

システム制御工学テキスト(改訂 7)

2006 年 10 月

水産科学研究科 生産工学講座 芳村 康男

1. 自動制御の概要と歴史	-----	1
2. フィードバック制御と応答	-----	6
3. 制御系要素の特性と表現 (運動の表記と解法、伝達関数、 インパルス応答・ステップ応答)	-----	11
4. システムの構成例	-----	26
5. システムの安定性	-----	34
6. 制御系の具体的実現	-----	45
7. 現代制御理論の概要	-----	53

‡:このマークが付してある著作物は、第三者が有する著作物ですので、同著作物の再使用、同著作物の二次的著作物の創作等については、著作権者より直接使用許諾を得る必要があります。

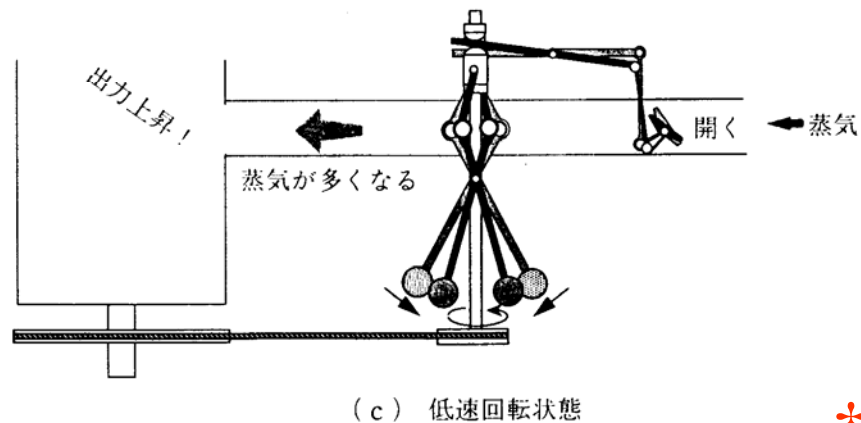
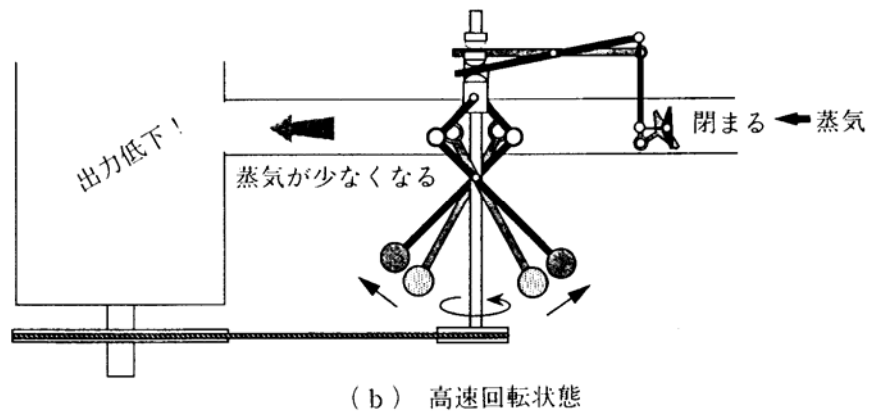
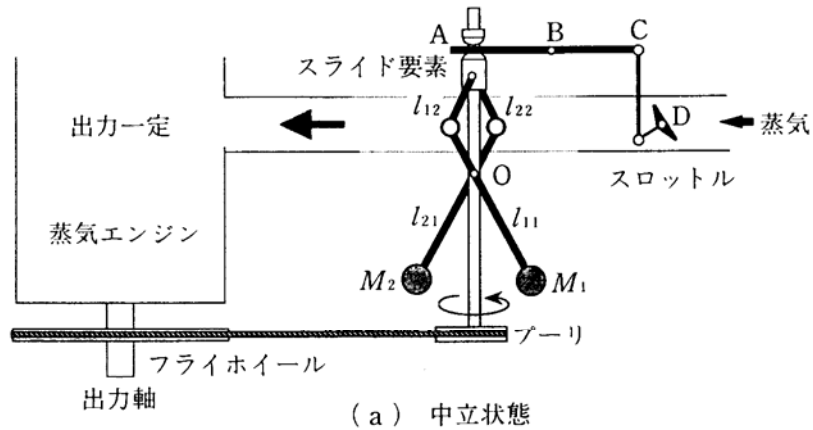
1. 自動制御の概要と歴史

1. 1 自動制御の歴史的背景

著作権処理の都合で、
この場所に挿入されていた
増淵正美：自動制御基礎理論,コロナ社,1964 の文章を
省略させていただきます。

関連歴史

- 1784年：J.Watt の蒸気機関の遠心调速機(governor)
- 1779年：Laplace 変換理論
- 1868年：Maxwell の「On Governors」
- 1877年：Routh の安定理論
- 1891年：飛行機の安定化にジャイロを適用
- 1914年：Sperry のオートパイロット
- 1932年：Nyquist の安定判別理論
- 1940年：Evans の根軌跡法



J.Watt の蒸気機関の调速器の動作原理

(大須賀公一、足立修一、システム制御へのアプローチ、コロナ社、p.149, 1999 より)



1.2 制御とシステム

「制御」とは、 広義の意味：理性ある行為。（理性：観測と客観的評価基準に基づく判断。）
工学的意味：ある目的に適合するように、対象となっている物に所用の操作を加える。(JIS) <制御対象>

