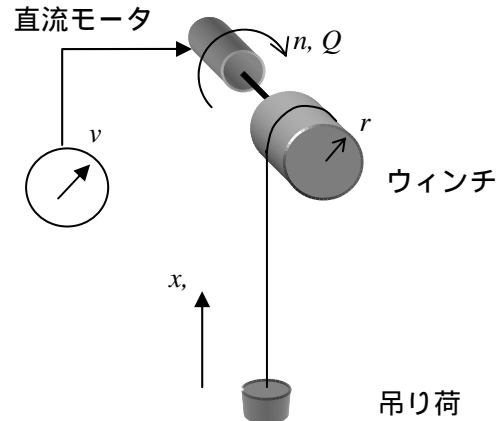
因みに、人間を含む脊椎動物において、脊髄の神経が左右で交差し、入れ替わっているのは、こうした逃避行動が元になっていると推測される。

しかし、この逃避行動が過剰な場合、別の神経で反対側の神経を使って抑制するという回路も存在する。これがフィードバックによる抑制である。あるいは、魚は補食する場合は敵に立ち向かう必要もあるから、反対側のマウスナー細胞を刺激することも必要になる。これがフィードフォワード抑制であり、学習によって上手く制御されている。

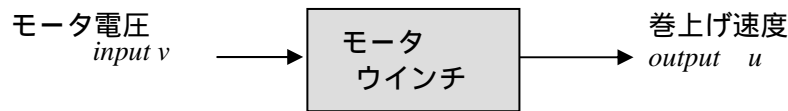
3.3 制御の例

簡単な制御を行う場合を例にとって、その具体的システムを考えてみよう。

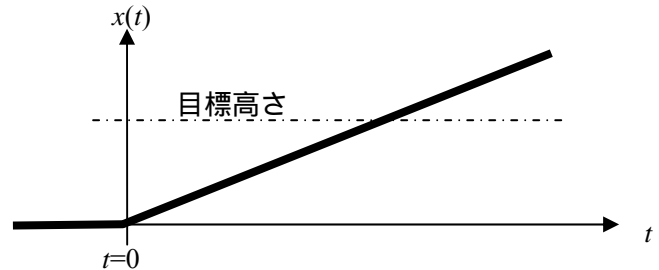
モータでウインチを巻き上げ、巻き降ろす場合を例にとって考えてみよう。ウインチのロープの先端には吊り荷がある。



モータに加える電圧を v とすると、この電圧に比例してモータの回転数 n になるとすると、吊り荷の巻き上げ速度はモータ電圧に比例する。この関係は下図のように表せる。



モータ電圧 v を一定とすると、巻き上げ速度も一定になり、吊り荷の位置は左図のように変化する。



ここで、吊り荷をある目標の高さまで吊り上げる場合を考えてみよう。

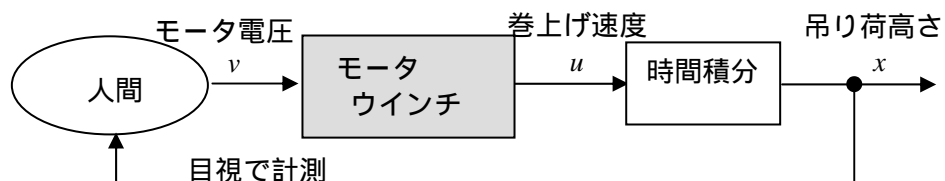
そのためには、次のことが必要になる。

- モータに電圧を与えウインチを起動する。
- 吊り荷の位置 x が目標高さになれば、電圧を零にし、ウインチを停止する。

1) 手動制御の場合

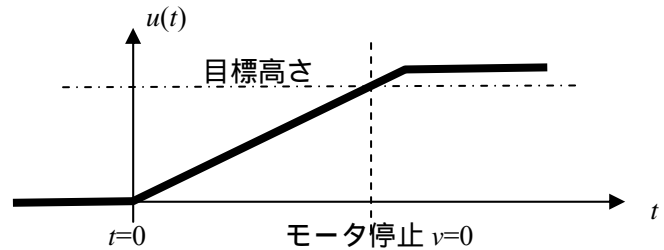
- (1) 人が「実際の吊り荷の高さ」と「目標高さ」の差を目視し、スイッチでモータ電圧を与えてウインチを起動する。その際、「現在の吊り荷の高さ」と「目標高さ」の差が十分あれば、モータ電圧を上げてウインチの回転数を速くして、短時間で巻き上げるかもしれない。
- (2) 「実際の吊り荷の高さ」が「目標高さ」に近づくと、モータ電圧を下げて、ウインチの回転数を遅くし、「目標高さ」になる直前にモータ電圧を零にして、ウインチを停止する。
- (3) ウインチを停止した時に、「目標高さ」に達していなければ、モータ電圧を最小にしてウインチを微動に巻き上げ、「目標高さ」に近づける。
逆に、「目標高さ」を行き過ぎた場合は、モータ電圧を逆にして、ウインチを微動に巻き下ろし、「目標高さ」に近づける。

この場合の制御を図にすると、下図のようになる。

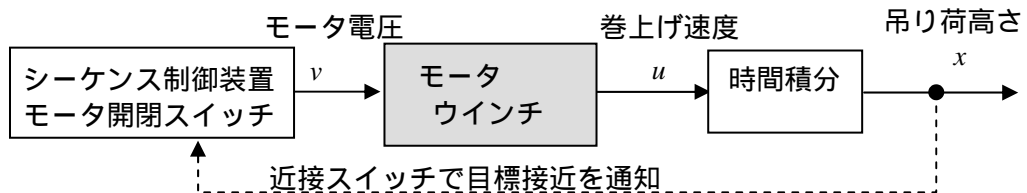


2.) シーケンス制御の場合

- (1) 「目標高さ」が「巻き上げ」の方向か「巻下ろし」の方向を機械的・電氣的に判断し、モータ電圧を与えてウインチを一定速度で起動する。
- (2) 「現在の吊り荷の高さ」が「目標高さ」に近づくと、あらかじめ設けられたスイッチが作動し、モータ電圧を零にして、ウインチを停止する。
- (3) モータ電圧を零にしても、モータ、ウインチ、また吊り荷には慣性があるので、ウインチは直ぐには止まらない。右図のように目標の位置を通り過ぎてウインチが止まることになるので、この行き過ぎ量を予め求めておき、近接スイッチを設置する。したがってウインチが「目標高さ」に達するか否かは、この近接スイッチの設置場所に依存する。(旧式のエレベータはこの制御方法が多い。)

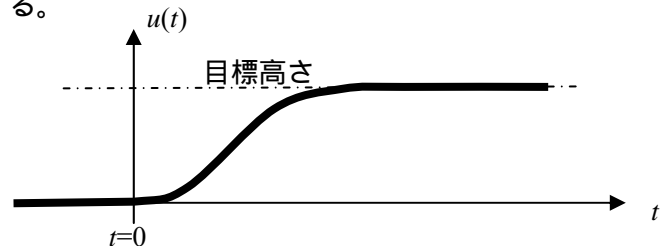


この場合の制御を図にすると、下図のようになる。

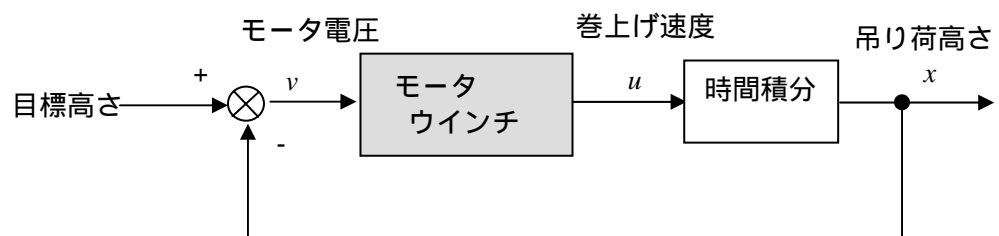


3.) フィードバック制御の場合

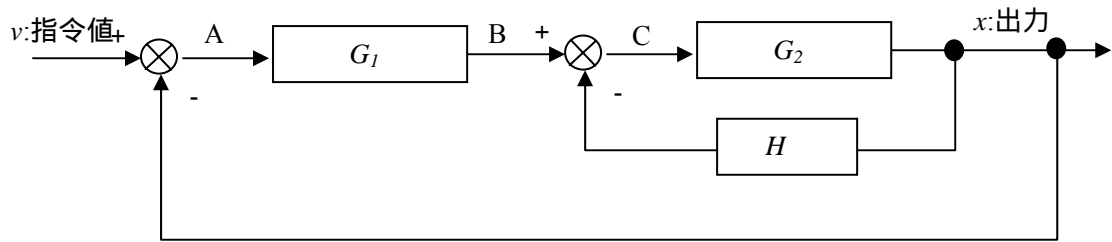
- (1) 「目標高さ」と「実際の吊り荷の高さ」との差を常に電氣的または機械的に計測し、この差が零になるよう連続的あるいは断続的に制御する。したがって、「吊り荷の高さ」は最終的に目標値に一致して自動的に停止する。



この場合の制御を図にすると、下図のようになる。



< 多重にフィードバックを持つ場合 >



上図のブロック線図において、

$$G_1 \text{ の入力は } A = v - x$$

$$G_1 \text{ の出力は } B = G_1 A = G_1 (v - x)$$

$$G_2 \text{ の入力は } C = B - Hx = G_1 (v - x) - Hx$$

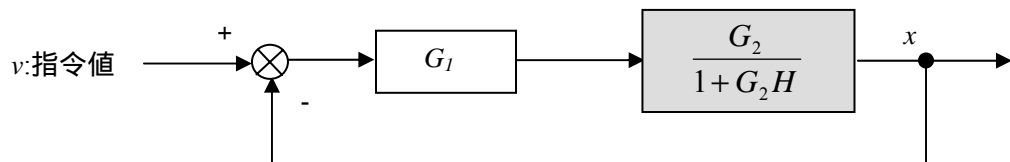
$$G_2 \text{ の出力は } G_2 C = G_2 \{ G_1 (v - x) - Hx \} = x$$

$$\text{上式から、 } x(1 + G_1 H + G_1 G_2) = G_1 G_2 v$$

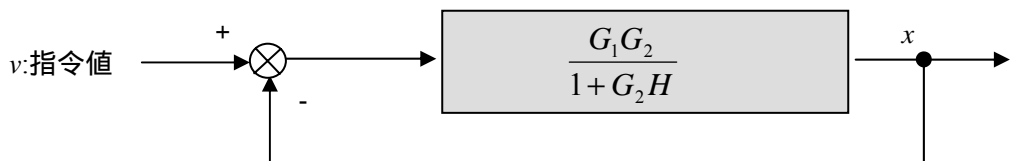
$$\text{すなわち、 } x = \frac{G_1 G_2}{(1 + G_1 H + G_1 G_2)} v \quad (3.3)$$

となる。

また、別の方法として、問題のフィードバックシステムは、(3.2)式を用いると、以下のよう
に描き直すことができる。



更にまた次のように描き直せる。



このブロック線図に(3.2)式を適用すると

$$x = \frac{\frac{G_1 G_2}{1 + G_2 H}}{1 + \left(\frac{G_1 G_2}{1 + G_2 H} \right)} v$$

$$\text{すなわち、 } x = \frac{G_1 G_2}{1 + G_2 H + G_1 G_2} v$$

となる。

4. 制御要素の特性と表現

システムが入力に対して思うような結果（応答:response）になっているか、あるいはシステムが安定に動くかどうかを検討し、制御システムを設計する場合、制御対象やフィードバックを数式で表現することが不可欠になる。使用する数式の取り扱いは制御対象によって異なってくる。

対象	数式
・ 物体の運動 (船・航空機・機械全般)	運動方程式
・ 物体の歪み・振動 (構造物・部材)	弾性方程式
・ 電気回路 (電気電子機器)	電流方程式
・ その他の現象	適切な記述モデル

漁業機械や漁船の制御といった場合、制御対象はこうした運動であり、記述モデルには通常、運動方程式が使われる。

4.1 運動方程式とその解法

制御対象となる多くの機械の運動は「光速」に比べて非常に遅い運動であり、ニュートンの古典力学の範囲で十分記述できる。またほとんどの場合、物体の変形を考える必要がないので、物体の質量を重心(center of gravity)で代表させた質点系の力学で表される。

ニュートンの法則	
直線運動：	(質量) × (加速度) = (作用する力)
回転運動：	(慣性モーメント) × (角加速度) = (作用するモーメント)

座標系（原点と軸の方向）は取り扱い易いように自由に決めてよいが、これを明確にすることが重要。また、力も運動の方向と同じ向きを+側にとる。

以下では、海洋の浮体（ブイ）を例に運動力学と波に対する応答を考えてみよう。

1) 静的な釣り合い

下図のように、水線面積 A_w を持つ柱状の浮体が水面に浮かんでいる場合を考えよう。浮体の重心と浮心が鉛直方向に上下方向に一致している場合、上下方向だけの釣り合いになる。浮体が静止している状態では、浮体の重力 W と浮力が釣り合っているため、以下の関係にある。

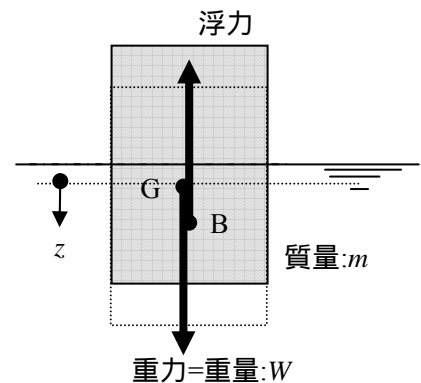
$$W = mg = \rho g A_w d \quad (4.1)$$

すなわち、浮体の質量 m は $\rho A_w d$ と表され、これが浮体の排水量（排除する水の質量）になり、 $A_w d$ が排水容積(=)である。

ここで、浮体が z だけ沈下した場合を想定すると、浮体の喫水は z 増加するので、浮力は

$$F = \rho g A_w (d + z) \quad (4.2)$$

となり、浮力の増分は $\rho g A_w z$ になる。



したがって、この浮体に Δm の荷物(質量)を搭載した場合、喫水の増加は次式で表され、この増加は水の密度と水線面積 A_w の値だけで決まる。

$$\begin{aligned}\Delta W &= \Delta mg = \rho g A_w z \\ z &= \frac{\Delta m}{\rho A_w}\end{aligned}\tag{4.3}$$

2) 初期状態からの運動

浮体の重心を原点、下方に z 軸をとる。浮体の運動はニュートンの運動方程式を使うが、浮体に働く上下力は、浮体が座標軸の方向(下方側)に運動[変位 z ,速度 (dz/dt) ,加速度 (d^2z/dt^2)]する状況を考える。すなわち、

浮体の重力：質量が変化しないので一定で、(4.1)式より $W = mg = \rho g A_w d$ ある。
 浮体の浮力：(4.2)式より $F = \rho g A_w (d + z)$

したがって

$$m \left(\frac{d^2 z}{dt^2} \right) = W - F = \rho g A_w - \rho g A_w \cdot (d + z)$$

すなわち、

$$m \left(\frac{d^2 z}{dt^2} \right) + \rho g A_w \cdot z = 0\tag{4.4}$$

これを、初期値 $z=z_0$ からの運動を計算するには、(4.4)式を Laplace 変換で解法する。すなわち、

$$\mathcal{L} \left(\frac{d^2 z}{dt^2} \right) = s^2 \mathcal{L} z - s z_0$$

であるから、

$$(ms^2 \mathcal{L} z - s z_0) + \rho g A_w \mathcal{L} z = 0$$

これより、

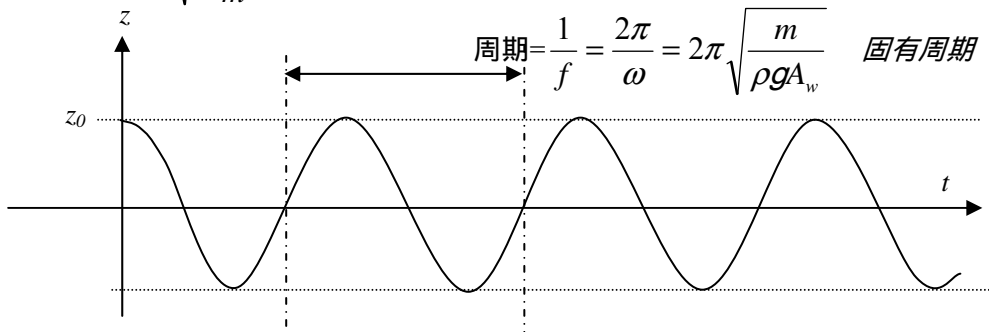
$$(ms^2 + \rho g A_w) \mathcal{L} z - ms z_0 = 0$$

すなわち、

$$\mathcal{L} z = \frac{ms z_0}{ms^2 + \rho g A_w} = z_0 \frac{s}{s^2 + (\rho g A_w / m)} = z_0 \frac{s}{s^2 + \left(\sqrt{\rho g A_w / m} \right)^2}$$

これを逆変換()を使用すると、

$$z = z_0 \cos \sqrt{\frac{\rho g A_w}{m}} t\tag{4.5}$$



【復習】 Laplace 変換による微分方程式の解法

ここでは, Laplace 変換 (片側 Laplace 変換) について要点を説明する。この方法を用いると, 次の利点がある。

- i) 複雑な微分方程式を簡単な代数方程式として取り扱える。
- ii) 応答の伝達表現が容易なこと。

Laplace 変換を実用面から一言でいえば, 時間領域の現象を s という複素平面への変換操作であり, Fourier 変換の積分区間を時間 $t \geq 0, s = -i\omega$ としたものである。

$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$ <p>Laplace 変換 :</p> $= \mathcal{L}f(t)$	----- (4a)
---	------------

Laplace 変換のメリット

- i) 複雑な微分方程式 (運動方程式, 電流方程式...) が簡単な代数方程式に置き換えられる。

$$\mathcal{L}\left(\frac{df(t)}{dt}\right) = s \mathcal{L}f(t) - f(0)$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{d^2 f(t)}{dt^2}\right) = s^2 \mathcal{L}f(t) - sf(0) - \left.\frac{df(t)}{dt}\right|_{t=0}$$

$$= s\{s \mathcal{L}f(t) - f(0)\} - \left.\frac{df(t)}{dt}\right|_{t=0}$$

$$= s^2 \mathcal{L}f(t) - sf(0) - \left.\frac{df(t)}{dt}\right|_{t=0}$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{d^3 f(t)}{dt^3}\right) = s^3 \mathcal{L}f(t) - s^2 f(0) - s \left.\frac{df(t)}{dt}\right|_{t=0} - \left.\frac{d^2 f(t)}{dt^2}\right|_{t=0}$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right) = s^n \mathcal{L}f(t) - \sum_{i=1}^n s^{(n-i)} \left.\frac{d^{(i-1)} f(t)}{dt^{(i-1)}}\right|_{t=0} \quad \text{----- (4b)}$$

ここで初期値が零の場合, 上式はいずれも第 1 項のみとなり, 極めて簡単になる。

- ii) 線形性が保たれる。

$$\mathcal{L}(a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)) = a_1 \mathcal{L}f_1(t) + a_2 \mathcal{L}f_2(t) \quad \text{----- (4c)}$$

Laplace 変換の例 (重要な式)

$f(t)$		↔	$\mathcal{L}f(t)$	
1	$e^{-\alpha t}$		$\frac{1}{s}$	$\frac{1}{s+\alpha}$
t	$e^{-\alpha t} t$		$\frac{1}{s^2}$	$\frac{1}{(s+\alpha)^2}$
$t^{(n-1)}/(n-1)!$	$e^{-\alpha t} t^{(n-1)}/(n-1)!$		$\frac{1}{s^n}$	$\frac{1}{(s+\alpha)^n}$
$\sin \beta t$	$e^{-\alpha t} \sin \beta t$		$\frac{\beta}{s^2 + \beta^2}$	$\frac{\beta}{(s+\alpha)^2 + \beta^2}$
$\cos \beta t$	$e^{-\alpha t} \cos \beta t$		$\frac{s}{s^2 + \beta^2}$	$\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2 + \beta^2}$