「システム」とは、あることを生み出す要素の郡。「系」とも表現される。

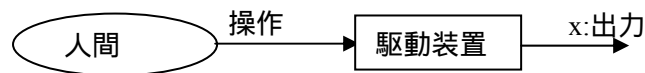
1.3 制御の種類

(1) 操作の形態による分類：

a) 手動制御：人間が制御動作を行う制御

例) 自転車、自動車の運転

自動車の向きを変えようとしてハンドルを切ってもすぐ向きが変わらない。
アクセルを踏んでもすぐに加速できない、ブレーキを踏んでもすぐには止まらない。
このように、制御対象には遅れがある。（この遅れはハンドル、アクセル、ブレーキの操作のしかたによっても異なる。）
この遅れを人間が習熟して操作して自動車を思うように動かせるようになる。

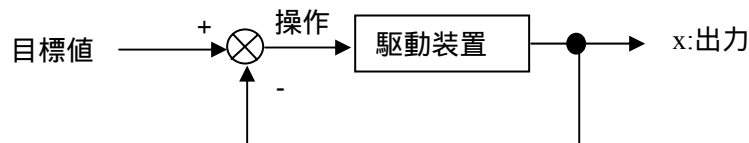


b) シーケンス制御：操作をある順序 (sequence) に従って自動操作する。

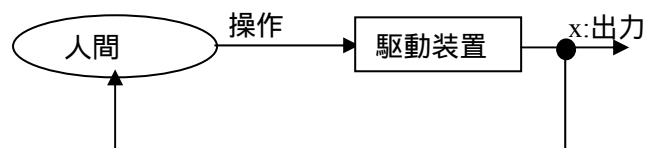
外乱による影響が少なく、事前にどのような操作を制御対象に次々と加えればよいか予めわかっている場合に有効。ただし、結果の保証はない。

c) フィードバック制御：操作結果が所定の結果になるよう、常に結果を入力に戻す制御。

制御対象の特性が複雑であったり、結果を乱す外乱が少々あっても、最終的に目標値に到達できる。



前述の a) の手動制御では、人間がこのフィードバックの役割を果たしていることが多い。したがって a) の手動制御は "manual feedback control" とも言える。



(2) 制御対象による分類

a) プロセス制御：温度、流量、圧力、濃度などの工業プロセスの状態量を制御量とする制御

b) サーボ制御：物体の位置、方位、姿勢などの機械的変位を制御量とし、目標値の位置の変化に追従するように構成された制御

(3) 目標値による分類

a) 定値制御：目標値が一定の制御。（例）温度一定とか、圧力一定

b) 追従制御：目標値が任意に変化をする制御。サーボ系のほとんどがこれに当てはまる。

c) プログラム制御：目標値があらかじめ時間的に決められた変化をする制御

(4) 制御ロジックの種類による分類

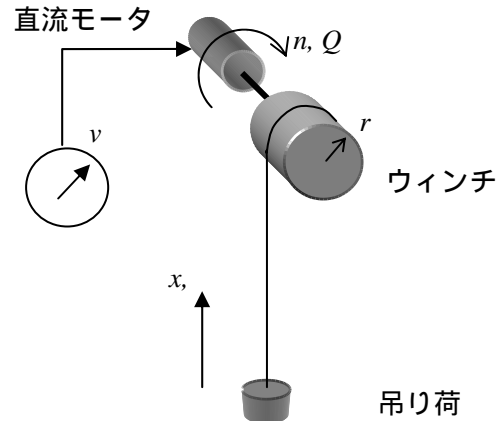
： a) 古典制御、 b) 最適制御、 c) 適用制御、 d) H_∞ 制御、

e) エキスパートシステム制御、 f) ファジィ制御、 g) ニューラルネットワーク制御

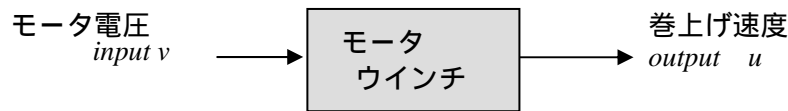
1.4 制御の具体例

簡単な制御を行う場合を例にとって、その具体的システムを考えてみよう。

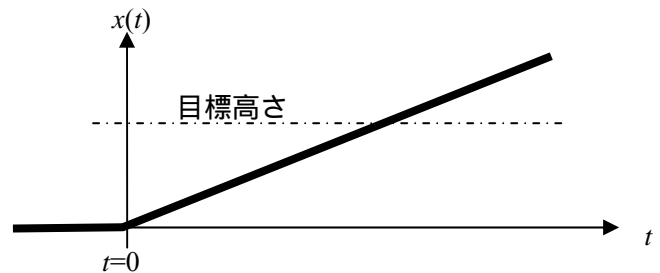
モータでウインチを巻き上げ、巻き降ろす場合を例にとって考えてみよう。ウインチのロープの先端には吊り荷がある。



モータに加える電圧を v とすると、この電圧に比例してモータの回転数 n になるとすると、吊り荷の巻き上げ速度はモータ電圧に比例する。この関係は下図のように表せる。



モータ電圧 v を一定とすると、巻き上げ速度も一定になり、吊り荷の位置は左図のように変化する。



ここで、吊り荷をある目標の高さまで吊り上げる場合を考えてみよう。

そのためには、次のことが必要になる。

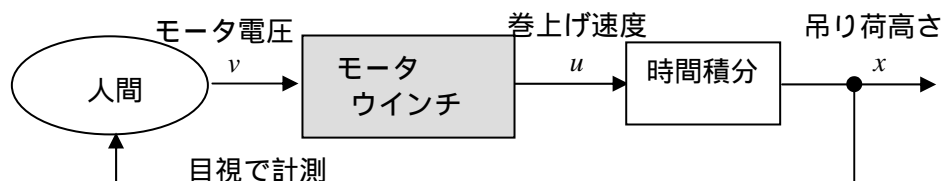
モータに電圧を与えウインチを起動する。

吊り荷の位置 x が目標高さになれば、電圧を零にし、ウインチを停止する。

a) 手動制御の場合

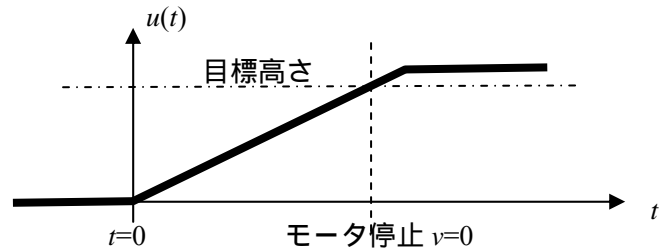
- (1) 人が「実際の吊り荷の高さ」と「目標高さ」の差を目視し、スイッチでモータ電圧を与えてウインチを起動する。その際、「現在の吊り荷の高さ」と「目標高さ」の差が十分あれば、モータ電圧を上げてウインチの回転数を速くして、短時間で巻き上げるかもしれない。
- (2) 「実際の吊り荷の高さ」が「目標高さ」に近づくと、モータ電圧を下げて、ウインチの回転数を遅くし、「目標高さ」になる直前にモータ電圧を零にして、ウインチを停止する。
- (3) ウインチを停止した時に、「目標高さ」に達していなければ、モータ電圧を最小にしてウインチを微動に巻き上げ、「目標高さ」に近づける。
逆に、「目標高さ」を行き過ぎた場合は、モータ電圧を逆にして、ウインチを微動に巻き下ろし、「目標高さ」に近づける。

この場合の制御を図にすると、下図のようになる。

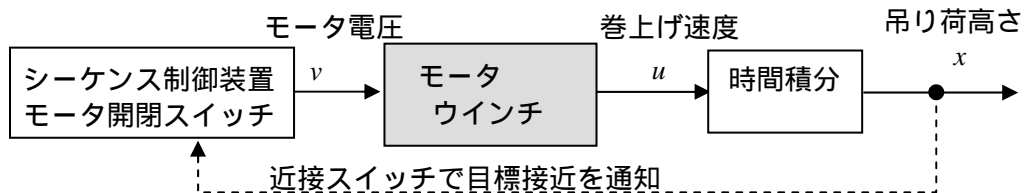


b) シーケンス制御の場合

- (1) 「目標高さ」が「巻き上げ」の方向か「巻下ろし」の方向を機械的・電氣的に判断し、モータ電圧を与えてウインチを一定速度で起動する。
- (2) 「現在の吊り荷の高さ」が「目標高さ」に近づくと、あらかじめ設けられたスイッチが作動し、モータ電圧を零にして、ウインチを停止する。
- (3) モータ電圧を零にしても、モータ、ウインチ、また吊り荷には慣性があるので、ウインチは直ぐには止まらない。右図のように目標の位置を通り過ぎてウインチが止まることになるので、この行き過ぎ量を予め求めておき、近接スイッチを設置する。したがってウインチが「目標高さ」に達するか否かは、この近接スイッチの設置場所に依存する。(旧式のエレベータはこの制御方法が多い。)

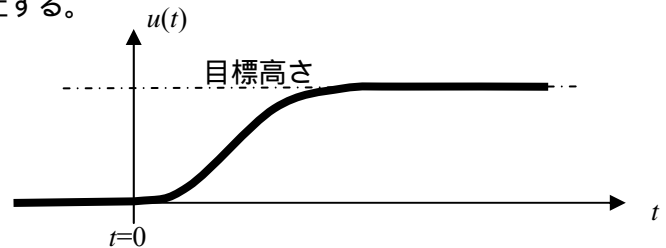


この場合の制御を図にすると、下図のようになる。

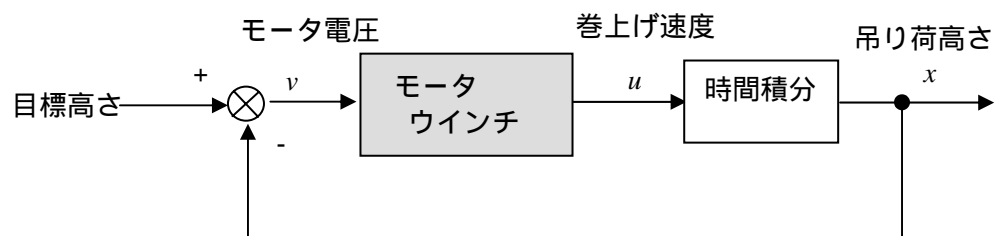


c) フィードバック制御の場合

- (1) 「目標高さ」と「実際の吊り荷の高さ」との差を常に電氣的または機械的に計測し、この差が零になるよう連続的あるいは断続的に制御する。したがって、「吊り荷の高さ」は最終的に目標値に一致して自動的に停止する。