3) 入力に対する応答

浮体が z 降下し、かつ水面が η 下がったと状態を考えると、排水容積は $A_w(d+z-\eta)$ と浮力は次式となる。

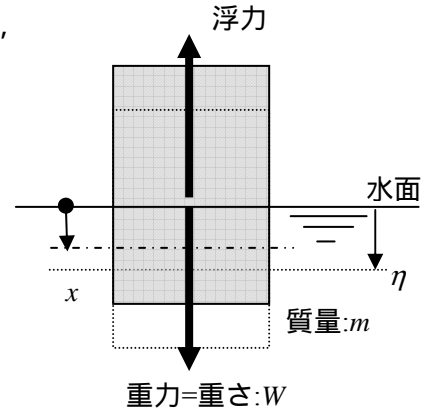
$$F = \rho g A_w \cdot (d + z - \eta) \quad (4.6)$$

したがって、浮体の運動方程式は次式で書き表される。

$$m \left(\frac{d^2 z}{dt^2} \right) = W - F = \rho g A_w - \rho g A_w \cdot (d + z - \eta)$$

すなわち、

$$m \left(\frac{d^2 z}{dt^2} \right) + \rho g A_w \cdot z = \rho g A_w \cdot \eta \quad (4.7)$$



ここで、 $t=0$ で水面が急激に a_0 下がった場合について解いてみよう。上記の (4.7) 式を Laplace 変換すると、

$$ms^2 \mathcal{L} z + \rho g A_w \mathcal{L} z = \rho g A_w \mathcal{L} \eta$$

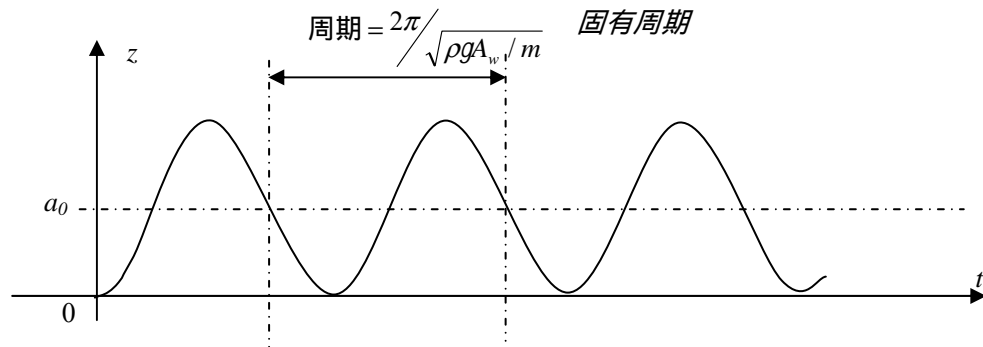
すなわち、

$$(ms^2 + \rho g A_w) \mathcal{L} z = \rho g A_w \left(\frac{a_0}{s} \right)$$

これより、

$$\mathcal{L} z = \frac{\rho g A_w a_0}{s(ms^2 + \rho g A_w)} = a_0 \left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + (\sqrt{\rho g A_w / m})^2} \right) \quad (4.8)$$

これを逆変換 () すると、 $z = a_0 \left(1 - \cos \left(\sqrt{\frac{\rho g A_w}{m}} t \right) \right)$ となり、浮体の時々刻々の運動が求まる。



【Laplace 逆変換のポイント】 (部分分数へ変換)

逆変換するに際しては前述の基本型が使えるように Laplace 変換式を上手く変形する。

[例 1] $\frac{\kappa_1 s + \kappa_2}{(s + \alpha_1)(s + \alpha_2)} = \frac{a_1}{s + \alpha_1} + \frac{a_2}{s + \alpha_2}$

[例 2] $\frac{\kappa_2 s^2 + \kappa_1 s + \kappa_0}{(s^2 + \beta^2)(s + \alpha)} = \frac{b_1 s + a_1}{s^2 + \beta^2} + \frac{a_2}{s + \alpha}$

[例 3] $\frac{\kappa_3 s^3 + \kappa_2 s^2 + \kappa_1 s + \kappa_0}{(s^2 + \beta_1^2)(s^2 + \beta_2^2)} = \frac{b_1 s + a_1}{s^2 + \beta_1^2} + \frac{b_2 s + a_2}{s^2 + \beta_2^2}$

【補足】浮体の運動に対する抵抗

浮力による復原力によって浮体が周期的に運動することを示したが、流体中を浮体が運動すると、浮体はこの運動を止める方向に様々な力（抵抗）を流体から受ける。このため、浮体の運動もまた変わってくる。

a) 浮体の加速度に依存する抵抗(加速抵抗もしくは付加質量)

流体中を物体が運動すると、この運動が流体にエネルギーや力を与えるので、その運動を止める方向に抵抗が流体から作用する。この内、物体が運動する加速度に比例した抵抗について考えよう。この抵抗係数を仮に a とすると、(5.7)式の上下運動の場合、次式となる。

$$m \left(\frac{d^2 z}{dt^2} \right) = \rho g A_w \cdot (\eta - z) - a \left(\frac{d^2 z}{dt^2} \right)$$

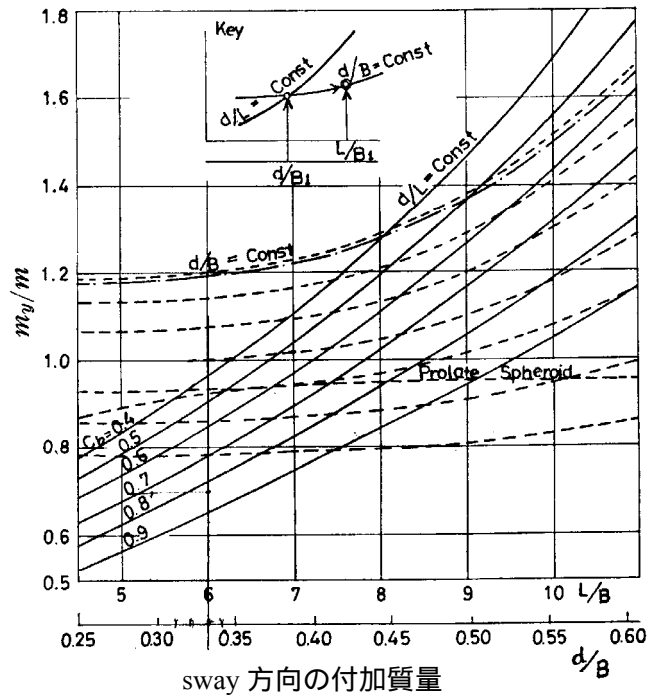
すなわち、

$$(m + a) \left(\frac{d^2 z}{dt^2} \right) + \rho g A_w z = \rho g A_w \eta \quad (4.9)$$

この抵抗は流体中の浮体の質量があたかも $(m+a)$ と増加したようになるので、この係数 a のことを付加質量と言ひ、上下運動の場合は $a=m_z$ と記載し、 $(m+m_z)$ を見掛け質量と呼ばれる。

これは運動学的には物体の質量が増加した形となっており、流体の一部が物体に付着したようにも理解できるが、流体力学的には正しくなく、あくまで物体に加速抵抗が作用した結果であることに留意する必要がある。

付加質量の大きさは、浮体の形状や運動方向によって大幅に異なることが知られており、細長い船の横運動(sway)や上下運動(heave)では船の質量に匹敵するオーダーになる。この付加質量の大きさは船の要目によって異なり、 L_{pp}/B 、 C_b 、 B/d 等をパラメータにして表すことができ、一例として船の横運動(sway)の付加質量の大きさを右図の元良チャートに示す。



b) 浮体の速度に依存する抵抗

次に物体が運動する速度に依存する抵抗について考えよう。既に概略示したように、流体中の物体には抗力（抵抗）や揚力が働く。これらの力は相対速度の二乗に比例するが、揚力は相対流入角度にも比例する。航走する方向と直角に sway あるいは heave の速度がある場合、速度ベクトルの向きはこれらの速度に比例して変化するから、sway あるいは heave 速度に比例した力（揚力）が発生する。また、浮体の上下運動により上下速度に比例した抵抗も発生する。

初期位置が z_0 の上下運動

$$m \left(\frac{d^2 z}{dt^2} \right) = \rho g A_w (\eta - z) - m_z \left(\frac{d^2 z}{dt^2} \right) - c \left(\frac{dz}{dt} \right)$$

すなわち，

$$(m+m_z)\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)+c\left(\frac{dz}{dt}\right)+\rho g A_w \cdot z=\rho g A_w \cdot \eta \quad (4.10)$$

ここで水面の変化が無い ($\eta=0$) として上式を Laplace 変換すると，

$$(m+m_z)(s^2 \mathcal{L} z - z_0 s) + c(s \mathcal{L} z) + \rho g A_w \mathcal{L} z = 0$$

すなわち，

$$\{(m+m_z)s^2 + cs + \rho g A_w\} \mathcal{L} z - z_0 \{(m+m_z)s + c\} = 0 \quad (4.11)$$

これより，

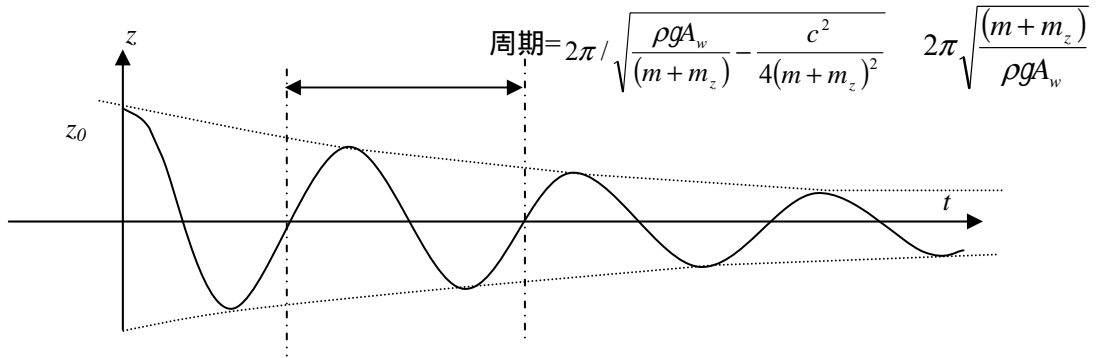
$$\begin{aligned} \mathcal{L} z &= \frac{z_0 \{(m+m_z)s + c\}}{(m+m_z)s^2 + cs + \rho g A_w} = \frac{z_0 [s + 2\{c/2(m+m_z)\}]}{s^2 + 2\{c/2(m+m_z)\}s + \rho g A_w / (m+m_z)} \\ &= \frac{z_0 [s + \{c/2(m+m_z)\}] + z_0 \{c/2(m+m_z)\}}{[s + \{c/2(m+m_z)\}]^2 + \left\{ \sqrt{\rho g A_w / (m+m_z)} - c^2 / 4(m+m_z)^2 \right\}^2} \\ &= z_0 \frac{[s + \{c/2(m+m_z)\}] + \frac{c/2(m+m_z)}{\sqrt{\rho g A_w / (m+m_z)} - c^2 / 4(m+m_z)^2} \sqrt{\rho g A_w / (m+m_z)} - c^2 / 4(m+m_z)^2}{[s + \{c/2(m+m_z)\}]^2 + \left\{ \sqrt{\rho g A_w / (m+m_z)} - c^2 / 4(m+m_z)^2 \right\}^2} \end{aligned} \quad (4.12)$$

これを逆変換 () すると，

$$\begin{aligned} z &= z_0 e^{-\left(\frac{c}{2(m+m_z)}\right)t} \cos\left(\sqrt{\frac{\rho g A_w}{(m+m_z)} - \frac{c^2}{4(m+m_z)^2}} t\right) \\ &+ z_0 \left(\frac{c}{2(m+m_z) \sqrt{\frac{\rho g A_w}{(m+m_z)} - \frac{c^2}{4(m+m_z)^2}}} \right) e^{-\left(\frac{c}{2(m+m_z)}\right)t} \sin\left(\sqrt{\frac{\rho g A_w}{(m+m_z)} - \frac{c^2}{4(m+m_z)^2}} t\right) \end{aligned} \quad (4.13)$$

また，抵抗係数 c が小さい場合は，近似的に次式となる。

$$z = z_0 e^{-\left(\frac{c}{2(m+m_z)}\right)t} \cos\left(\sqrt{\frac{\rho g A_w}{(m+m_z)} - \frac{c^2}{4(m+m_z)^2}} t\right) \quad (4.14)$$



4.2 制御要素の記述

1) 伝達関数

Laplace 変換を用いると複雑な微分方程式が通常の代数方程式のように解け、時々刻々の運動が計算できることがわかった。次には、これをブロック線図で表現することを考える。そのために、先に説明したブロック線図を時々刻々の時間軸変数ではなく、Laplace 変換した空間（一種の周波数空間）に置き換えて考える。ただし、ここで初期値は零とする。

例えば例題のブイの運動において、抵抗を考えない場合の運動方程式は(4.10)式より、

$$m \left(\frac{d^2 z}{dt^2} \right) + \rho g A_w \cdot z = \rho g A_w \cdot \eta$$

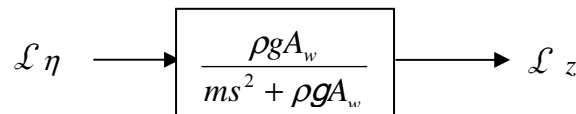
この Laplace 変換は、

$$(ms^2 + \rho g A_w) \mathcal{L} z = \rho g A_w \mathcal{L} \eta \quad (4.15)$$

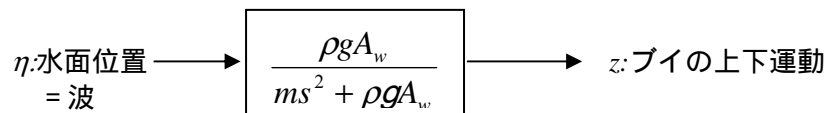
したがって、この(4.15)式から Laplace 変換における入力(水面)と出力(浮体の運動)の関係は、

$$\frac{\mathcal{L} z}{\mathcal{L} \eta} = \left(\frac{\rho g A_w}{ms^2 + \rho g A_w} \right) \quad (4.16)$$

と表される。これをこれを伝達関数と呼ぶ。ブロック線図に表現すると、



さらに、便宜的に Laplace 変換記号を省略して、



と表現する。

2) 伝達関数の性質

(1) インパルス応答(impulse response)

上図あるいは、(4.16)式で $\mathcal{L} \eta$ が1の場合、この出力は $\mathcal{L} z$ は制御対象を記述した Laplace 変換そのものになることがわかる。このような入力が存在するだろうか？ Laplace 逆変換の公式は、

$$\text{Laplace 逆変換: } f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} F(s) e^{+st} ds = \mathcal{L}^{-1} F(s) \quad (4.17)$$

$$\text{Fourier 逆変換: } f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{+i\omega t} d\omega \quad (4.18)$$

$$e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t$$

$$\omega = 2\pi f$$

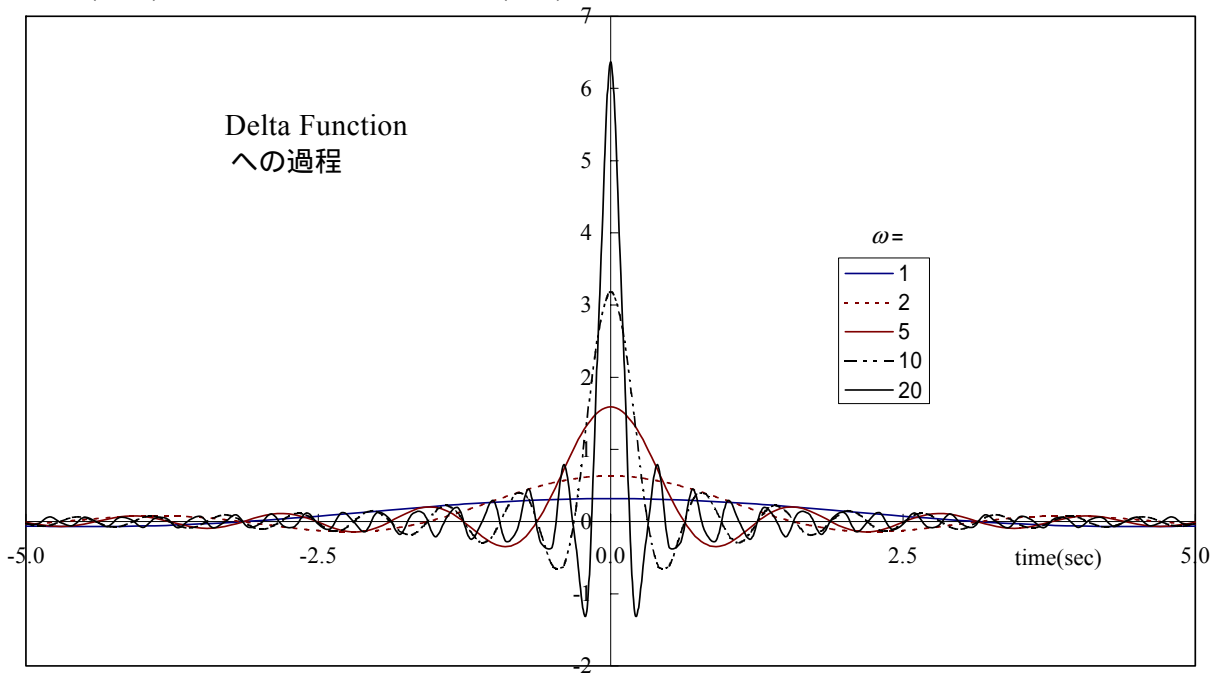
$$f: \text{周波数(Hz)}$$

これより、 $F(s)=1$ となる関数 $= \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{+st} ds = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{+i\omega t} d\omega$ (4.19)

上式を展開すると、

$$= \frac{1}{\pi} \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin \omega t}{t} \right) = \begin{cases} +\infty & (t=0) \\ 0 & (t \neq 0) \end{cases} \quad (4.20)$$

これは、ディラクのデルタ関数(Dirac's delta Function, or Impulse Function)と呼ばれ、 $\delta(t)$ と表記される。 $t=0$ では+の値を持つが、時間積分した値(時間軸上の関数の面積)は1.0というインパルス(衝撃)関数である。参考までに、(4.20)式で ω が大きくなる過程の関数形状を下図に示す。



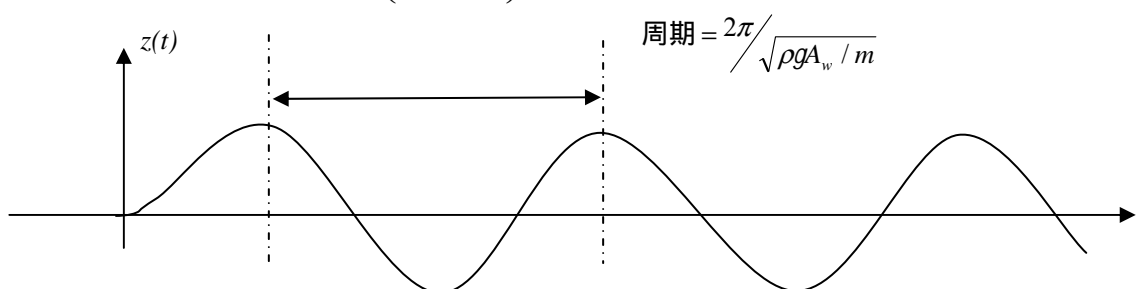
このインパルスに対する応答は $\mathcal{L} \eta=1$ であることから、(4.16)式より、伝達関数そのものとなる。

$$\mathcal{L} z = \left(\frac{\rho g A_w}{ms^2 + \rho g A_w} \right) \quad (4.21)$$

すなわち、
$$\mathcal{L} z = \left\{ \frac{\left(\frac{\rho g A_w}{m} \right)}{s^2 + \left(\frac{\rho g A_w}{m} \right)} \right\} = \sqrt{\frac{\rho g A_w}{m}} \left\{ \frac{\sqrt{\frac{\rho g A_w}{m}}}{s^2 + \left(\sqrt{\frac{\rho g A_w}{m}} \right)^2} \right\}$$

上式を逆変換すると次式となる。

$$z(t) = \sqrt{\frac{\rho g A_w}{m}} \sin \left(\sqrt{\frac{\rho g A_w}{m}} t \right) \quad (4.22)$$



これをインパルスレスポンス(impulse response)と呼ぶ。

(2) ステップ応答(step response)

インパルス応答は、入力の Laplace 変換が 1 ($\mathcal{L}\eta=1$) の場合の応答であった。このディラクのデルタ関数(Dirac's delta Function, or Impulse Function)を時間積分(時間軸上の関数の面積)すると、下図のような単位跳躍関数となる。

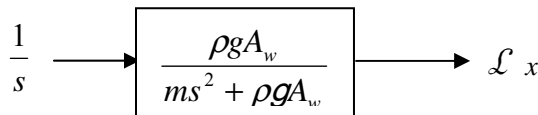
これを単位ステップ関数(unit step function)、あるいは数学では Heaviside 関数と呼ぶ。

この単位ステップ関数の Laplace 変換は既に重要変換例に記載されたように $f(t)=1$ の Laplace 変換と同じ $1/s$ になる(Laplace 変換では $t<0$ を考えないので)。

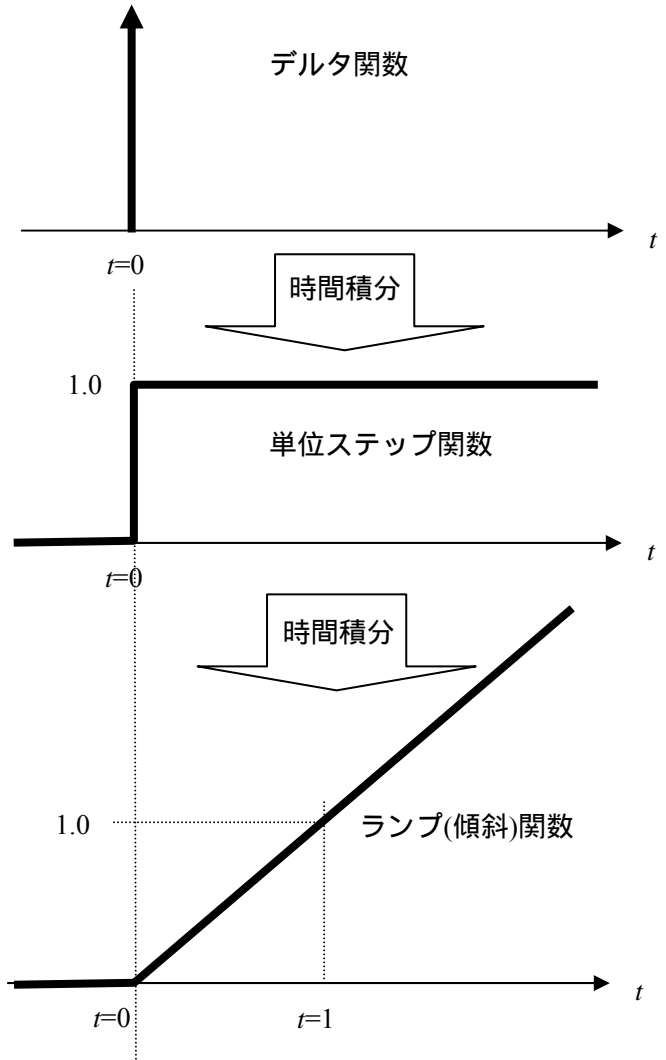
この単位ステップ入力に対する応答(インデンシャル応答とも言う)は(4.16)式から

$$\mathcal{L}z = \left(\frac{\rho g A_w}{ms^2 + \rho g A_w} \right) \left(\frac{1}{s} \right) \quad (4.23)$$

と表される。ブロック線図に表現すると、



水面に浮かんだブイの運動の初期値問題(演習)で水面の上昇を 1.0 とするとこの応答となる。



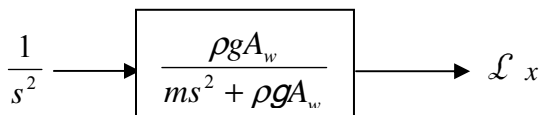
(3) ランプ応答(ramp response)

同様に単位ステップ関数を更に積分すると、左図のようなランプ関数となる。この関数の Laplace 変換は重要変換例に記載されたように $f(t)=t$ の Laplace 変換と同じ $1/s^2$ になる。

この単位ステップ入力に対する応答は

$$\mathcal{L}z = \left(\frac{\rho g A_w}{ms^2 + \rho g A_w} \right) \left(\frac{1}{s^2} \right) \quad (4.24)$$

と表される。ブロック線図に表現すると、



以上述べたインパルス応答、ステップ応答、ランプ応答は制御における代表的な入力波形である。これらの特徴を要約すると、

- インパルス応答 : 伝達関数そのものとして表現できる。
しかし、現実にはこうした入力波形は存在しない。
- 単位ステップ応答 : 現実に存在するので、応答波形から伝達関数を推定(同定)し易い。
- ランプ応答 : より現実に近い入力ですシステム起動時の設計に役立つ。

< 伝達関数とインパルス応答、単位ステップ応答の例 > 演習問題 4 の解答

$$T \left(\frac{dx}{dt} \right) + x = \eta$$

システムの要素が上記の微分方程式で記述されるとき、入力 η する x の応答の伝達関数とインパルス応答、ステップ応答は次のようになる。

初期値が全て零として上式の微分方程式を Laplace 変換すると、

$$s \mathcal{L}x + \mathcal{L}x = \mathcal{L}\eta$$

すなわち、

$$(Ts + 1) \mathcal{L}x = \mathcal{L}\eta$$

よって、入力 η に対する x の応答の伝達関数は、

$$\frac{\mathcal{L}x}{\mathcal{L}\eta} = \frac{1}{Ts + 1}$$

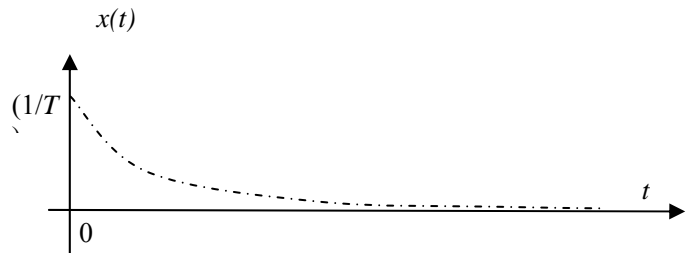
【インパルス応答】

入力 η がインパルスの時、 $\mathcal{L}\eta = 1$ であるから、この時の応答は、

$$\mathcal{L}x = \frac{1}{Ts + 1} = \frac{1/T}{s + 1/T}$$

であるから、上式を Laplace 逆変換すると、

$$x(t) = \left(\frac{1}{T} \right) e^{-\left(\frac{1}{T}\right)t}$$



【単位ステップ応答】

入力 η が単位ステップの時、 $\mathcal{L}\eta = \frac{1}{s}$ であるから、この時の応答は、

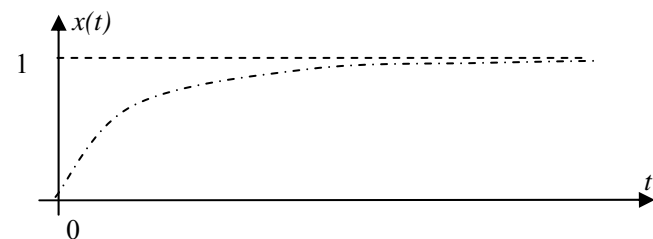
$$\mathcal{L}x = \frac{1}{Ts + 1} \cdot \frac{1}{s}$$

これを部分分数にすると、

$$x = -\frac{T}{Ts + 1} + \frac{1}{s} = -\frac{1}{s + 1/T} + \frac{1}{s}$$

であるから、上式を Laplace 逆変換すると、

$$x(t) = -e^{-\left(\frac{1}{T}\right)t} + 1$$



(4)周波数応答 (frequency response)

ここで、伝達関数に $\eta=\sin\omega t$ という正弦波が入力された場合の応答を考えてみよう。ただし、伝達関数にはブイの運動ではなく、以下の簡単な $\left(\frac{1}{Ts+1}\right)$ を考える。

これは微分方程式で表すと、
$$T\left(\frac{dz}{dt}\right) + z = \eta \tag{4.25}$$

である。このモデルに $\eta=\sin\omega t$ という正弦波が入力された場合、入力の Laplace 変換は $\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$ であるから、この入力に対する応答を Laplace 変換で表すと、

$$\mathcal{L}z = \left(\frac{1}{Ts+1}\right)\left(\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}\right) \tag{4.26}$$

これを部分分数にすると、

$$\begin{aligned} \mathcal{L}z &= \left(\frac{\omega}{T^2\omega^2 + 1}\right)\left\{\frac{T^2}{Ts+1} - \frac{Ts-1}{s^2 + \omega^2}\right\} \\ &= \left(\frac{\omega}{T^2\omega^2 + 1}\right)\left\{\frac{T}{s+1/T} - \frac{Ts}{s^2 + \omega^2} + \left(\frac{1}{\omega}\right)\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}\right\} \end{aligned} \tag{4.27}$$

なんとならば、

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{Ts+1}\right)\left(\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}\right) &= \frac{a}{Ts+1} + \frac{bs+c}{s^2 + \omega^2} \\ &= \frac{a(s^2 + \omega^2) + (bs+c)(Ts+1)}{(Ts+1)(s^2 + \omega^2)} \\ &= \frac{a(s^2 + \omega^2) + (bs+c)(Ts+1)}{(Ts+1)(s^2 + \omega^2)} \\ &= \frac{(a+Tb)s^2 + (b+cT)s + (a\omega^2 + c)}{(Ts+1)(s^2 + \omega^2)} \end{aligned}$$

これより、

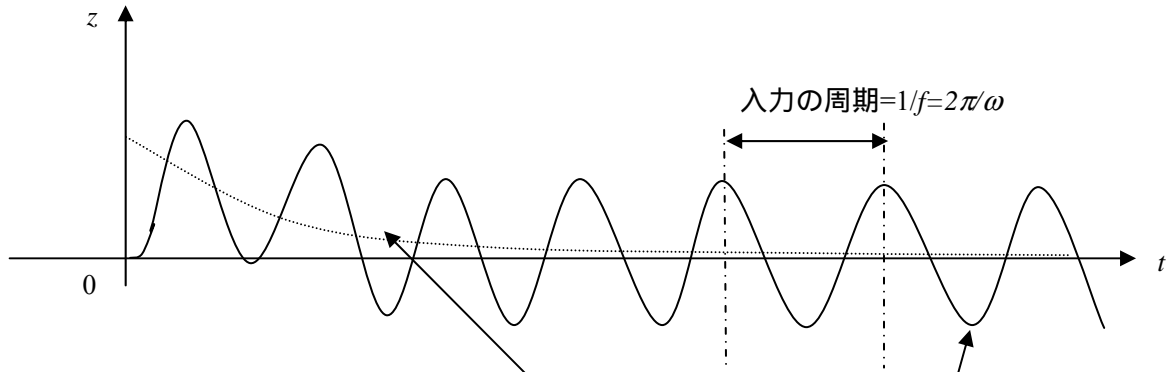
$$a = \frac{\omega T^2}{T^2\omega^2 + 1}, \quad b = \frac{-\omega T}{T^2\omega^2 + 1}, \quad c = \frac{\omega}{T^2\omega^2 + 1}$$

上式を Laplace 逆変換すると

$$\begin{aligned} z(t) &= \frac{\omega}{T^2\omega^2 + 1}\left\{Te^{-\left(\frac{1}{T}\right)t} + \left(\frac{1}{\omega}\right)\sin\omega t - T\cos\omega t\right\} \\ &= \frac{T\omega}{T^2\omega^2 + 1}e^{-\left(\frac{1}{T}\right)t} + \frac{1}{T^2\omega^2 + 1}(\sin\omega t - T\omega\cos\omega t) \\ &= \frac{T\omega}{T^2\omega^2 + 1}e^{-\left(\frac{1}{T}\right)t} + \frac{1}{\sqrt{T^2\omega^2 + 1}}\sin(\omega t + \varepsilon) \end{aligned} \tag{4.28}$$

$$\text{ただし、}\varepsilon = \tan^{-1}(-T\omega) = -\tan^{-1}(T\omega)$$

これが、周期的に変動する入力の場合の時々刻々の応答である。その時間的な変化はおよそ次のようになる。

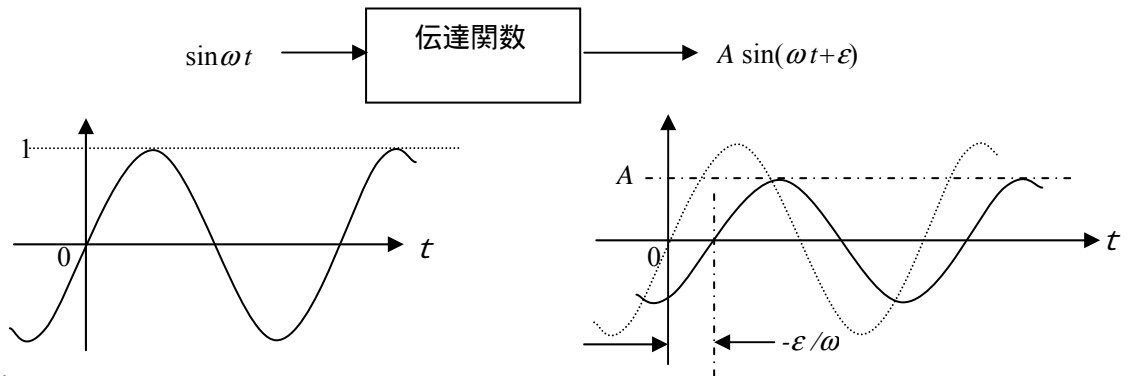


この応答は、時間が十分経つと $e^{-(1/T)t}$ 0 となり、(4.28)式の前項は限りなく小さくなって、後半 $\sin(\omega t + \varepsilon)$ の項だけが残る。

前半の項：過度応答（破線）

後半の項：定常応答（過度応答が無くなった状態の応答）

周波数応答とは正弦波入力に対する要素の応答であるが、上記の定常応答を指している。



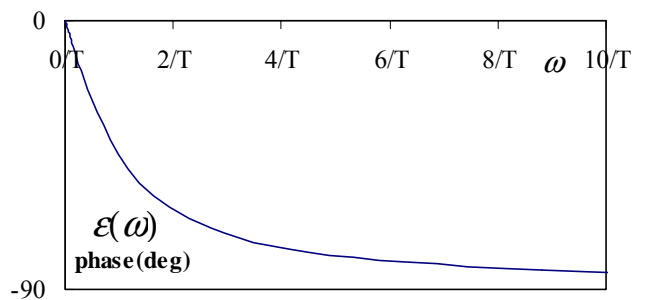
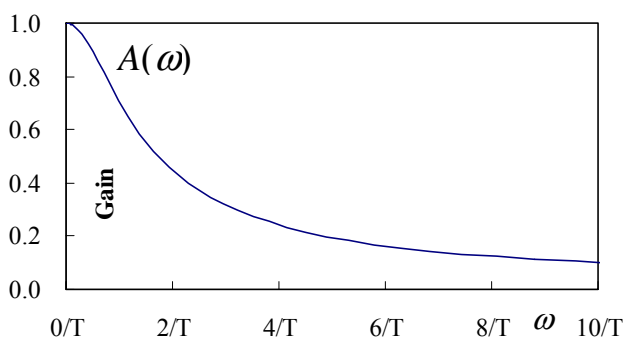
振幅応答 (gain) = A

位相ずれ (phase) = ε (たいていは遅れでマイナス)

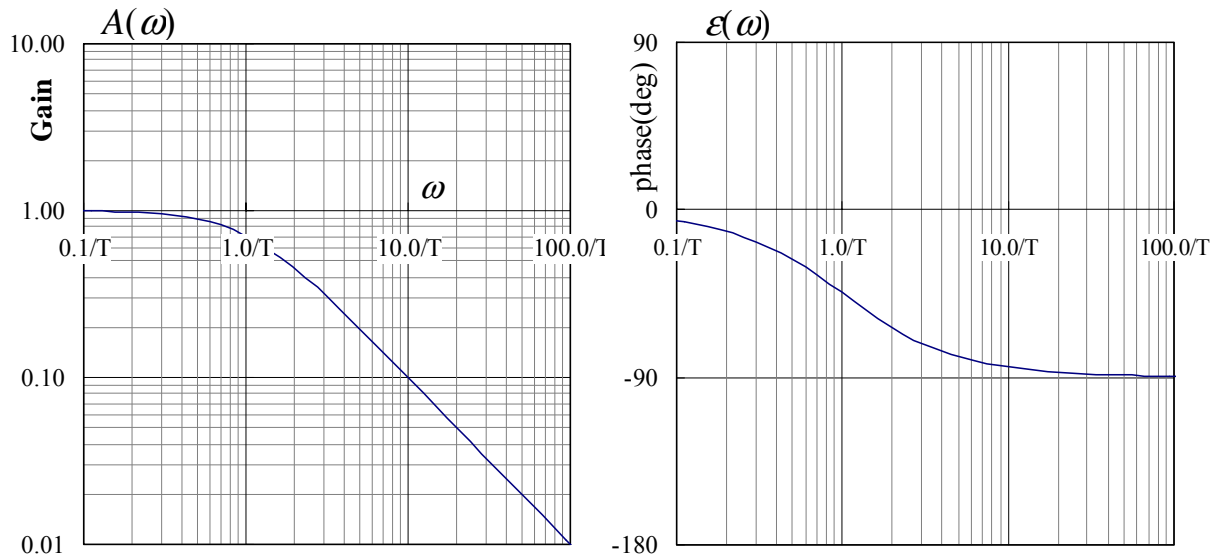
これらは何れも ω (周波数) の関数となる。

したがって、伝達関数 $\left(\frac{K}{Ts+1}\right)$ の周波数応答は(4.27)式から、次式となる。

$$\left. \begin{array}{l} \text{振幅応答 (gain)} \quad A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{T^2 \omega^2 + 1}} \\ \text{位相ずれ (phase)} \quad \varepsilon(\omega) = -\tan^{-1}(T\omega) \end{array} \right\} \quad (4.29)$$



この周波数応答図は、横軸の周波数と振幅応答の大きさを対数スケールで表現することが多く、下図のようになる。〈演習問題の解〉



$\omega \ll 1/T$ では振幅はほぼ 1.0 で、位相のずれもほとんどない。
 $\omega = 1/T$ 付近を境に振幅が変化し、位相のずれが -45° となる。この周波数を固有周波数にという。
 $\omega \gg 1/T$ では位相が -90° となり、振幅も減衰し、10 倍の ω に対して $1/10$ となる。

この周波数応答はもっと簡単な方法で求めることもできる。
 伝達関数の入力 η としてデルタ関数を適用することである。この関数は衝撃関数(impulse)と呼ばれ、Laplace 変換および Fourier 変換の値も 1 になることを示した。すなわち、この関数はあらゆる周波成分を持ち、かつ、どの周波数($\omega = 0 \sim \infty$)においても振幅が 1 で、位相ずれが全くない関数であることを意味している。したがって、(4.25)式を伝達関数の形にしておいて、これを Fourier 変換で表すと、周波数応答関数になる。つまり、Laplace 変換された応答関数を Fourier 変換に変えるには $s = i\omega$ とするだけでよい。