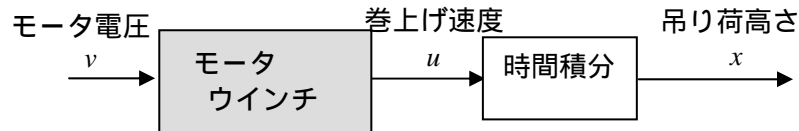
この場合の制御を図にすると、下図のようになる。



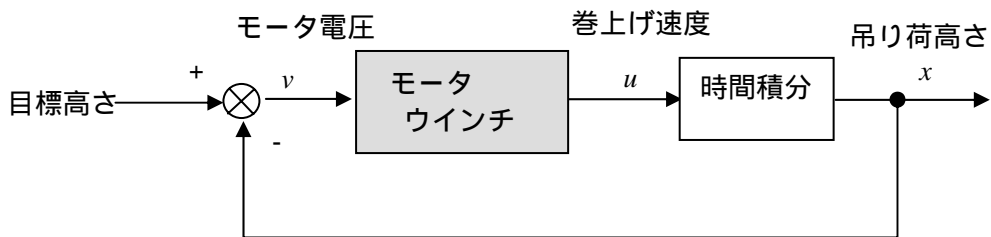
2. フィードバック制御と応答

2.1 フィードバック制御の概念

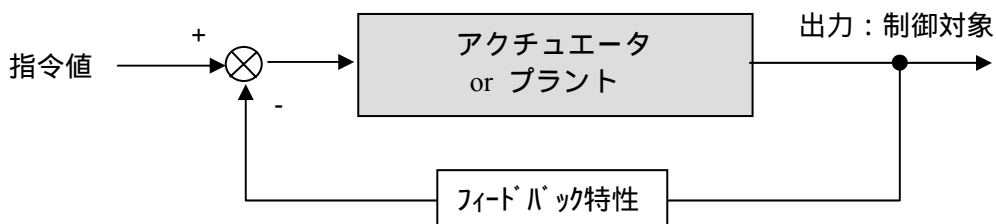
前述のウインチの例において、モータに電圧を加えるとモータが回転し、何らかの制御を行わない限り、モータは回り続け、吊り荷は上限まで巻き上げられる。



このようシステムでは、熟練した人間がモータを操作するか、適切な制御装置が必要である。その制御の代表的なのが、フィードバック制御である。この制御においては、既に述べたように、「目標高さ」と「実際の吊り荷の高さ」との差を常に電氣的または機械的に計測し、この差が零になるよう連続的あるいは断続的に制御する。したがって、「吊り荷の高さ」は最終的に目標値に一致して自動的に停止する。



このように、最終的に制御対象となる物理量を駆動装置（アクチュエータ、あるいはプラント）の入力に戻す操作のことをフィードバック(feed back)と言い、こうした制御をフィードバック制御という。またこのようなシステムでは閉ループ(closed loop)を形成しているので閉ループ制御系と言われる。より一般的に書くと下図となる。



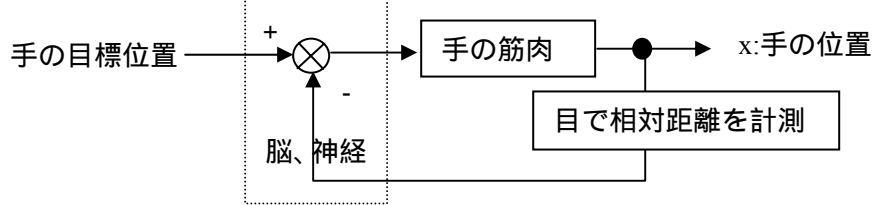
フィードバック制御の基本ブロック線図

このシステムでは、制御対象の特性が複雑であったり、結果を乱す外乱が少々あってもあっても、最終的に目標値に到達できることになるが、制御対象の特性やフィードバックの特性によっては、「行き過ぎ」あるいは「不足・遅過ぎ」などが生じることがある。つまり目標値の周辺で「振動する」あるいは「なかなか目標値に到達しない」等が生じる。安定な制御系の設計とは、制御対象の特性に合ったフィードバックを設計することにある。

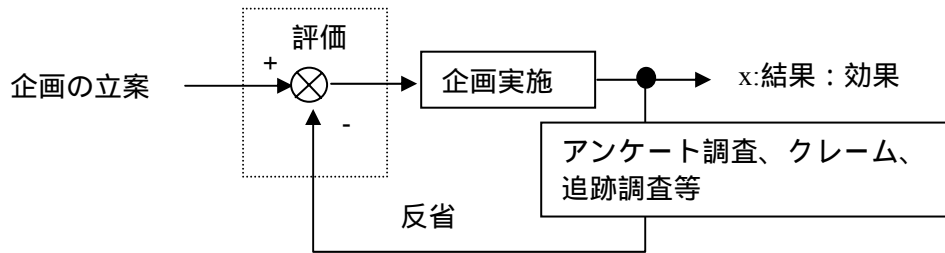
2.2 フィードバックシステムの例

見方によれば、フィードバックとは「反省」であって、このようなシステムは生体、社会現象でも多く見られ、また実際にも応用されている。

(生体现象の例：目で見て物をつかむ操作)