(4.25)式の伝達関数で、 $s = i\omega$ とすると、

$$G(s) = G(j\omega) = \frac{1}{T(i\omega) + 1} = \frac{1}{1 + iT\omega}$$

$$= \frac{(1 - iT\omega)}{(1 + iT\omega)(1 - iT\omega)}$$

〈分母が複素数になると実数と虚数に分けられないので分子分母に共役複素数を乗じる〉

$$= \frac{(1 - iT\omega)}{1 + (T\omega)^2} = \frac{1}{1 + (T\omega)^2} - i \frac{T\omega}{1 + (T\omega)^2}$$

よって、

$$\text{Re}(\omega) = \frac{1}{1 + (T\omega)^2}, \quad \text{Im}(\omega) = -\frac{T\omega}{1 + (T\omega)^2}$$

これより、

$$\left. \begin{aligned} A(\omega) &= \sqrt{\text{Re}^2 + \text{Im}^2} = \frac{1}{\sqrt{T^2\omega^2 + 1}} \\ \varepsilon(\omega) &= \tan^{-1}\left(\frac{\text{Im}}{\text{Re}}\right) = -\tan^{-1}(T\omega) \end{aligned} \right\} \quad (4.30)$$

これらは(4.29)式と全く同じになる。したがって、周波数応答関数は伝達関数において $s = i\omega$ とすることによって容易に求めることができる。

浮体（ブイ）の周波数特性

速度抵抗を含めるた場合の運動方程式は(4.10)式より、

$$m \left(\frac{d^2 z}{dt^2} \right) + c \left(\frac{dz}{dt} \right) + \rho g A_w \cdot z = \rho g A_w \cdot \eta$$

したがって、入力（水面）に対する出力（浮体の運動）の伝達関数は、

$$G(s) = \frac{\mathcal{L} z}{\mathcal{L} \eta} = \frac{\rho g A_w}{ms^2 + cs + \rho g A_w} \equiv \frac{1}{T^2 s^2 + 2T\zeta s + 1} \quad (4.31)$$

ここで $s=i\omega$ とすると

$$G(\omega) = \frac{1}{T^2(i\omega)^2 + 2T\zeta(i\omega) + 1} = \frac{1}{(1 - T^2\omega^2) + i2T\zeta\omega}$$

$$= \frac{\{(1 - T^2\omega^2) - i2T\zeta\omega\}}{\{(1 - T^2\omega^2) + i2T\zeta\omega\}\{(1 - T^2\omega^2) - i2T\zeta\omega\}}$$

< 分母が複素数になると実数と虚数に分けられないので分子分母に共役複素数を乗じる >

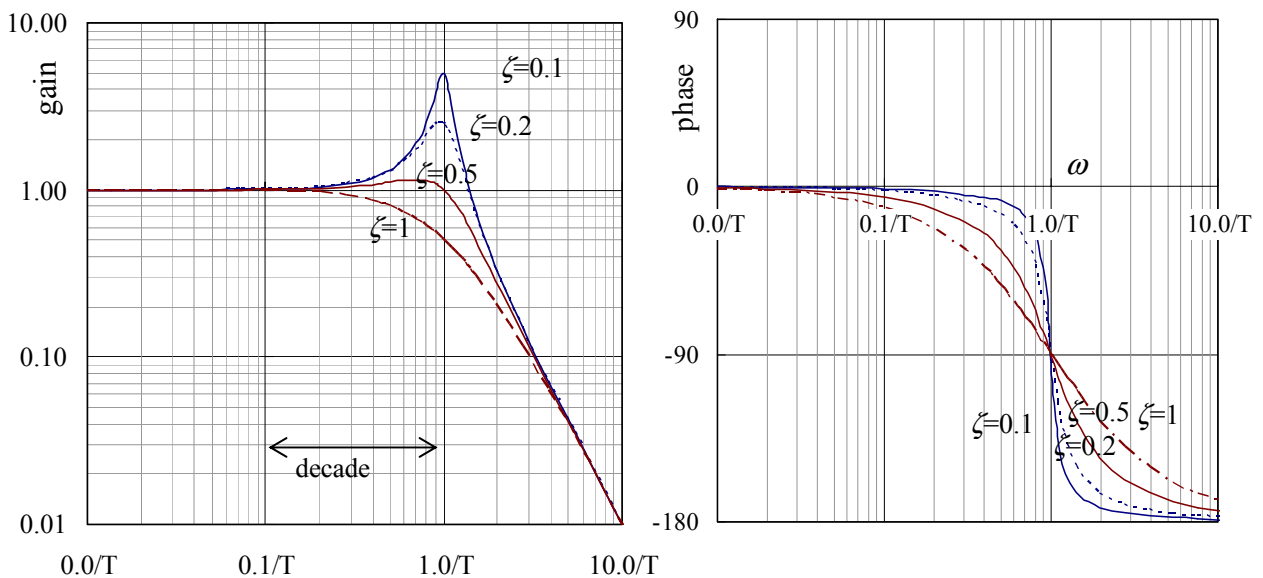
$$= \frac{(1 - T^2\omega^2) - i2T\zeta\omega}{(1 - T^2\omega^2)^2 + (2T\zeta\omega)^2} = \frac{1 - T^2\omega^2}{(1 - T^2\omega^2)^2 + (2T\zeta\omega)^2} - i \frac{2T\zeta\omega}{(1 - T^2\omega^2)^2 + (2T\zeta\omega)^2}$$

したがって、

$$\text{Re}(\omega) = \frac{1 - T^2\omega^2}{(1 - T^2\omega^2)^2 + (2T\zeta\omega)^2}, \quad \text{Im}(\omega) = -\frac{2T\zeta\omega}{(1 - T^2\omega^2)^2 + (2T\zeta\omega)^2}$$

これより、

$$\left. \begin{aligned} A(\omega) &= \sqrt{\text{Re}^2 + \text{Im}^2} = \frac{1}{\sqrt{(1 - T^2\omega^2)^2 + (2T\zeta\omega)^2}} \\ \varepsilon(\omega) &= \tan^{-1} \left(\frac{\text{Im}}{\text{Re}} \right) = -\tan^{-1} \left(\frac{2T\zeta\omega}{1 - T^2\omega^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (4.32)$$



$\omega=1/T$ 付近を境に、振幅が大幅に変化する。

$\omega < 1/T$ では振幅はほぼ 1.0 で、位相のずれはほとんどない。

$\omega=1/T$ では位相のずれが 90° となる。この周波数を固有周波数という。

この付近では位相が急激に変化する他、振幅も抵抗係数 ζ の大きさによって大幅に変化する。

$\omega > 1/T$ では位相が 180° となり、振幅も大幅に減衰し、10 倍の ω に対して $1/100$ となる。

4.3 制御系要素の基本形

基本的な制御系要素の伝達関数を知っていると、複雑なシステムでもそれを要素に分解して考えることにより、比較的容易にシステム全体の特性を把握することができる。以下に最も基本的な制御系要素の伝達関数の例を示す。

1.) 比例要素: $G(s) = K$ [K : 係数(gain)]

ブロック線図での表現



Laplace 変換上での表現式:

$$\mathcal{L} x = K \mathcal{L} v \quad (4.33)$$

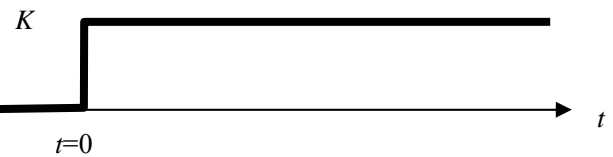
時間軸上の入出力関係式:

$$x(t) = K \cdot v(t) \quad x(t) = K v(t) \quad (4.34)$$

単位ステップ応答の時系列:

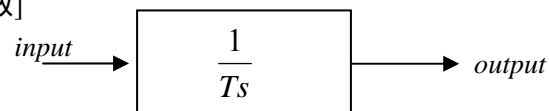
$$x(t) = K \quad (4.35)$$

(時間軸上の変化)



2.) 積分要素: $G(s) = \frac{1}{Ts}$ [$1/T$: 積分定数]

ブロック線図での表現



Laplace 変換上での表現式:

$$\mathcal{L} x = \frac{1}{Ts} \mathcal{L} v \quad (4.36)$$

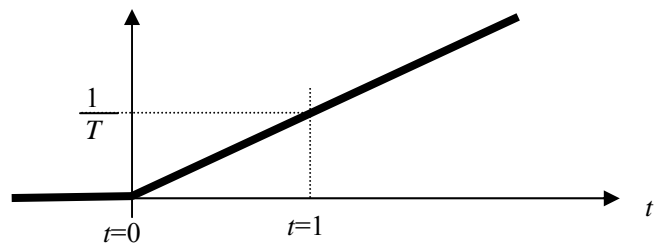
時間軸上の入出力関係式:

$$x(t) = \frac{1}{T} \int_0^t v(t) dt \quad (4.37)$$

単位ステップ応答の時系列:

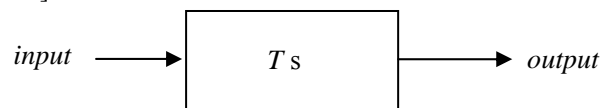
$$x(t) = \frac{1}{T} t \quad (4.38)$$

(時間軸上の変化)



3.) 微分要素: $G(s) = Ts$ [T : 微分定数]

ブロック線図での表現



Laplace 変換上での表現式:

$$\mathcal{L} x = Ts \mathcal{L} v \quad (4.39)$$

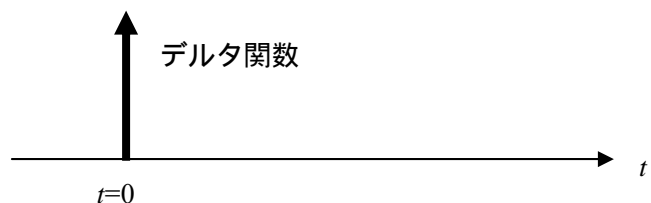
時間軸上の入出力関係式:

$$x(t) = \frac{dv(t)}{dt} \quad (4.40)$$

単位ステップ応答の時系列:

$$x(t) = T \delta(t) \quad (4.41)$$

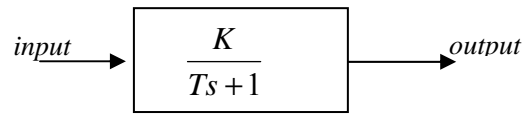
(時間軸上の変化)



4) 一次遅れ要素: $G(s) = \frac{K}{Ts+1}$

[K: 比例定数(gain)、T: 時定数]

ブロック線図での表現



Laplace 変換上での表現式:

$$\mathcal{L}x = \frac{K}{Ts+1} \mathcal{L}v \quad (4.42)$$

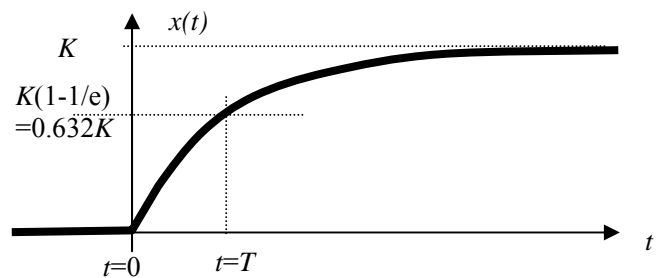
時間軸上の入出力関係式:

$$T \left(\frac{dx(t)}{dt} \right) + x(t) = Kv \quad (4.43)$$

単位ステップ応答の時系列:

$$x(t) = K \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) \quad (4.44)$$

(時間軸上の変化)

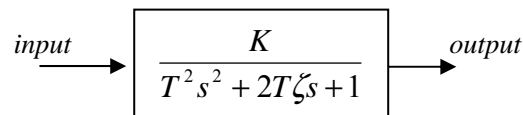


5) 二次遅れ要素: $G(s) = \frac{K}{T^2s^2 + 2T\zeta s + 1}$
 $= \frac{K}{(T_1s+1)(T_2s+1)}$

< $\zeta < 1$ > K: 比例定数(gain)、T: 時定数

< $\zeta > 1$ > K: 比例定数(gain)、 T_1, T_2 : 時定数

ブロック線図での表現



Laplace 変換上での表現式:

$$\mathcal{L}x = \frac{K}{T^2s^2 + 2T\zeta s + 1} \mathcal{L}v \quad (4.45)$$

時間軸上の入出力関係式:

$$T^2 \left(\frac{d^2x(t)}{dt^2} \right) + 2T\zeta \left(\frac{dx(t)}{dt} \right) + x(t) = Kv(t) \quad (4.46)$$

単位ステップ応答の時系列:

(時間軸上の変化)

$$\zeta > 1 \text{ の場合、 } x = K \left\{ - \left(\frac{T_1}{T_1 - T_2} \right) e^{-\left(\frac{1}{T_1}\right)t} - \left(\frac{T_2}{T_2 - T_1} \right) e^{-\left(\frac{1}{T_2}\right)t} + 1 \right\} \quad (4.47)$$

$$\zeta = 1 \text{ の場合、 } x = K \left\{ 1 - e^{-\left(\frac{1}{T}\right)t} \left(1 + \frac{t}{T} \right) \right\} \quad (4.48)$$

$$\zeta < 1 \text{ の場合、 } x = K \left\{ - e^{-\frac{\zeta}{T}t} \cos \left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{T} t \right) - \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\frac{\zeta}{T}t} \sin \left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{T} t \right) + 1 \right\} \quad (4.49)$$

【二次遅れ要素の単位ステップ応答の計算】

$$\mathcal{L}x = \frac{K}{T^2 s^2 + 2T\zeta s + 1} \times \frac{1}{s}$$

ここで、 $T^2 s^2 + 2T\zeta s + 1 = 0$ の根を P_1, P_2 とすると、上式は次式のようになる。

$$\mathcal{L}x = \frac{K}{T^2 (s - P_1)(s - P_2)} \times \frac{1}{s}$$

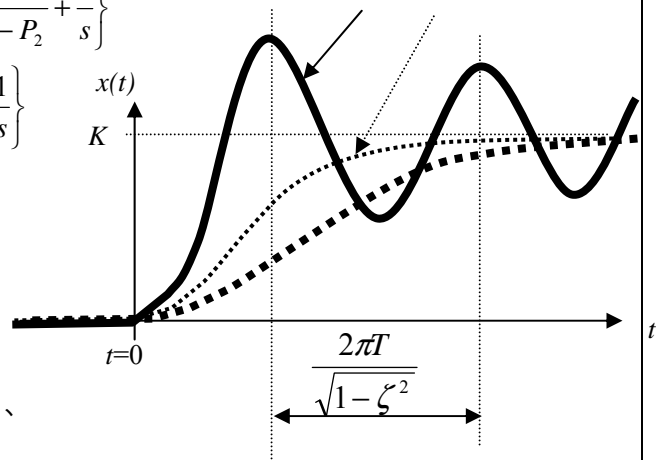
$$\text{ただし、 } P_1, P_2 = \frac{-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}}{T}, \quad (|\zeta| > 1), \quad = \frac{-\zeta \pm i\sqrt{1 - \zeta^2}}{T}, \quad (|\zeta| < 1)$$

これを部分分数に展開すると、 ζ の値にかかわらず $P_1 \times P_2 = \frac{1}{T^2}$ であるから、

$$\begin{aligned} x &= \left(\frac{K}{T^2 P_1 P_2} \right) \left\{ \left(\frac{P_2}{P_1 - P_2} \right) \frac{1}{s - P_1} + \left(\frac{P_1}{P_2 - P_1} \right) \frac{1}{s - P_2} + \frac{1}{s} \right\} \\ &= K \left\{ \left(\frac{P_2}{P_1 - P_2} \right) \frac{1}{s - P_1} + \left(\frac{P_1}{P_2 - P_1} \right) \frac{1}{s - P_2} + \frac{1}{s} \right\} \end{aligned}$$

これを時間軸に逆変換すると、

$$x = K \left\{ \left(\frac{P_2}{P_1 - P_2} \right) e^{P_1 t} + \left(\frac{P_1}{P_2 - P_1} \right) e^{P_2 t} + 1 \right\}$$



$\zeta > 1$ の場合は、 $T_1 = -\frac{1}{P_1}, T_2 = -\frac{1}{P_2}$ であり、

$$x = K \left\{ -\left(\frac{T_1}{T_1 - T_2} \right) e^{-\left(\frac{1}{T_1}\right)t} - \left(\frac{T_2}{T_2 - T_1} \right) e^{-\left(\frac{1}{T_2}\right)t} + 1 \right\} \quad (4.47)$$

$\zeta < 1$ の場合は、

$$\left(\frac{P_2}{P_1 - P_2} \right) = -\frac{1}{2} + \frac{i\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}}, \quad \left(\frac{P_1}{P_2 - P_1} \right) = -\frac{1}{2} - \frac{i\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \quad \text{で、また Euler の公式から}$$

$$e^{P_1 t}, e^{P_2 t} = e^{-\frac{\zeta \pm i\sqrt{1 - \zeta^2}}{T} t} = e^{-\frac{\zeta}{T} t} \left\{ \cos\left(\frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{T} t \right) \pm i \sin\left(\frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{T} t \right) \right\}$$

であるから、虚数部が全て消えて次式となる。

$$x = K \left\{ -e^{-\frac{\zeta}{T} t} \cos\left(\frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{T} t \right) - \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\frac{\zeta}{T} t} \sin\left(\frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{T} t \right) + 1 \right\} \quad (4.49)$$

$\zeta = 1$ の場合は特別な場合で、 $P_1 = P_2$ となって冒頭の逆変換が使えないので、 $T_1, T_2 = T$ より、

$$\mathcal{L}x = \frac{K}{(Ts + 1)^2} \times \frac{1}{s} = K \left\{ \frac{1}{s} - \frac{T}{Ts + 1} - \frac{T}{(Ts + 1)^2} \right\} = K \left\{ \frac{1}{s} - \frac{1}{s + 1/T} - \left(\frac{1}{T} \right) \frac{1}{(s + 1/T)^2} \right\}$$

となり、これを逆変換することによって次式のように計算できる。

$$x = K \left\{ 1 - e^{-\left(\frac{1}{T}\right)t} \left(1 + \frac{t}{T} \right) \right\} \quad (4.48)$$

< 積分・微分要素の周波数応答関数 >

1) 積分要素

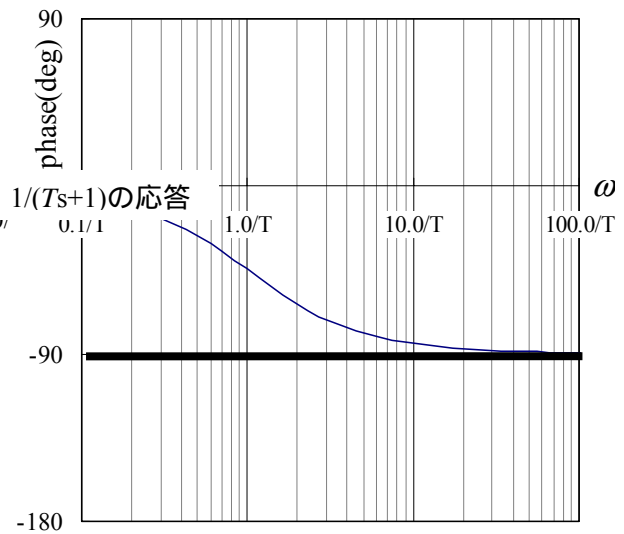
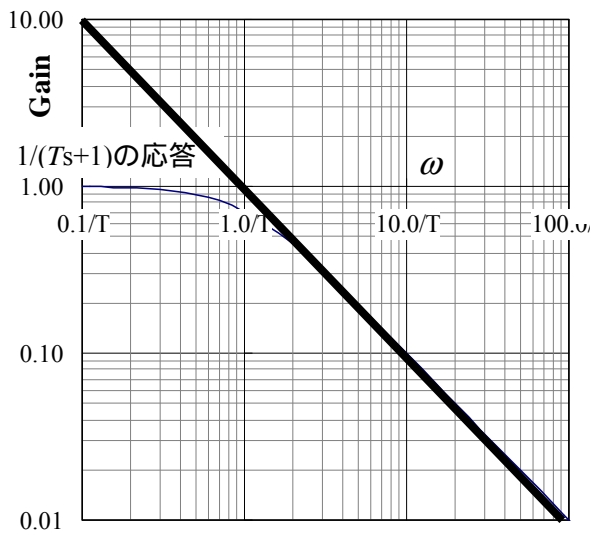
$$F(\omega) = \frac{1}{T(i\omega)} = \frac{(-i)}{T(j\omega)(-i)} = 0 - i \frac{1}{T\omega}$$

$$A(\omega) = \sqrt{\text{Re}^2 + \text{Im}^2} = \frac{1}{T\omega}$$

これより、

$$\phi(\omega) = \tan^{-1}\left(\frac{\text{Im}}{\text{Re}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{-1/T\omega}{0}\right) = \tan^{-1}(-\infty) = -45^\circ$$