(社会現象の例：有効な企画の実施)



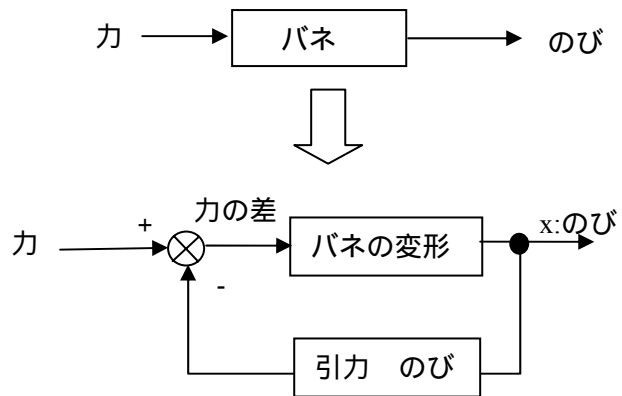
2.3 自然界に内在するフィードバック(復原力)

フィードバックを形成するものは、自然界の物性そのものにも数多く内在する。物に力を作用し、それに反作用が働いて力が平衡する場合、その力のやりとりの関係においてフィードバックを形成していると考えられることができる。

(バネにあたえた力とのび)

バネを引っ張るとバネはその力に応じてのびる。

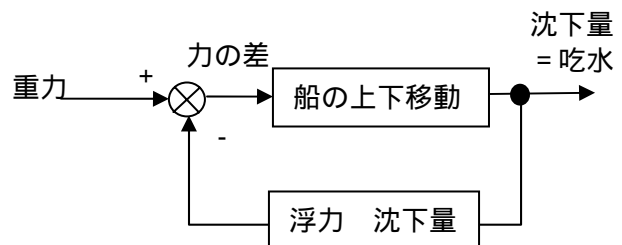
この現象を分解すると、バネに力が加わると変形を始める。この変形に比例した抗力がバネに発生し、最終的に加えた力と抗力が釣り合う所までバネが変形する(のびる)結果となる。これをブロック線図に示すと右図になる。



(船やブイの復原力)

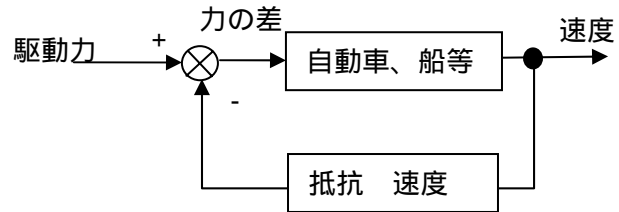
鉄で作られた船やブイはどうして沈まないで、波の中でも浮いていられるのだろうか？

これは、バネと同じように、水に浸かった体積に比例して浮力が船やブイに働くからで、これをブロック線図に示すと右図になる。



(自動車や船の抵抗)

自動車や船に走行抵抗(摩擦、風圧)が働かなければ、いくらでも速度を出すことができる。しかし、現実には抵抗が発生し、その力が駆動力に等しくなる速度までしか走行できない。



2.4 ネガティブフィードバックとポジティブフィードバック

(1) ネガティブフィードバック (負帰還: negative feedback)

前述のシステムでは、制御対象の結果(出力)が目標値に対して「行過ぎ」あるいは「不足」があった時、それを修正する操作を行う。つまり出力を引き算としてフィードバックする方式で、これをネガティブフィードバックという。この場合、安定した制御系、安定した社会が形成できる。

(2) ポジティブフィードバック (正帰還: positive feedback)

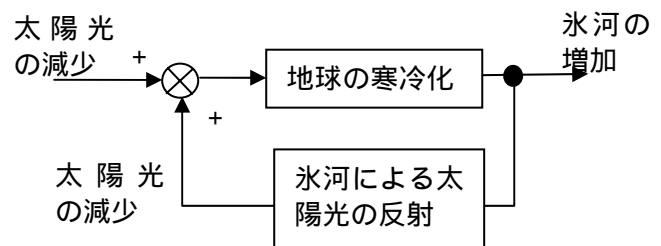
上記に対して、制御対象の結果(出力)が目標値に対して「行過ぎ」あるいは「不足」があった時、それを更に助長する方向に操作を行う。つまり出力を足し算としてフィードバックする方式で、これをポジティブフィードバックという。最終結果結果を加算の形でフィードバックする。自然現象では核爆発。社会現象ではパニック社会となるが、電子回路では発信器、あるいは応答を一時的に促進させ、いち早く目標値に近づける手法として活用される場合がある。

(自然現象におけるポジティブフィードバックの例)

火山に噴火や巨大いん石の衝突で太陽光が遮られると地球表面の温度は低下し、氷河や雪原が増加。これが太陽光を反射して、益々地表の温度が低下する。(氷河期)

逆に、太陽光が増加すると氷河が融け、太陽光を地表は益々太陽熱を吸収し、温度が上昇する。

地表温度は一つ間違つと、どちらか一方に偏る特性が内在し、微妙な環境のバランスの上に成り立っている。



2.5 フィードバックの種類

既に紹介した操舵機の例では、制御対象の出力(結果、制御量:この場合舵角)をそのままフィードバックしているが、フィードバックには種々の方法がある。

自動車を習い始めた人がハンドルを操作する場合を例に考えてみよう。この場合のフィードバックは機械やコンピュータではなく、人間が目で道路の状況を見て操作をすることになる。ハンドルの操作によって出力されるのは自動車の旋回する速度(旋回曲率)である。