積分要素の位相は常に 90° 遅れる。gain は $\omega=1/T$ で 1.0 を通り、10 倍の ω に対して 1/10 となる。



2) 微分要素

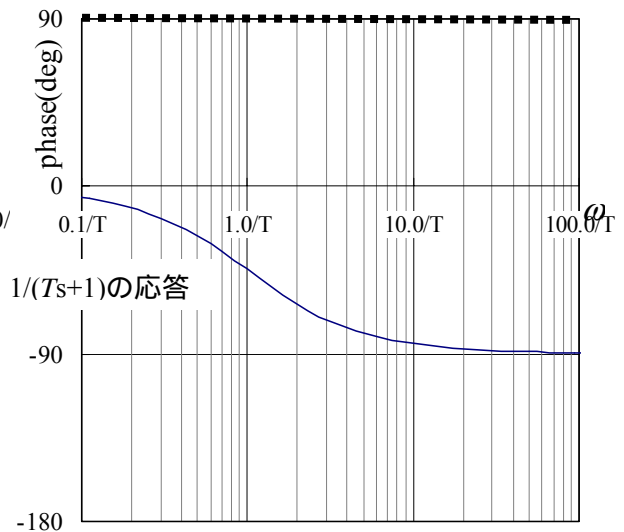
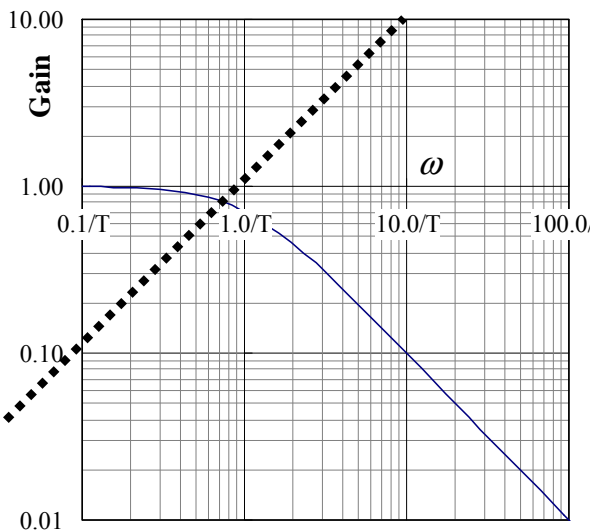
$$F(\omega) = T(i\omega) = 0 + i(T\omega)$$

$$A(\omega) = \sqrt{\text{Re}^2 + \text{Im}^2} = T\omega$$

これより、

$$\phi(\omega) = \tan^{-1}\left(\frac{\text{Im}}{\text{Re}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{T\omega}{0}\right) = \tan^{-1}(\infty) = 45^\circ$$

積分要素の位相は常に 90° 進む。gain は $\omega=1/T$ で 1.0 を通り、10 倍の ω に対して 10 となる。



5. システムの具体的構成

5.1 船の操縦運動と自動操舵

操舵による船の旋回運動は， ψ を旋回する角度とすると，次式のような簡単な運動方程式で表される。

$$I_{zz} \left(\frac{d^2\psi}{dt^2} \right) = N_{\delta} \delta - N_r \left(\frac{d\psi}{dt} \right) - J_{zz} \left(\frac{d^2\psi}{dt^2} \right) \quad (5.1)$$

すなわち，

$$(I_{zz} + J_{zz}) \left(\frac{d^2\psi}{dt^2} \right) + N_r \left(\frac{d\psi}{dt} \right) = N_{\delta} \delta \quad (5.2)$$

これより，

$$T \left(\frac{d^2\psi}{dt^2} \right) + \left(\frac{d\psi}{dt} \right) = K \delta \quad (5.3)$$

5.2 操縦性能

前術の操舵に対する応答モデルにおいて，直進状態（初期値： $d\psi/dt=0$ ）から舵角 δ_0 を操舵した場合の船の旋回運動は上記の(4.8)式を Laplace 変換すると，

$$Ts \mathcal{L} \left(\frac{d\psi}{dt} \right) + \mathcal{L} \left(\frac{d\psi}{dt} \right) = K \mathcal{L} \delta \quad (5.4)$$

すなわち，

$$(Ts+1) \mathcal{L} \left(\frac{d\psi}{dt} \right) = K \delta_0 \left(\frac{1}{s} \right)$$

$$\mathcal{L} \left(\frac{d\psi}{dt} \right) = \frac{K \delta_0}{(Ts+1)s} = K \delta_0 \left\{ \frac{1}{s} - \frac{T}{Ts+1} \right\} = K \delta_0 \left\{ \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1/T} \right\}$$

これを逆変換すると，

$$\frac{d\psi}{dt} = K \delta_0 \left\{ 1 - e^{-t/T} \right\} \quad (5.5)$$

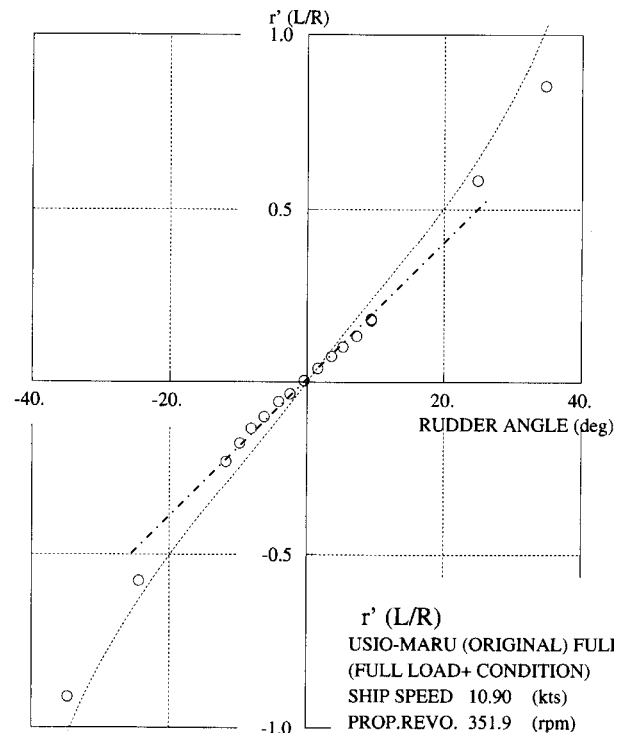
となる。ここで t では指数関数の項が全て 0 となり，操舵後，十分時間が経つと，

$$\left(\frac{d\psi}{dt} \right) = K \delta_0 \quad (5.6)$$

すなわち， K は操舵した時，その舵角で最終的に発揮しうる旋回角速度と横流れ速度を決定する定数になる。したがって， K を旋回力の指数と言う。(制御学的には static gain 係数)この(5.6)式から，

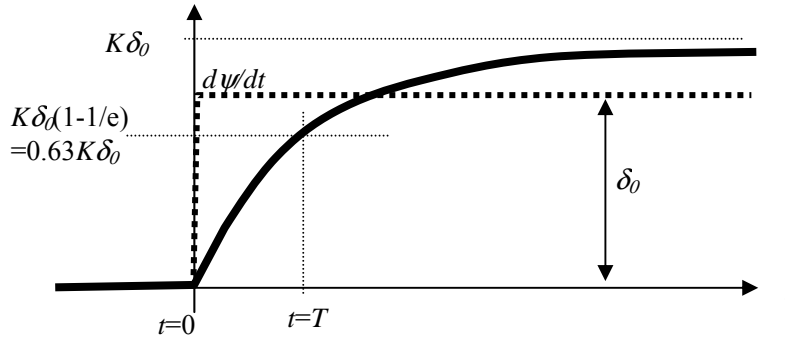
$$\frac{L}{R} = \left(\frac{d\psi}{dt} \right) \left(\frac{L}{U} \right) = \left(K \frac{L}{U} \right) \delta_0 \quad (5.7)$$

右図には，うしお丸（改造前 123GT 状態）



の種々の舵角に対する無次元の定常旋回角速度(L/R)の例を示すが、これらの関係は(5.7)式のようにほぼ直線になる。また、 $K(L/U)$ を無次元化された旋回力指数と言いこれを K' と表記する。

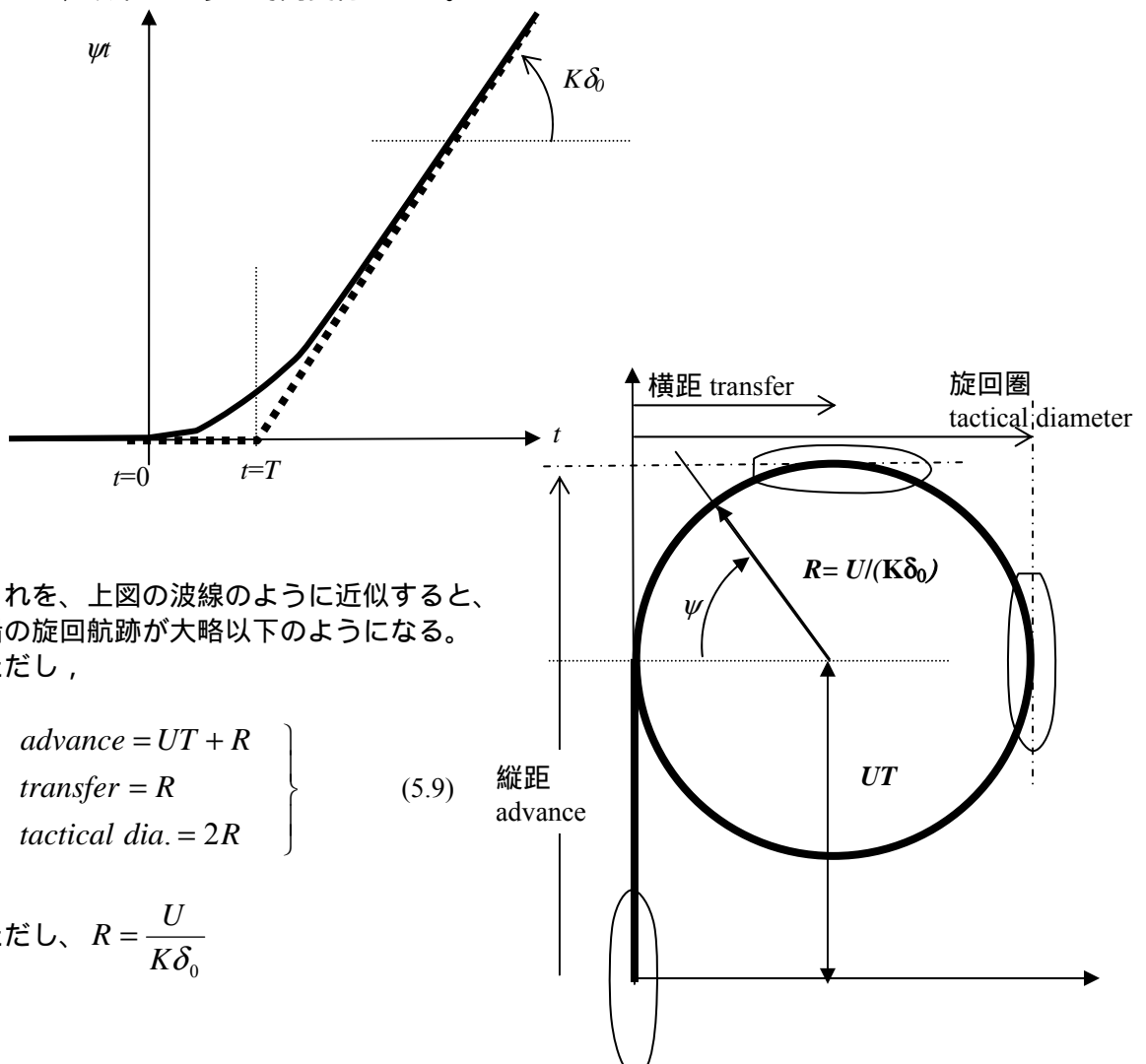
一方、操舵直後の旋回運動は下図のように、 T が大きい程、時間に対する指数関数の減少が遅くなり、旋回運動や横流れ運動の発達が遅くなる。このような船では操舵に対する追従が悪い。したがって、 T は操舵に対する追従性を表す指標になる。(制御学的には時定数 time constant)



この応答モデルでは旋回角度 ψ は、(5.5)式を時間積分すると、

$$\psi = K\delta_0 \left\{ t - T + Te^{-t/T} \right\} \quad (5.8)$$

となり、以下のような時間変化になる。



これを、上図の波線のように近似すると、船の旋回航跡が大略以下ようになる。ただし、

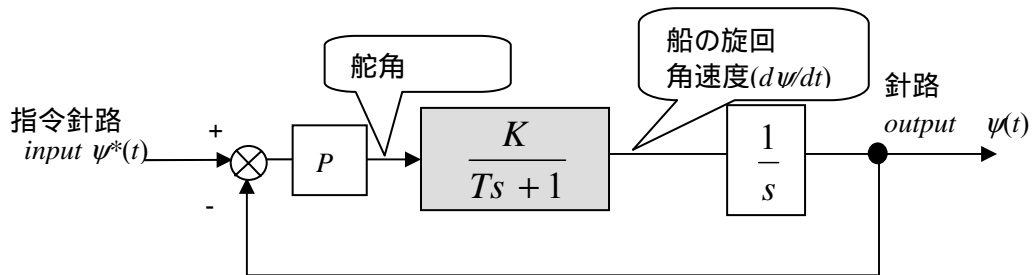
$$\left. \begin{aligned} advance &= UT + R \\ transfer &= R \\ tactical\ dia. &= 2R \end{aligned} \right\} \quad (5.9)$$

ただし、 $R = \frac{U}{K\delta_0}$

5.3 自動操舵装置（針路制御）

船は広い海を長時間航海するので、その間ずっと舵を操作するのは大変な作業になる。そこで、針路を自動的に保持してくれる装置があれば大変便利になる。このため、次のようなフィードバック制御を行う。

船の針路は ψ であり、これは旋回角速度($d\psi/dt$)を時間積分したものであるから、指令する針路 $\psi^*(t)$ とし、以下のようにフィードバックすることえを考える。



この制御システム全体の伝達関数、すなわち指令針路 ψ^* に対する実針路 ψ の伝達関数 G は、既に3章に示したように、

$$G = \frac{GP\left(\frac{1}{s}\right)}{GP\left(\frac{1}{s}\right) + 1} = \frac{\frac{KP}{(Ts+1)s}}{\frac{KP}{(Ts+1)s} + 1} = \frac{KP}{KP + (Ts+1)s} = \frac{1}{\left(\frac{T}{KP}\right)s^2 + \left(\frac{1}{KP}\right)s + 1}$$

これを書き直すと、

$$G = \frac{1}{T_1^2 s^2 + 2T_1 \zeta s + 1} \quad (5.10)$$

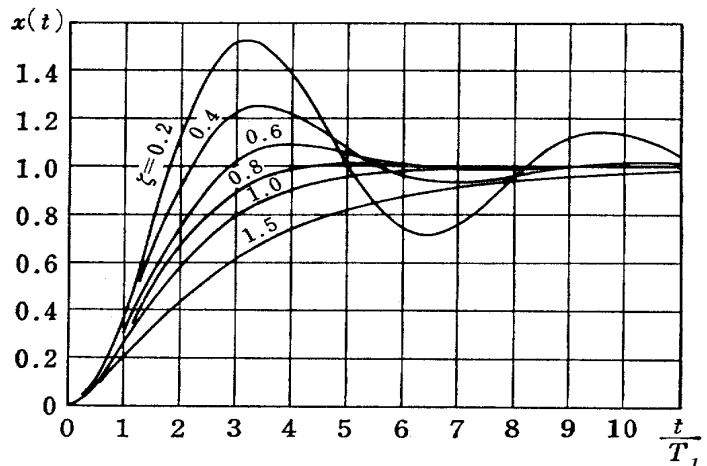
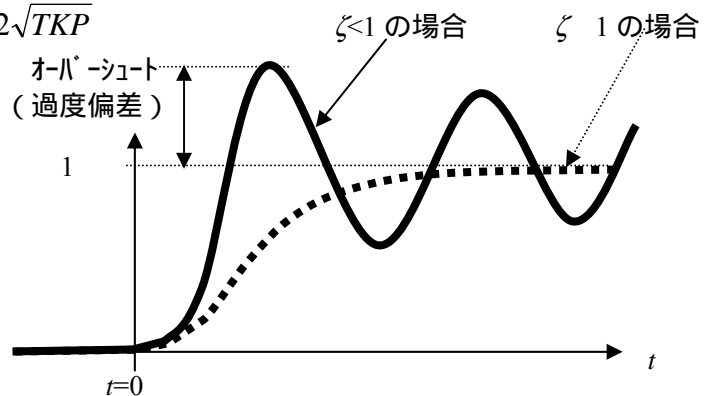
ただし、

$$T_1 = \sqrt{\frac{T}{KP}}, \quad \zeta = \frac{1}{2\sqrt{TKP}}$$

このシステムのステップ応答は前章に示したように、2次遅れ要素であるから、右図のようになる。

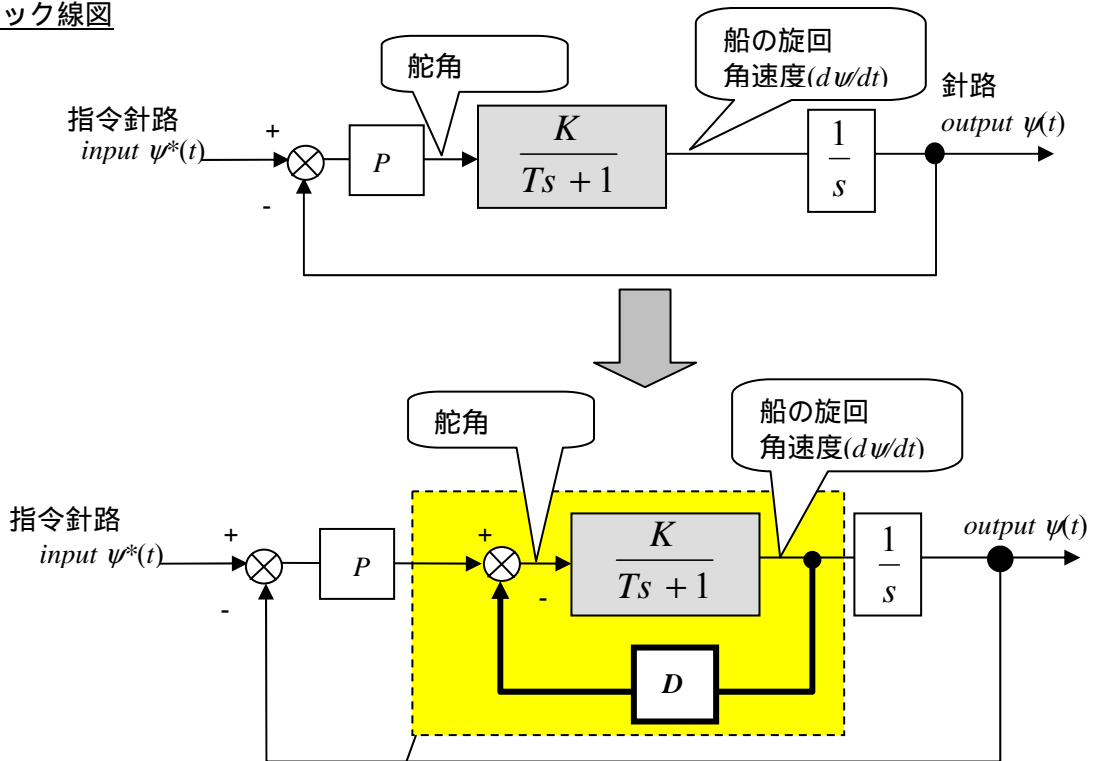
定数 P が小さいと、 T_1 が大きくなり、指令に対する応答は遅くなる。逆に、定数 P を大きくすると、 T_1 が小さくなって、指令に対する応答は速くなるが、 ζ も小さくなるので、指令深さに対して行き過ぎ（オーバーシュート）が発生する。制御学ではこの ζ のことをダンピングファクター(damping factor=減衰係数)と呼んでいる。

オーバーシュートが大きい場合は、速度のフィードバックを行って ζ を大きくし、オーバーシュートを少なくさせる必要がある。
(微分制御)



< 漁船の自動操舵でオーバーシュートを小さくする設計 >
 前頁のウインチ速度のフィードバックを入れてζを大きくし、オーバーシュートを少なくさせる具体的方法を検討してみよう。速度をフィードバックする方法には、幾つか考えられるが、下図のようにモータ電圧に比例した物理量の帰還を考える。係数 D は速度のフィードバック定数である。

ブロック線図



伝達関数

このブロック線図において、 の特性は 3 章の方法により、

$$G_1 = \frac{\frac{K}{(Ts+1)}}{\frac{KD}{(Ts+1)} + 1} = \frac{K}{KD + (Ts+1)} = \frac{1}{Ts + (1+K)}$$

したがって、指令位置 $\psi^*(t)$ に対する実際の釣り位置 $\psi(t)$ の伝達関数も同様に、

$$\begin{aligned} G &= \frac{PG_1\left(\frac{1}{s}\right)}{PG_1\left(\frac{1}{s}\right) + 1} = \frac{\frac{PK}{(Ts+1+KD)s}}{\frac{PK}{(Ts+1+KD)s} + 1} = \frac{PK}{PK + (Ts+1+KD)s} \\ &= \frac{PK}{Ts^2 + (1+KD)s + PK} \\ &= \frac{1}{\left(\frac{T}{PK}\right)s^2 + \left(\frac{1+KD}{PK}\right)s + 1} \end{aligned}$$

これを書き直すと、

$$G = \frac{1}{T_1^2 s^2 + 2T_1 \zeta s + 1} \quad (5.11)$$

ただし、

$$T_1 = \sqrt{\frac{T}{KP}}, \quad \zeta = \frac{1+KD}{2\sqrt{TKP}}$$

このシステムで旋回角速度のフィードバック定数 D を零にすると、当然のことながら(4.15)式となり、この時は船の旋回抵抗によるダンピングファクターのみとなる。

D を大きくすると、時定数 T_1 は変わらないが、ダンピングファクター： ζ の値だけを自由に調節することができ、オーバーシュートを無くすることが可能になる。

このように、サーボシステムでは、比例制御量： P と微分制御量： D を適度に調整して、最適な応答になるよう調整することができる。

<一口メモ>

制御定数 P, D と人間の行動

人間の行動や思考も制御系設計における P, D に似たところがある。

積極的に素早く行動できる人は一般に「 P 」が大きいと言える。しかし、単に「 P 」が大きいだけでは、早合点や過剰な行動となりがちで、動作が大きく物を破損したり、自分自身が怪我をすることも多く、一般に「軽率」と評価される。(普通の「 P 」値の人でも、過度の興奮状態や、飲酒した場合は、一時的に「 P 」の値が上がり、こうした状況になりがちになる。)

これを行き過ぎることなくスムーズにするのが「 D 」である。(5.11)式からもわかるように、上記の「 P 」が大きい人ほど、より大きな「 D 」が必要になる。これを的確に備えた人が「堅実」「実直」と信頼される。しかしこれも、過度に「 D 」が大きすぎると、なかなか行動しようとしないう「石橋を叩いて渡る」ような人間となり、これはまた、評価の分かれる結果となる。

機械の制御定数は理論的に決めることができるが、人の行動に関しては、なかなか最適な「 P 」と「 D 」は見つけにくい。各人が若い時代から多くの経験と交流を通して、その人に的確で相応しい「 P 」と「 D 」を備えることが必要である。

6. システムの安定性

前章に示した制御システムの例では、制御定数 P や D の組み合わせによってはオーバーシュートが変化するものの、何れも安定して作動していた。しかし、システムが複雑になると応答も複雑になり、それが安定に作動するかどうか重要な問題になる。

<制御系の安定・不安定の定義>

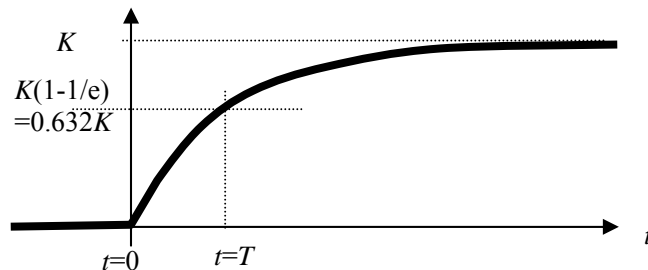
制御系が安定・不安定とは、入力変化があった時、

- ・その出力が入力に対応して新たな平衡状態に収束（落ち着く）ときは「安定」。
- ・その出力がいつまでも平衡状態にならない、あるいは発散するような場合は「不安定」

【伝達関数が 1 次遅れの場合】

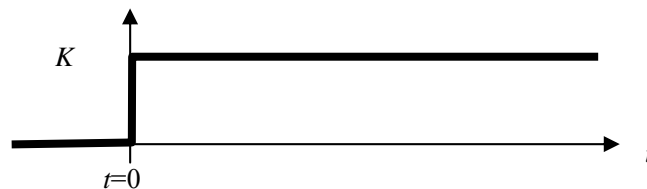
制御系の伝達関数が $\frac{K}{Ts+1}$ で書き表される場合、このステップ応答は以下のようになった。

$$[T>0] \text{ の場合} \quad x(t) = K \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) \quad (6.1)$$



[T=0] の場合 伝達関数は単に、 K という比例要素になり、この単位ステップ応答の時系列は、

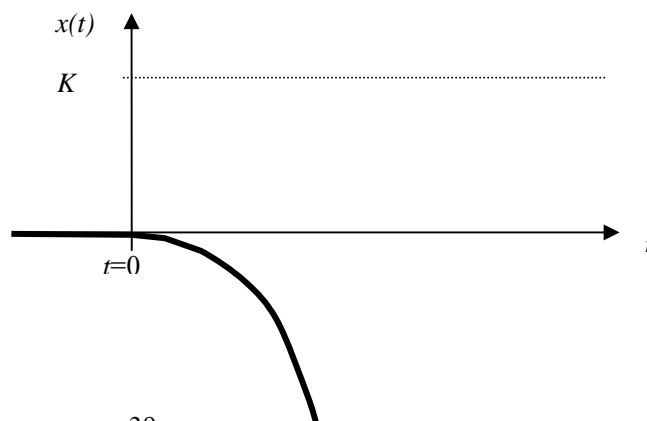
$$x(t) = K \quad (6.2)$$



[T<0] の場合は、どうなるだろうか。

$$x(t) = K \left(1 - e^{\frac{t}{|T|}} \right)$$

この場合のステップ応答は、やはり(6.1)式となるが、ここで、 e の指数部が時間 t の増加と共に正に増加するため、応答は無限の大きさに発散する。



1次遅れの場合は、以上のように3種類の応答に分けることができるが、系の安定・不安定については次のようにまとめられる。

$T > 0$ の時「安定」
 $T = 0$ の時「不安定（限界安定）」
 $T < 0$ の時「不安定」

【伝達関数が2次遅れの場合】

制御系の伝達関数が $G(s) = \frac{K}{T^2 s^2 + 2T\zeta s + 1}$ で書き表される場合、このステップ応答は以下のようになった。

$$\zeta > 1 \text{ の場合、 } x(t) = K \left\{ -\left(\frac{T_1}{T_1 - T_2}\right) e^{-\left(\frac{1}{T_1}\right)t} - \left(\frac{T_2}{T_2 - T_1}\right) e^{-\left(\frac{1}{T_2}\right)t} + 1 \right\} \quad (6.3)$$

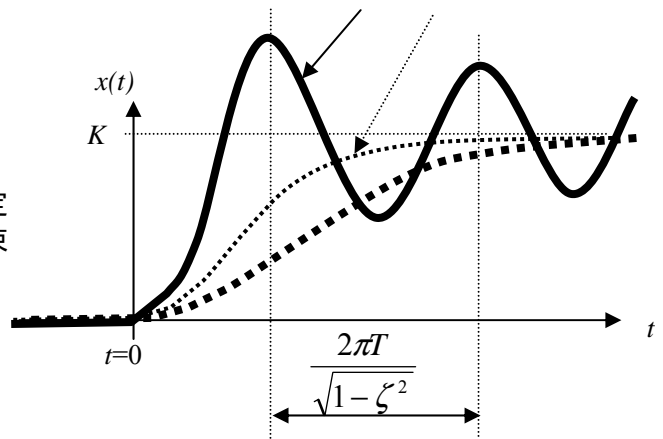
$$\zeta = 1 \text{ の場合、 } x(t) = K \left\{ 1 - e^{-\left(\frac{1}{T}\right)t} \left(1 + \frac{t}{T}\right) \right\} \quad (6.4)$$

$$\zeta < 1 \text{ の場合、 } x(t) = K \left\{ -e^{-\frac{\zeta}{T}t} \cos\left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{T}t\right) - \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\frac{\zeta}{T}t} \sin\left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{T}t\right) + 1 \right\} \quad (6.5)$$

ただし、

$$T_1, T_2 = \frac{T}{\zeta \mp \sqrt{\zeta^2 - 1}}$$

$0 < \zeta$ の場合は、上記の安定・不安定の定義に従えば、応答は時間と共に K に収束し、上記いずれの場合も安定である。



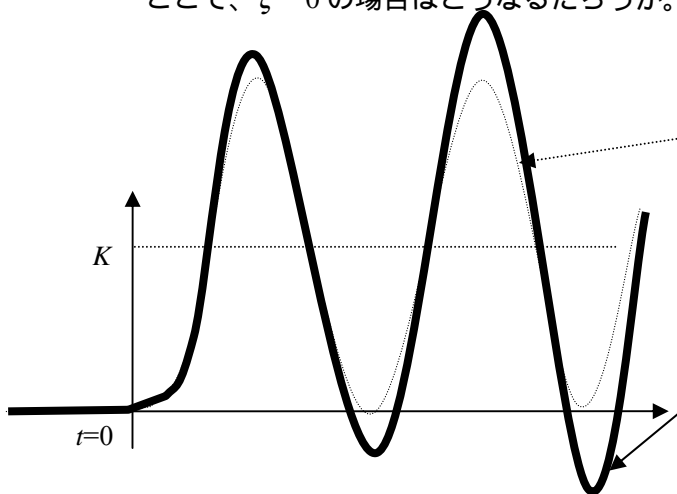
ここで、 $\zeta = 0$ の場合はどうなるだろうか。この場合のステップ応答は、

[$\zeta = 0$]

$$x(t) = K \left\{ 1 - \cos\left(\frac{1}{T}t\right) \right\} \quad (6.6)$$

[$-1 < \zeta < 0$]

$$x(t) = K \left\{ -e^{\frac{|\zeta|}{T}t} \cos\left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{T}t\right) - \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{\frac{|\zeta|}{T}t} \sin\left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{T}t\right) + 1 \right\} \quad (6.7)$$



となり、ステップ応答は K を中心に益々振幅が大きくなって時間と共に発散する結果になる。

更に ζ が-1より小さくなると、ステップ応答は(4.47)式と同じ形になるが、二つの時定数： $T_1 T_2$ は負の値となり、応答は K から離れ、無限の大きさに発散する。

[$\zeta < -1$]

$$x(t) = K \left\{ 1 - e^{\left(\frac{1}{T}\right)t} \left(1 + \frac{t}{T} \right) \right\} \quad (6.8)$$

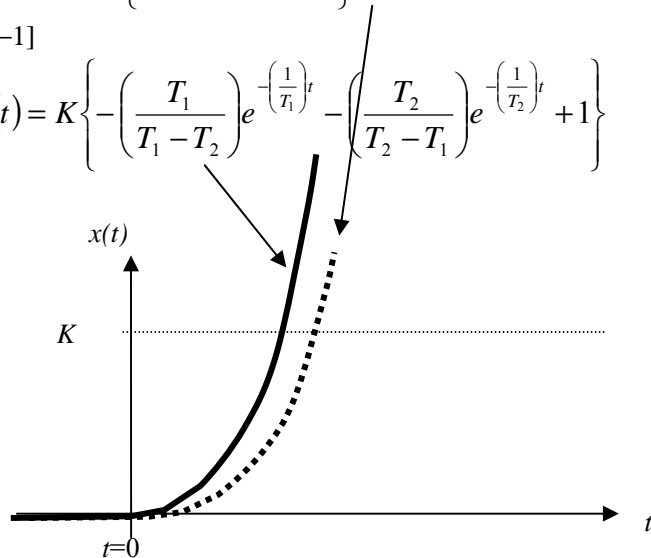
[$\zeta < -1$]

$$x(t) = K \left\{ -\left(\frac{T_1}{T_1 - T_2} \right) e^{-\left(\frac{1}{T_1}\right)t} - \left(\frac{T_2}{T_2 - T_1} \right) e^{-\left(\frac{1}{T_2}\right)t} + 1 \right\} \quad (6.9)$$

ただし、 $\zeta < -1$ では

$$T_1 = \frac{T}{\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}} < 0$$

$$T_2 = \frac{T}{\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}} < 0$$



2次遅れの制御系は、以上のように5種類の応答に分けることができるが、系の安定・不安定については次のようにまとめられる。

$\zeta > 0$ の時「安定」
 $\zeta = 0$ の時「不安定（限界安定）」
 $\zeta < 0$ の時「不安定」

6.1 ステップ応答・インパルス応答と系の安定・不安定

【伝達関数が1次遅れの場合】

1次遅れのステップ応答は T の値にかかわらず、その解は全て(6.1)式の形で表現することができる。より具体的には、伝達関数の分母を以下のように展開する。

$$Ts + 1 = T(s - P) \quad (6.10)$$

ただし、 P は $Ts + 1 = 0$ の根であり、この場合の伝達関数は、 $\frac{K}{T(s - P)}$

<ステップ応答> この伝達関数の応答は伝達関数に $(1/s)$ を掛けて与えられる。

$$\mathcal{L}x = \frac{K}{T(s - P)} \cdot \frac{1}{s} = -\frac{K}{s - P} + \frac{1}{s}$$

上式をLaplace逆変換すると、この系のステップ応答は次式となる。

$$x(t) = K(1 - e^{Pt}) \quad (6.11)$$

<インパルス応答> この応答は伝達関数そのもので与えられる。

$$\mathcal{L}x = \frac{K}{T(s - P)}$$

$$x(t) = \frac{K}{T} e^{Pt} \quad (6.12)$$

【伝達関数が2次遅れの場合】

前述のステップ応答は一般に複素数を用いて表記すると、その解は全て(6.3)式の形で表現することができる。より具体的には、伝達関数の分母を以下のように展開する。

$$T^2 s^2 + 2T\zeta + 1 = T^2 (s - P_1)(s - P_2) \quad (6.13)$$

ただし、 $P_{1,2}$ は $T^2 s^2 + 2T\zeta + 1 = 0$ の根であり、 $|\zeta| < 1$ の場合は複素数になる。

$$P_1, P_2 = \begin{cases} \frac{-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}}{T}, & (|\zeta| > 1 \text{ の場合}) \\ \frac{-\zeta \pm i\sqrt{1 - \zeta^2}}{T}, & (|\zeta| < 1 \text{ の場合}) \end{cases}$$

この場合の伝達関数は、

$$\frac{K}{T^2 s^2 + 2T\zeta + 1} = \frac{K}{T^2 (s - P_1)(s - P_2)}$$

<ステップ応答> この伝達関数の応答は伝達関数に(1/s)を掛けて与えられる。

$$\mathcal{L}x = \frac{K}{T^2 (s - P_1)(s - P_2)} \cdot \frac{1}{s} = \left(\frac{KP_2}{P_1 - P_2} \right) \frac{1}{s - P_1} - \left(\frac{KP_1}{P_1 - P_2} \right) \frac{1}{s - P_2} + K \frac{1}{s}$$

上式を Laplace 逆変換すると、この系のステップ応答は次式となる。

$$x(t) = K \left\{ 1 + \left(\frac{P_2}{P_1 - P_2} \right) e^{P_1 t} - \left(\frac{P_1}{P_1 - P_2} \right) e^{P_2 t} \right\} \quad (6.14)$$

<インパルス応答> この応答は Laplace 変換は伝達関数そのもので与えられる。

$$\mathcal{L}x = \frac{K}{T^2 (s - P_1)(s - P_2)} = - \left(\frac{KP_1 P_2}{P_1 - P_2} \right) \frac{1}{s - P_1} - \left(\frac{KP_1 P_2}{P_1 - P_2} \right) \frac{1}{s - P_2}$$

$$x(t) = KP_1 P_2 \left\{ \left(\frac{1}{P_1 - P_2} \right) e^{P_1 t} - \left(\frac{1}{P_1 - P_2} \right) e^{P_2 t} \right\} \quad (6.15)$$

以上のステップ応答やインパルス応答から、以下のことがわかる。

(1) 指数関数項の $e^{P_1 t}$ 、あるいは $e^{P_1 t}, e^{P_2 t}$ の指数の実数部が系の収束や発散のカギになる。すなわち系の安定性を決定する。それは(伝達関数の分母=0)の根の実数部の極性に依存する。

したがって、伝達関数の分母は非常に重要な意味を持っており、

[伝達関数の分母]=0 を特性方程式と言い、その根を伝達関数の極と言う。

制御系が安定であるためには、この極の実数部が正(プラス)の値でないことが必要十分条件になる。

5.2 安定の判別法

特性方程式は一般に s の高次多項式となり、3 次以上では根を解析的に求めることが困難になる。特性方程式を解かずに、安定・不安定の判別をする方法として、「ナイキスト(Nyquist)の方法」や特性方程式から代数的に判別する「ラウス・フルビッツ(Routh-Hurwitz 英式でルース・ハービッツとも呼ばれる)の方法」等がある。以下ではこれらの方法について示す。

(1) Hurwitz の安定判別法 (Routh の判別法も基本的には同じ)

特性方程式： $a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_n = 0$ において、
 $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ の係数が全て存在し、
 これらが全部同符号で、
 次の行列式(Hurwitz の行列式) が成り立つこと。

$$H_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & a_{2(i-1)-1} \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & a_{2(i-1)-2} \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & a_{2(i-1)-3} \\ 0 & a_0 & a_2 & \dots & a_{2(i-1)-4} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} \end{vmatrix} > 0 \quad \text{----- (6.16)}$$