「まず、真っ直ぐな道を走行する時、多くの場合道路の端を、車の前方の何か目印との間隔を比較しながら注視している。もし、この距離が少なかったら、ハンドルを右に取り、逆に距離が大き過ぎるとハンドルを左に切る。このようにして蛇行しながら走るのが初心者に見られる特徴である。また、この道路端と車両との間隔を更にもっと注意して運転すると、蛇行する周期は短くなり、蛇行の幅が小さくなる。もっと慣れてくると、操作に対する予想あるいは変化が次第にわかるようになってきて、車の向きと道路の向きもわかるようになって蛇行も少なく、正確に走ることができるようになる。この段階で、彼は蛇行の振幅を零にするよう、蛇行の振幅に「比例した制御」と、この振幅の時間的変化をも認知して早め早めに蛇行を零にする「微分制御」ができるようになる。

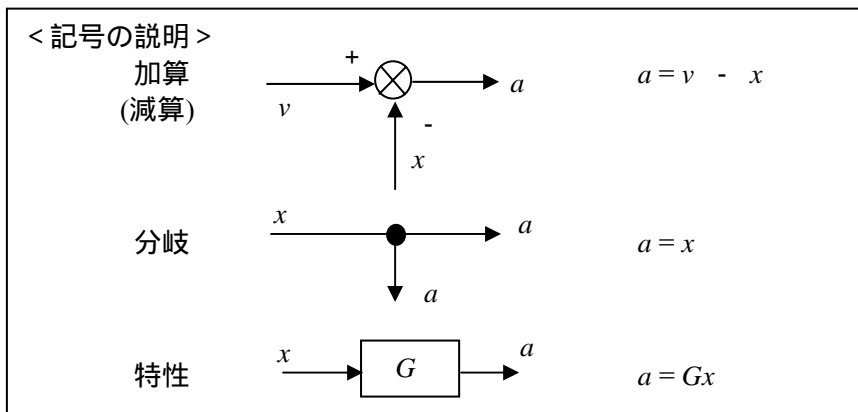
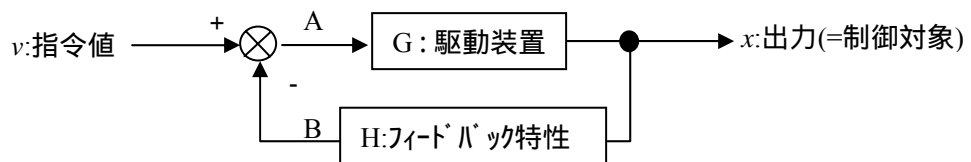
ところが、次にカーブにさしかかると、直進走行とは異なり別な要素が必要になる。ある一定のカーブに入ると、ハンドルの中央は直進中とは異なり、そのカーブに応じた「新しい中央」を予測する必要に迫られる。これが「積分制御」である。」(Theory of Servomechanisms より)

制御における代表的なフィードバックの方法として要約すると

- 制御量に比例するフィードバック 「比例制御(proportional control)」
- 制御量の時間的変化をフィードバック 「微分制御(derivative control)」
- 制御量の時間的積分をフィードバック 「積分制御(integral control)」

5.) ブロック線図

前述まではフィードバックの特徴を概念的に示したが、次に若干数式を使って、フィードバック制御系の特徴を見てみよう。



上図のブロック線図において、

$$B \text{ 点における値} : B = Hx \quad \text{----- (2.1)}$$

$$A \text{ 点における値} : A = (v - B) \quad \text{----- (2.2)}$$

$$\text{出力の値} : x = GA = G(v - Hx) \quad \text{----- (2.3)}$$

$$(2.3) \text{式より} \quad (1 + GH)x = Gv$$

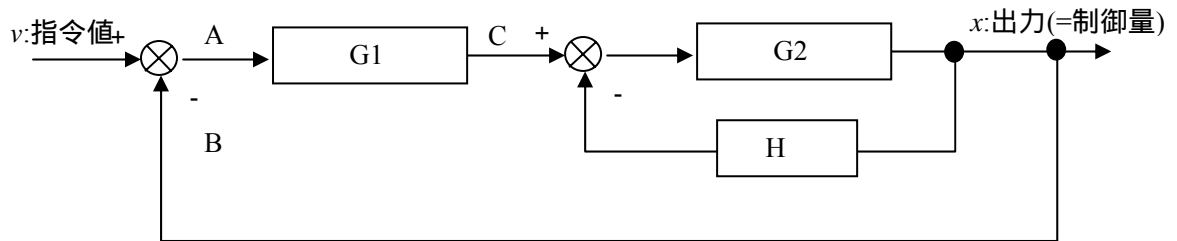
$$x = \frac{G}{1 + GH} v = \frac{1}{1/G + H} v \quad \text{----- (2.1)}$$

ここで、 G が大きい場合、 $1/G \rightarrow 0$ となるので、

$$x = (1/H)v$$

となる。つまり、出力(結果)は G の特性の如何にかかわらず、これが大きければ指令入力 v の $(1/H)$ となることを示している。逆に、指令入力に等しい出力結果を得るには $H=1$ が必要になる。