ただし、 $i=2,3, \dots, n$ $a_k: k < 0, k > n$ の時 0 とする。

この行列式はたとえば、 $n=2$ ならば次式となり、

$$H_2 = \begin{vmatrix} a_1 \\ a_0 \end{vmatrix} = a_1 > 0$$

2 次式の特性方程式を持つ伝達関数では Hurwitz の安定判別法 (全部同符号の条件) と合わせて、全ての係数が正であることが必要で、 $\zeta > 0$ となる先の判別と一致していることがわかる。

$n=3$ の場合、 $a_0 \sim a_3$ が全部同符号で、かつ

$$H_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0$$

$n=4$ の場合、 $a_0 \sim a_4$ が全部同符号で、かつ

$$H_4 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = a_0 a_1 a_2 - a_1^2 a_4 - a_0 a_3^2 > 0$$

$n=5$ の場合も同様であるが、行列式の解法がやや面倒になるが以下のように解ける。(詳しくは線形代数学の行列式計算の項を参照)

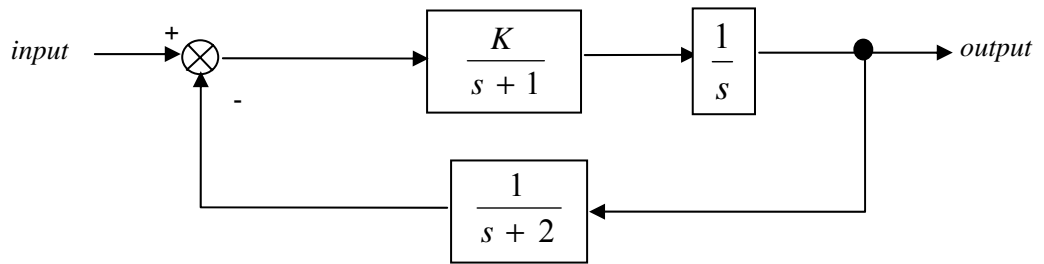
$$\begin{array}{c}
 \text{Hi=} \\
 \left[\begin{array}{cccc|cccc}
 a_1 & a_3 & a_5 & \dots & a_{2(i-1)-1} & 1 & a_3/a_1 & a_5/a_1 & \dots & a_{2(i-1)-1}/a_1 \\
 a_0 & a_2 & a_4 & \dots & a_{2(i-1)-2} & a_0 & a_2 & a_4 & \dots & a_{2(i-1)-2} \\
 0 & a_1 & a_3 & \dots & a_{2(i-1)-3} & 0 & a_1 & a_3 & \dots & a_{2(i-1)-3} \\
 0 & a_0 & a_2 & \dots & a_{2(i-1)-4} & 0 & a_0 & a_2 & \dots & a_{2(i-1)-4} \\
 0 & 0 & a_1 & \dots & \dots & 0 & 0 & a_1 & \dots & \dots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \dots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \dots \\
 0 & 0 & 0 & \dots & a_{i-1} & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{i-1}
 \end{array} \right] \xrightarrow{= a_1} \left[\begin{array}{cccc|cccc}
 1 & a_3/a_1 & a_5/a_1 & \dots & a_{2(i-1)-1}/a_1 & 1 & a_3/a_1 & a_5/a_1 & \dots & a_{2(i-1)-1}/a_1 \\
 a_0 & a_2 & a_4 & \dots & a_{2(i-1)-2} & a_0 & a_2 & a_4 & \dots & a_{2(i-1)-2} \\
 0 & a_1 & a_3 & \dots & a_{2(i-1)-3} & 0 & a_1 & a_3 & \dots & a_{2(i-1)-3} \\
 0 & a_0 & a_2 & \dots & a_{2(i-1)-4} & 0 & a_0 & a_2 & \dots & a_{2(i-1)-4} \\
 0 & 0 & a_1 & \dots & \dots & 0 & 0 & a_1 & \dots & \dots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \dots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \dots \\
 0 & 0 & 0 & \dots & a_{i-1} & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{i-1}
 \end{array} \right]
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \xrightarrow{= a_1} \\
 \left[\begin{array}{cccc|cccc}
 1 & a_3/a_1 & a_5/a_1 & \dots & a_{2(i-1)-1}/a_1 & 1 & a_3/a_1 & a_5/a_1 & \dots & a_{2(i-1)-1}/a_1 \\
 0 & a_2 - a_0 a_3/a_1 & a_4 - a_0 a_5/a_1 & \dots & a_{2(i-1)-2} - a_0 a_{2(i-1)-1}/a_1 & a_0 & a_2 & a_4 & \dots & a_{2(i-1)-2} \\
 0 & a_1 & a_3 & \dots & a_{2(i-1)-3} & 0 & a_1 & a_3 & \dots & a_{2(i-1)-3} \\
 0 & a_0 & a_2 & \dots & a_{2(i-1)-4} & 0 & a_0 & a_2 & \dots & a_{2(i-1)-4} \\
 0 & 0 & a_1 & \dots & \dots & 0 & 0 & a_1 & \dots & \dots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \dots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \dots \\
 0 & 0 & 0 & \dots & a_{i-1} & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{i-1}
 \end{array} \right] \\
 \xrightarrow{= a_1(a_2 - a_0 a_3/a_1)} \\
 \left[\begin{array}{cccc|cccc}
 1 & a_3/a_1 & a_5/a_1 & \dots & a_{2(i-1)-1}/a_1 & 1 & a_3/a_1 & a_5/a_1 & \dots & a_{2(i-1)-1}/a_1 \\
 0 & 1 & (a_4 - a_0 a_5/a_1) / (a_2 - a_0 a_3/a_1) & \dots & (a_{2(i-1)-2} - a_0 a_{2(i-1)-1}/a_1) / (a_2 - a_0 a_3/a_1) & 0 & a_3 - a_1 & a_4 - a_1 & \dots & a_{2(i-1)-3} - a_1 \\
 0 & 0 & a_2 - a_0 & \dots & a_{2(i-1)-4} - a_0 & 0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{2(i-1)-4} \\
 0 & 0 & 0 & \dots & a_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\
 0 & 0 & 0 & \dots & a_{i-1} & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{i-1}
 \end{array} \right]
 \end{array}$$

以下、順次 $\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & a_3/a_1 & a_5/a_1 & \dots & a_{2(i-1)-1}/a_1 & 1 & a_3/a_1 & a_5/a_1 & \dots & a_{2(i-1)-1}/a_1 \end{array} \right]$ の行列の第 1 列目が $\left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right\}$ となるよう、機械的に演算操作を行って行く
と行列式の解が得られる。

< 制御系の安定性の計算例 >

以下の制御系が安定に作動するための比例定数 K の範囲を、Hurwitz の安定判別法によって求めよ。



$$\text{伝達関数} = \frac{\frac{K}{s+1} \cdot \frac{1}{s}}{1 + \frac{K}{s+1} \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s+2}} = \frac{K(s+2)}{(s+1)(s+2) + K}$$

特性方程式： $(s+1)(s+2) + K = 0$

すなわち： $s^3 + 3s^2 + 2s + K = 0$

Hurwitz の安定判別法

より、 $K > 0$

より、 $K > 0$

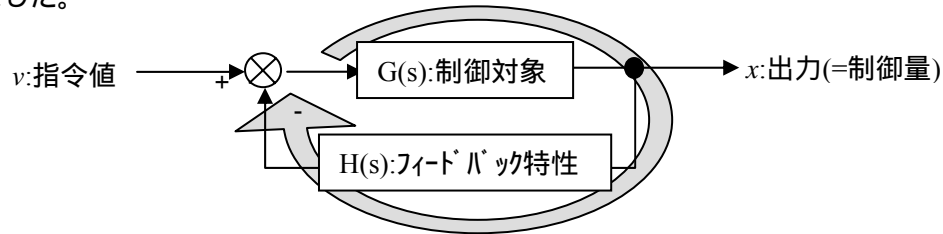
より

$$H_3 = \begin{vmatrix} 3 & K \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - K > 0$$

~ より、この制御系の安定条件は、 $0 < K < 6$

(2) Nyquist の安定判別法

フィードバック制御系の全体の伝達関数は、既に表示したように、 $\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$ と書き表されることを示した。



制御系の安定性は、[伝達関数の分母=0]となる特性方程式の根、すなわち極の実数部が正でないことが必要十分条件であったから、 $G(s)H(s)+1=0$ を満足する s の実数部が正でないことと等価である。すなわち、 $G(s)H(s)=-1$ とする正の実数部を持つ s が存在しないことを証明すれば、制御系は安定となる。

ここで、 $G(s)H(s)$ のことを一巡伝達関数と言う。

さて次に、 s と一巡伝達関数 $G(s)H(s)$ の関係を複素平面で調べてみよう。

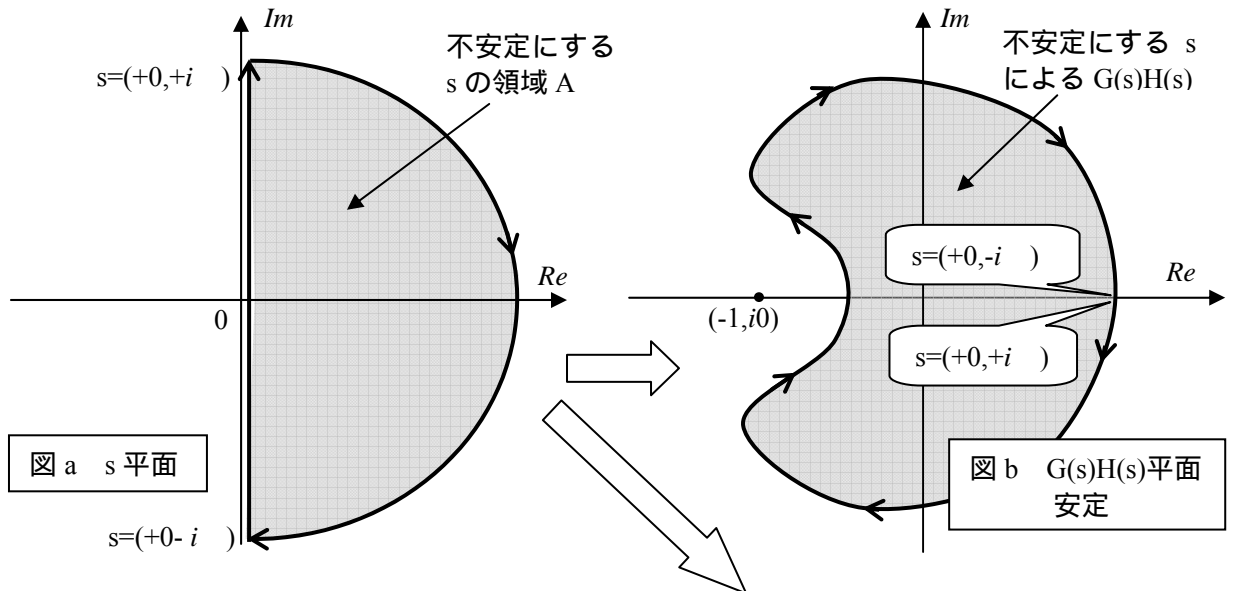
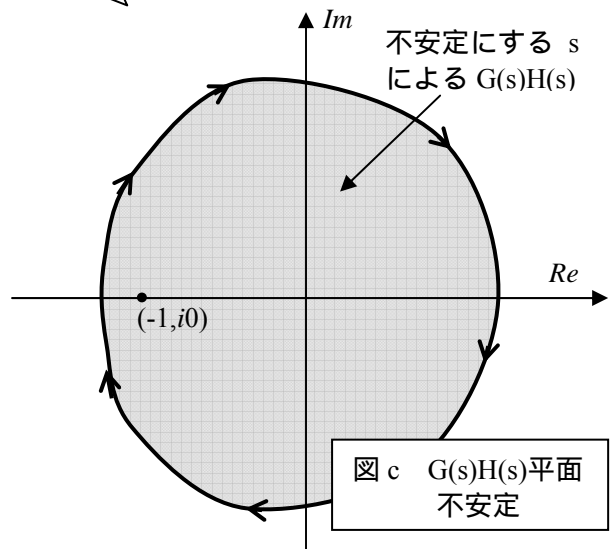


図 a は実数部が正となり制御系を不安定にする s の集合 A でこの周りの境界を右回り $s = +0 - i\infty$ から $s = +0 + i\infty$ の方向に周回した場合、この制御系の一巡伝達関数の軌跡を図 b に示す。写像の法則により、この図で同一周りで囲まれた領域は集合 A によって作られた部分であることがわかって

いる。
ここで、図 b のようにこれらの領域に $(-1, i0)$ が含まれていなければ、 $G(s)H(s)=-1$ とする正の実数部を持つ s が存在しないこととなり、制御系が安定であることを示している。

逆に、図 c の場合は、同一周りで囲まれた領域の中にあることから、 $G(s)H(s)=-1$ とする正の実数部を持つ s が存在し、制御系が不安定であることを示している。

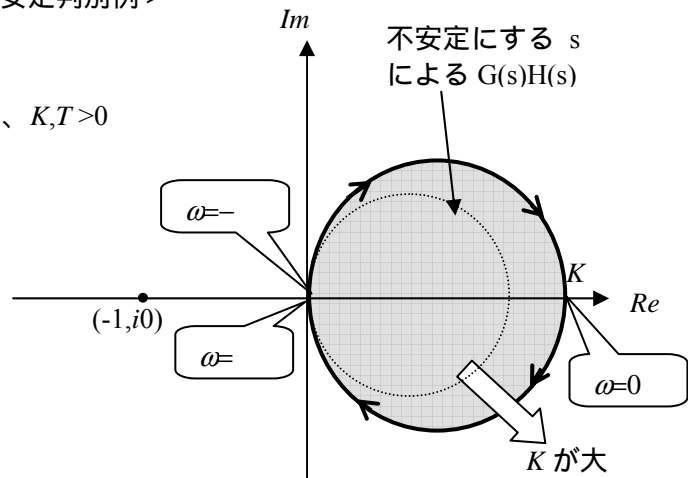


以上より、Nyquist の安定判別法は実用的には以下のように要約される。(Nyquist の本来の安定判別法はやや複雑で、本テキストではわかりやすく以下のようにまとめる。)

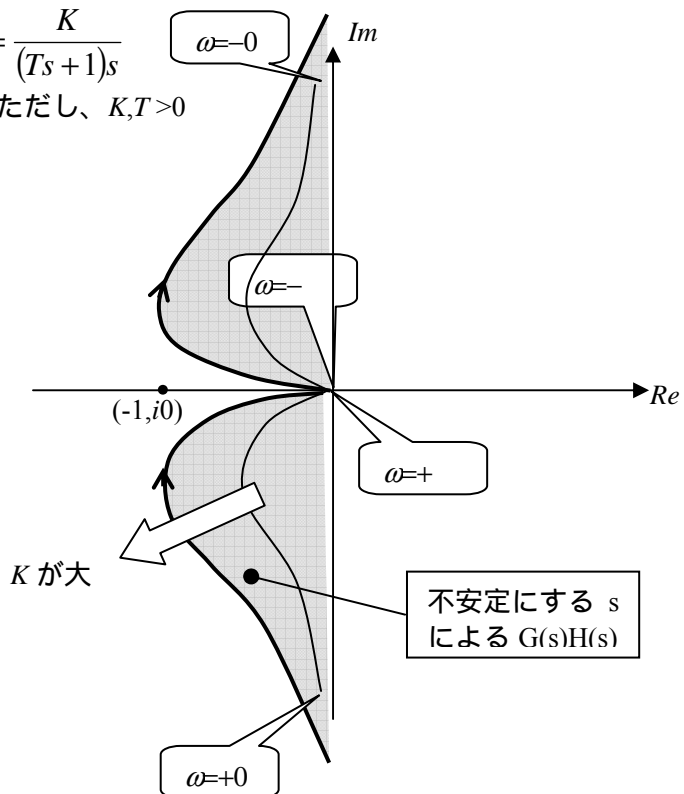
一巡伝達関数 $G(s)H(s)$ で $s=i\omega$ として、 $\omega=0 \rightarrow \infty$ に変化させ、
 $G(s)H(s)$ のベクトル軌跡を複素平面上に描く。($\omega=0 \rightarrow \infty$ の軌跡は上記の軌跡を実軸に対して対称となる。)
 この軌跡上を $\omega=-\infty \rightarrow 0 \rightarrow \infty$ の方向に進む時、点 $(-1, i0)$ が進行方向の左側にあれば「安定」。右側もしくはベクトル軌跡上にあれば「不安定」
 (ただし、ベクトル軌跡が複数回、点 $(-1, i0)$ を回る場合は、図 b,c に戻って領域内に $(-1, i0)$ が含まれるか否かを詳しく調べる必要がある。)

< 代表的な一巡伝達関数と Nyquist の安定判別例 >

(1) 一次遅れ: $G(s)H(s) = \frac{K}{Ts+1}$
 ただし、 $K, T > 0$
K の値にかかわらず「安定」



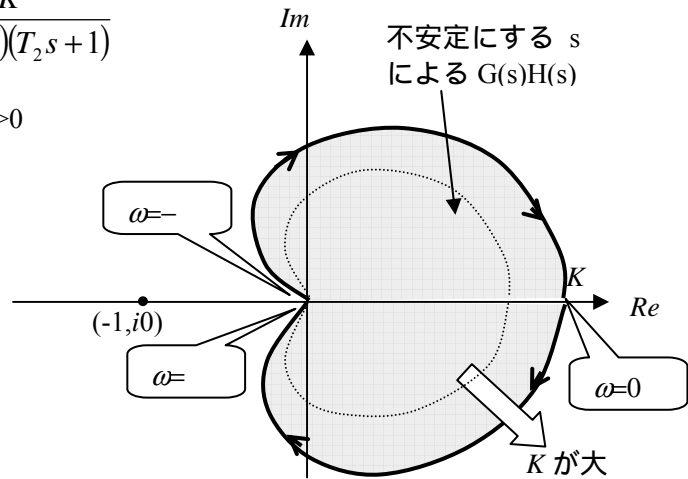
(2) 一次遅れ×積分: $G(s)H(s) = \frac{K}{(Ts+1)s}$
 ただし、 $K, T > 0$
K の値にかかわらず「安定」



(3) 二次遅れ: $G(s)H(s) = \frac{K}{(T_1s+1)(T_2s+1)}$

ただし、 $K, T_1, T_2 > 0$

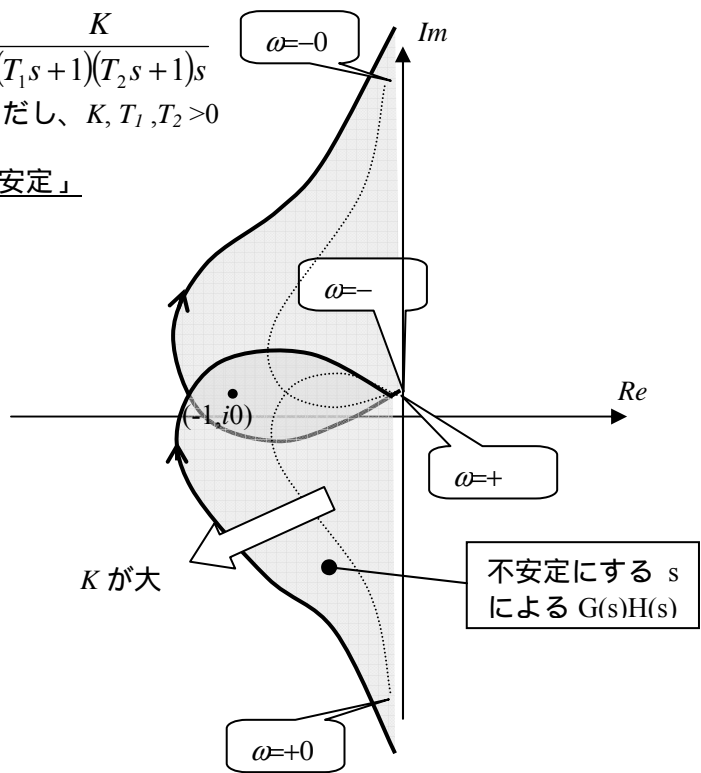
Kの値にかかわらず「安定」



(4) 二次遅れ×積分: $G(s)H(s) = \frac{K}{(T_1s+1)(T_2s+1)s}$

ただし、 $K, T_1, T_2 > 0$

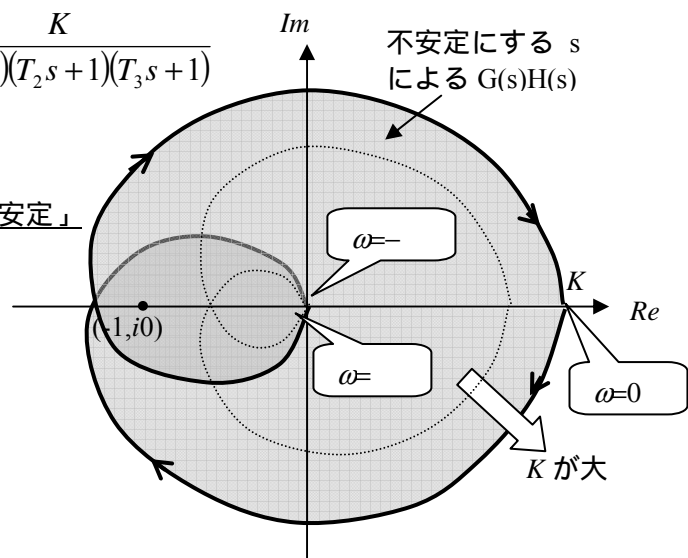
K 小: 「安定」、K 大: 「不安定」



(5) 三次遅れ: $G(s)H(s) = \frac{K}{(T_1s+1)(T_2s+1)(T_3s+1)}$

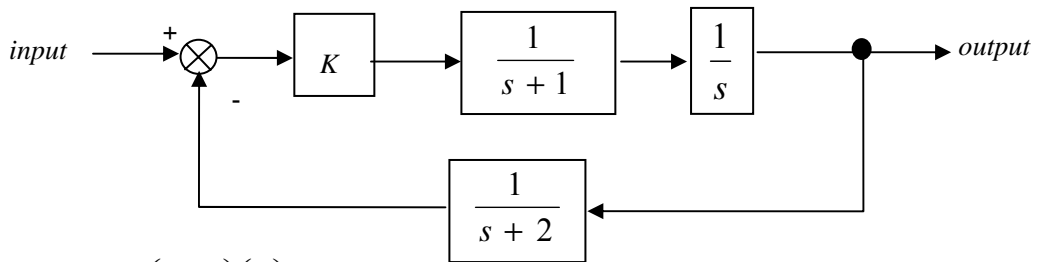
ただし、 $K, T_1, T_2, T_3 > 0$

K 小: 「安定」、K 大: 「不安定」



< 制御系の安定性の計算例 (2) >

以下の制御系が安定に作動するための比例定数 K の範囲を、Nyquist の安定判別法によって求めよ。



$$\text{伝達関数} = \frac{K \left(\frac{1}{s+1} \right) \left(\frac{1}{s} \right)}{1 + K \left(\frac{1}{s+1} \right) \left(\frac{1}{s} \right) \left(\frac{1}{s+2} \right)} = \frac{K(s+2)}{(s+1)s(s+2)+K} \leftarrow (\text{これは特に求める必要はない})$$

$$\begin{aligned} \text{一巡伝達関数} &= \frac{K}{s(s+1)(s+2)} = \frac{K}{(i\omega)(i\omega+1)(i\omega+2)} \\ &= \frac{K(-i\omega)(-i\omega+1)(-i\omega+2)}{(i\omega)(i\omega+1)(i\omega+2)(-i\omega)(-i\omega+1)(-i\omega+2)} = \frac{K(-i\omega)(-i\omega+1)(-i\omega+2)}{\omega^2(\omega^2+1)(\omega^2+4)} \\ &= \frac{K(-i)(-\omega^2-3i\omega+2)}{\omega(\omega^2+1)(\omega^2+4)} = -\frac{3K}{(\omega^2+1)(\omega^2+4)} + i\frac{K(\omega^2-2)}{\omega(\omega^2+1)(\omega^2+4)} \end{aligned}$$

一巡伝達関数のベクトル軌跡が実軸を横切る点は、上記の伝達関数の虚数部=0であるから、

$$\text{Im} = \frac{K(\omega^2-2)}{\omega^2(\omega^2+1)(\omega^2+4)} = 0$$

ここで $K=0$ でないとすると、すなわち、 $\omega^2=2$ の時である。

Nyquist の安定判別法により、システムが「安定」であるためには、この実軸上の交点が $-1 < \text{交点} < 0$ にあればよい。すなわち、
 $-1 < \text{Re}(\text{実数部}) < 0$ これより、

$$-1 < -\frac{3K}{(\omega^2+1)(\omega^2+4)} < 0$$

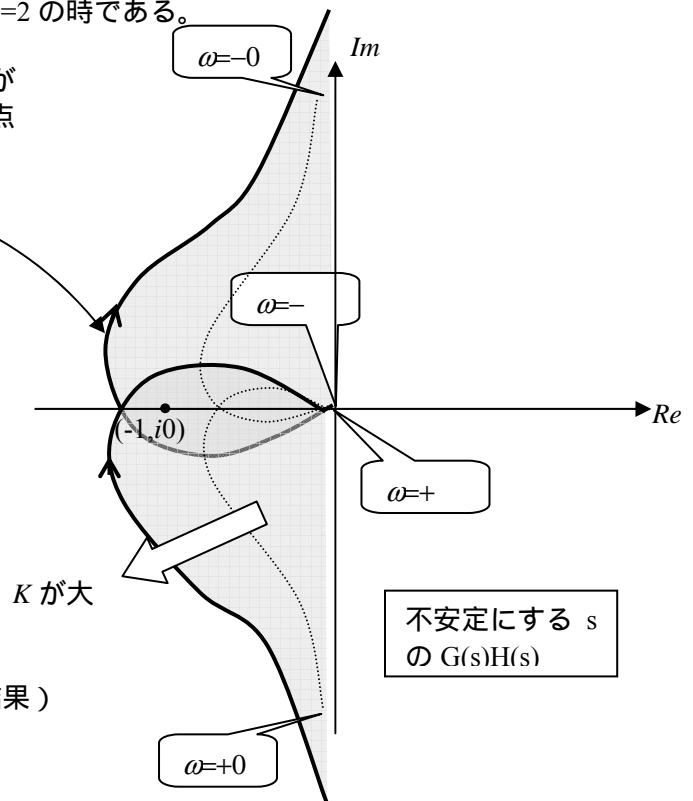
$$1 > \frac{3K}{(\omega^2+1)(\omega^2+4)} > 0$$

$$\frac{(\omega^2+1)(\omega^2+4)}{3} > K > 0$$

$$\frac{(2+1)(2+4)}{3} > K > 0$$

$$6 > K > 0$$

これより、制御系の安定条件は、 $0 < K < 6$ が得られる。(Hurbitz の安定判定と同じ結果)



(3) Bode 線図による安定判別法

(ゲイン余裕と位相余裕：Gain margin and Phase Margin)

フィードバック制御系の一巡伝達関数(GH)を複素平面上にプロットしたものが Nyquist 線図であり、この線図を使って安定判別を行うのが Nyquist の安定判別方法であった。これを Bode 線図上で行えるよう書き直したのがこの方法である。

ゲイン余裕(Gain Margin)

Nyquist の安定判別法において、安定条件は一巡伝達関数のベクトル軌跡が $\omega = -\infty \rightarrow 0 \rightarrow +\infty$ 方向に進む時、点 $(-1, j0)$ が進行方向の左側にあることであった。複素平面上の点 $(-1, j0)$ は、

$$\text{振幅： } |G(i\omega)H(i\omega)| = 1$$

$$\text{位相： } \angle G(i\omega)H(i\omega) = -180^\circ$$

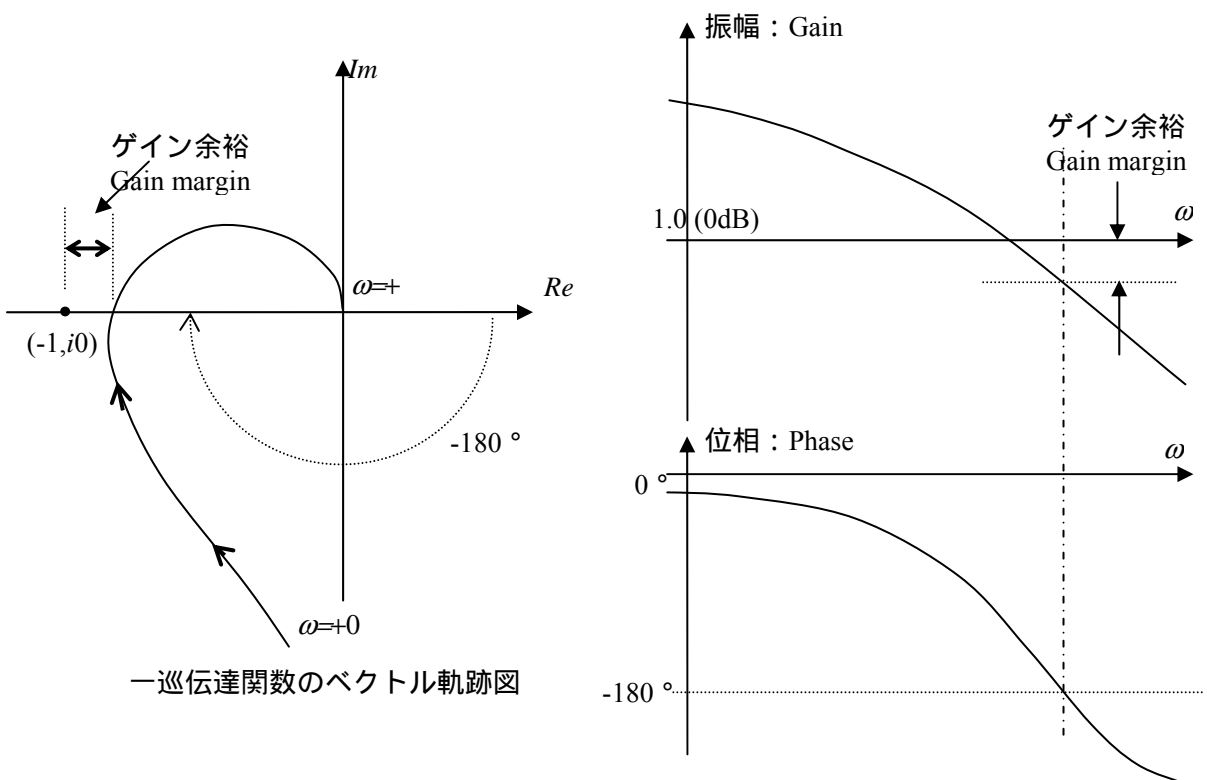
である。従って、一巡伝達関数の位相が -180° の時、振幅が 1.0 以下であれば、ベクトル軌跡は点 $(-1, j0)$ の右側を通り、系は安定である。

しかし、実際の機械系においては、機械パラメータが時間と共に変化することを考慮する必要がある。つまり、位相が -180° における一巡伝達関数の振幅が 1.0 以下であっても、振幅が 1.0 に近い場合は、わずかのパラメータ変動により、系が不安定になる可能性がある。振幅がどの程度増加すれば 1.0 となり、系が不安定になるかを示す量をゲイン余裕と言う。

Nyquist の安定判別方法 “一巡伝達関数のベクトル軌跡が $\omega = -\infty \rightarrow 0 \rightarrow \infty$ 方向に進む時、点 $(-1, j0)$ が進行方向の左側にあれば「安定」。右側もしくはベクトル軌跡上にあれば「不安定」”

一巡伝達関数のベクトル軌跡の実軸との交点が $(-1, j0)$ の右側にあること。

Bode 線図の振幅特性で言い換えれば、一巡伝達関数の位相が -180° の時、振幅が 1.0 以下であること。この余裕：ゲイン余裕 大きい程は安定



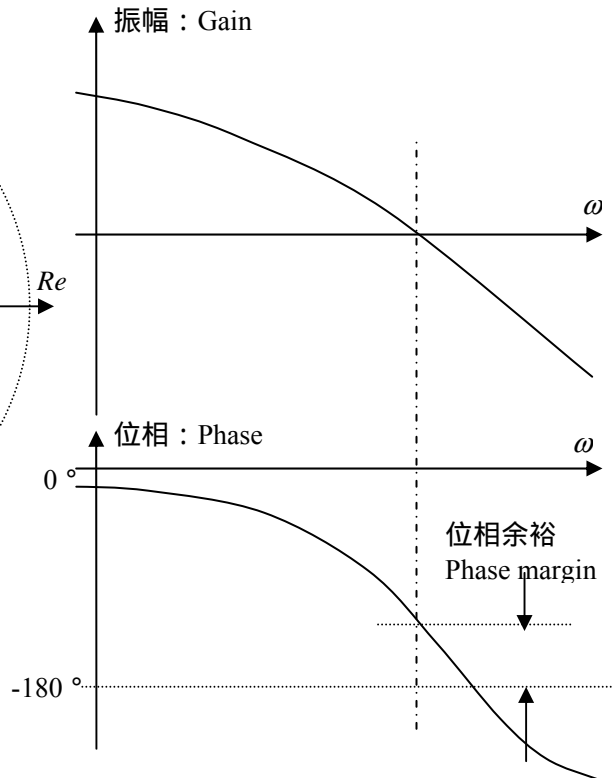
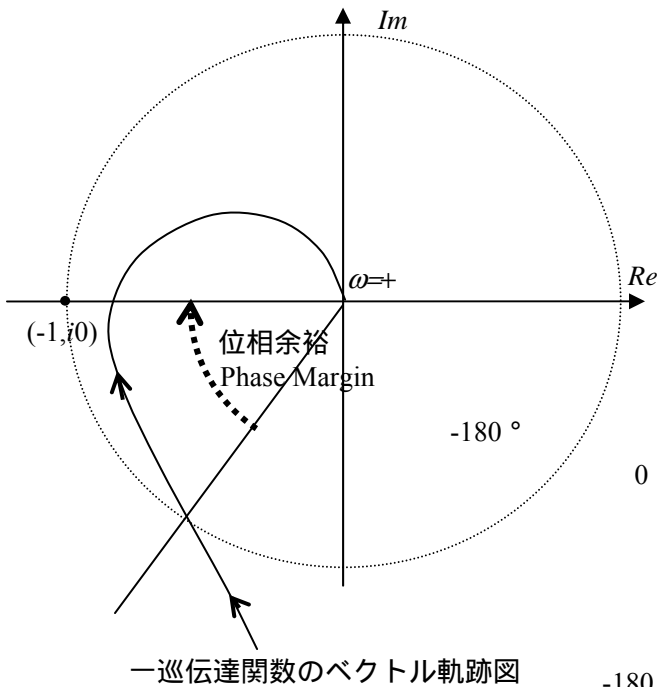
位相余裕(Phase Margin)

同様な考え方で、一巡伝達関数が 1.0 の時の位相が -180° より小さければ、ベクトル軌跡は点 $(-1, i0)$ の右側を通り、系は安定と言える。逆に -180° より大きければ不安定となる。安定な場合でもこの位相が -180° に近いとわずかのパラメータ変動により、系が不安定になり易い。一巡伝達関数の位相がどの程度遅れば -180° となり、系が不安定になるかを示す角度を位相余裕と言う。

Nyquist の安定判別方法 “一巡伝達関数のベクトル軌跡が $\omega = -\infty \rightarrow 0 \rightarrow \infty$ 方向に進む時、点 $(-1, i0)$ が進行方向の左側にあれば「安定」。右側もしくはベクトル軌跡上にあれば「不安定」”

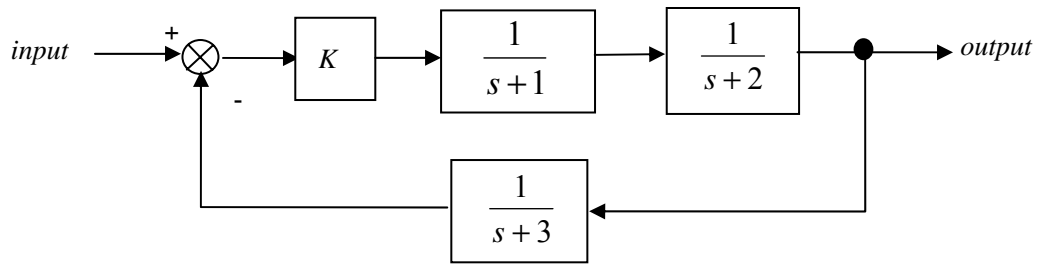
一巡伝達関数のベクトル軌跡の実軸との交点が $(-1, i0)$ の右側にあること。

Bode 線図の位相特性で言い換えれば、一巡伝達関数の振幅が 1.0 の時、位相が -180° 以下であること。この余裕：位相余裕 大きい程系は安定



< 制御系の安定性の計算例 (3) >

以下の制御系が安定に作動するための比例定数 K の範囲を、Bode 線図のゲイン余裕から求めよ。



$$\begin{aligned}
 \text{一巡伝達関数} &= \frac{K}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{K}{(i\omega+1)(i\omega+2)(i\omega+3)} \\
 &= \frac{K}{(i\omega+1)(i\omega+2)(i\omega+3)} \\
 &= \frac{K(-i\omega+1)(-i\omega+2)(-i\omega+3)}{(i\omega+1)(i\omega+2)(i\omega+3)(-i\omega+1)(-i\omega+2)(-i\omega+3)} \\
 &= \frac{K(-i\omega+1)(-i\omega+2)(-i\omega+3)}{(\omega^2+1)(\omega^2+4)(\omega^2+9)} = K \frac{(-i\omega)^3 + 6(-i\omega)^2 + 11(-i\omega) + 6}{(\omega^2+1)(\omega^2+4)(\omega^2+9)} \\
 &= K \frac{i\omega^3 - 6\omega^2 - 11i\omega + 6}{(\omega^2+1)(\omega^2+4)(\omega^2+9)} = \frac{6K(-\omega^2+1)}{(\omega^2+1)(\omega^2+4)(\omega^2+9)} + i \frac{K\omega(\omega^2-11)}{(\omega^2+1)(\omega^2+4)(\omega^2+9)}
 \end{aligned}$$

一巡伝達関数が -180° となる点は、上記の伝達関数の虚数部=0 であるから、

$$\text{Im} = \frac{K\omega(\omega^2-11)}{(\omega^2+1)(\omega^2+4)(\omega^2+9)} = 0$$

ここで $K=0$ でないとすると、 $\omega=0$ または $\omega^2=11$ の時である。

また、 $\omega=0$ の時は、位相が零の時であるから、ゲイン余裕の対象ではない。したがって、 $\omega^2=11$ の時に -180° となる。

この時の振幅は、

$$A(\omega) = \left| \frac{6K(11-1)}{(11+1)(11+4)(11+9)} \right| = \left| \frac{-60K}{12 \cdot 15 \cdot 20} \right| = \frac{K}{60}$$

従って、ゲイン余裕は、

$$1 - A(\omega) = 1 - \frac{K}{60}$$

この制御系が安定であるためには、ゲイン余裕 > 0 条件から、

$$1 - \frac{K}{60} > 0$$

$$1 > \frac{K}{60}$$

これより、制御系の安定条件は、 $K < 60$ が得られる。(ただし、 K は正の値：)
このようにベクトル軌跡の形状がわからなくても、安定条件を求めることができる。