< 多重にフィードバックを持つ場合 >



上図のブロック線図において、

C 点と x の関係は(2.1)式で与えられた。すなわち、

$$x = \frac{G2}{1+G2 H} C \quad \text{----- (2.2)}$$

B 点における値 : $B=x$ ----- (2.3)

A 点における値 : $A=(v - B)$ ----- (2.4)

C 点における値 : $C=G1 A$ ----- (2.5)

(2.2)式から(2.5)式より

出力の値 :

$$\begin{aligned} x &= \frac{G2}{1+G2 H} G1 A \\ &= \frac{G1G2}{1+G2 H} (v - B) \\ &= \frac{G1G2}{1+G2 H} (v - x) \end{aligned}$$

これより、

$$\left(1 + \frac{G1G2}{1+G2 H}\right) x = \left(\frac{G1G2}{1+G2 H}\right) v$$

$$(1+G2H + G1G2)x = G1G2 v$$

すなわち、

$$x = \left(\frac{G1G2}{1+G2H+G1G2}\right) v$$

3. 制御システム要素の特性と表現

システムが入力に対して思うような結果（応答:response）になっているか、あるいはシステムが安定に動くかどうかを検討し、制御システムを設計する場合、制御対象やフィードバックを数式で表現することが不可欠になる。使用する数式の取り扱いは制御対象によって異なってくる。

制御対象	数式
・ 物体の運動 (船・航空機・機械全般)	運動方程式
・ 物体の歪み・振動 (構造物・部材)	弾性方程式
・ 電気回路 (電気電子機器)	電流方程式
・ その他の現象	適切な記述モデル

漁業機械や漁船の制御といった場合、制御対象はこうした運動であり、記述モデルには通常、運動方程式が使われる。

3.1 運動方程式

制御対象となる多くの機械の運動は「光速」に比べて非常に遅い運動であり、ニュートンの古典力学の範囲で十分記述できる。またほとんどの場合、物体の変形を考える必要がないので、物体の質量を重心(center of gravity)で代表させた質点系の力学で表される。

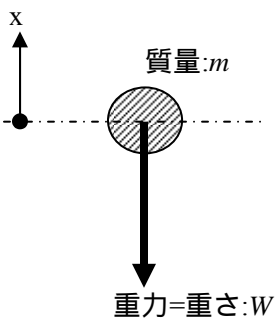
ニュートン力学の公式、

$$\text{直線運動： (質量)} \times (\text{加速度}) = (\text{作用する力}) \text{ ----- (3.1)}$$

$$\text{回転運動： (慣性モーメント)} \times (\text{角加速度}) = (\text{作用するモーメント}) \text{ ---- (3.2)}$$

座標系（原点と軸の方向）は取り扱い易いように自由に決めてよいが、これを明確にすることが重要。また、力は運動の方向と同じ向きを正側にとる。

[物体の自由落下運動]



位置 : x

速度 : dx/dt (位置: x を時間: t で微分した量)

加速度 : $d(dx/dt)/dt$ (速度(dx/dt)を時間: t で微分した量)
 $=d^2x/dt^2$

物体に作用する力 : 重力

$$\text{運動方程式： } m(d^2x/dt^2) = -W \quad (= -mg) \text{ ----- (3.3)}$$

g :重力加速度

この自由落下の運動では、物体に作用する力として重力のみを考えたが、現実には物体の速度に依存した空気抵抗が働く。これを単純化して、速度に比例すると仮定すると、

$$\text{物体に働く抵抗} = -a(dx/dt)$$

これを入れると運動方程式は次式となる。

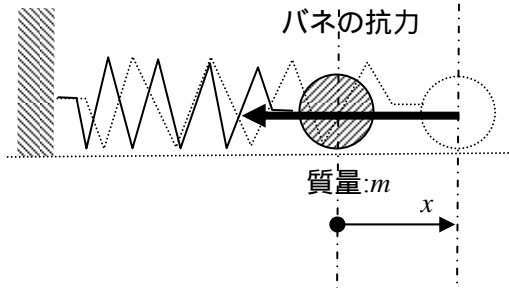
$$\text{運動方程式： } m(d^2x/dt^2) = -W - c(dx/dt)$$

$$\text{すなわち } m(d^2x/dt^2) + a(dx/dt) = -W \text{ ----- (3.3')}$$

[バネに付けた物体の運動] 位置 : x そのままでは運動しないので x 変位したと仮定
 速度 : dx/dt (位置 x を時間 t で微分した量)
 加速度 : $d(dx/dt)/dt$ (速度 (dx/dt) を時間 t で微分した量)
 $=d^2x/dt^2$

物体に作用する力 バネの抗力 : $(W-kx)$

物体に働く空気抵抗 : $-a(dx/dt)$



運動方程式 : $m(d^2x/dt^2) = -kx - a(dx/dt)$

すなわち $m(d^2x/dt^2) + a(dx/dt) + kx = 0$ ----- (3.4')

[水面に浮かんだブイの運動(1)] 位置 : x そのままでは運動しないので x 上昇したと仮定

速度 : dx/dt (位置 x を時間 t で微分した量)
 加速度 : $d(dx/dt)/dt$ (速度 (dx/dt) を時間 t で微分した量)
 $=d^2x/dt^2$

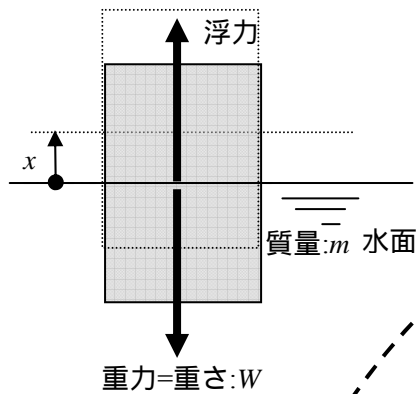
物体に作用する力 重力 : $-W$

浮力 : $\rho g A_w(d-x)$

$A_w d$: 運動前の浸水体積

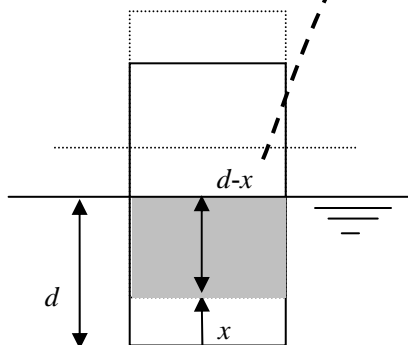
$A_w x$: ブイの上昇による浸水体積の減少

ρg : 水の比重



運動方程式 : $m(d^2x/dt^2) = -W + \rho g A_w(d-x)$

すなわち $m(d^2x/dt^2) + \rho g A_w x = 0$ ----- (3.5)



空気抵抗と同じく、実際はブイが上下運動する速度に比例した抵抗が水から受ける。これを、

ブイに働く抵抗 = $-c(dx/dt)$

と仮定すると、運動方程式は次式となる。

運動方程式 : $m(d^2x/dt^2) = -W + (W - \rho g A_w x) - c(dx/dt)$

すなわち $m(d^2x/dt^2) + c(dx/dt) + \rho g A_w x = 0$ ----- (3.5')

3.2 運動方程式の解法

運動方程式が決まると初期条件に従って時々刻々の運動を計算することができる他、制御システムの伝達関数を求めることができる。

(1) 定常解

時々刻々の運動は初期条件で異なるが、十分時間が経った時(原理的には無限時間後であるが)の運動は初期条件に左右されない。外力が一定(時間的に変化しない)の場合、その解は極めて簡単で、運動方程式中の最低階の項を残して計算するだけで求まる。

[物体の自由落下運動] $m(d^2x/dt^2)+a(dx/dt) = -W$ ---- (3.3')

の定常解

	$a(dx/dt) = -W$	---- (3.3'')
すなわち	$(dx/dt) = -W/a$	---- (3.3''')

この速度は「終速度」と呼ばれ、その大きさは物体の重さ / 抵抗係数 $= (\rho g \text{ 物体の体積}) / (Cd \text{ 物体の断面積})$ で表され、比重 ρ が軽くて断面積の大きなものほど速度が小さくなる。(風船・パラシュートの原理)

[バネに吊された物体の運動] $m(d^2x/dt^2)+a(dx/dt)+kx = 0$ ----- (3.4')

の定常解

	$kx = 0$	----- (3.4'')
すなわち	$x = 0$	----- (3.4''')

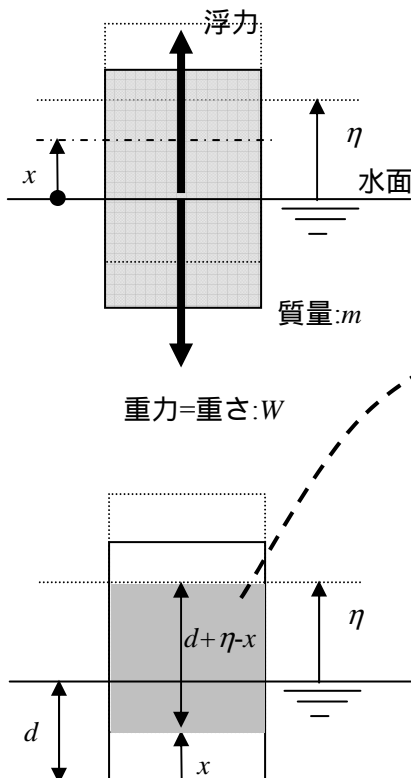
[水面に浮かんだブイの運動(1)] $m(d^2x/dt^2)+c(dx/dt)+\rho g A_w x = 0$ ---- (3.5')

の定常解

	$\rho g A_w x = 0$	---- (3.5'')
すなわち	$x = 0$	---- (3.5''')

<水面に浮かんだブイの運動(2)>

では、ブイの上下位置が変化した場合の運動であった。今度は水面が変化した場合のブイの運動を調べて見よう。



[運動方程式]

水面の上昇: η
 位置: x
 速度: dx/dt (位置 x を時間 t で微分した量)
 加速度: $d(dx/dt)/dt$ (速度 (dx/dt) を時間 t で微分した量)
 $= d^2x/dt^2$
 物体に作用する力 重力: $-W = -\rho g A_w d$
 浮力: $\rho g A_w (d-x+\eta)$
 抵抗: $-c(dx/dt)$

運動方程式:	$m(d^2x/dt^2) = -\rho g A_w d + \rho g A_w (d-x+\eta) - c(dx/dt)$
すなわち	$m(d^2x/dt^2)+c(dx/dt)+\rho g A_w x = \rho g A_w \eta$ ---- (3.6')

[定常解] (3.6)式で、 $(d^2x/dt^2)=(dx/dt)=0$ と置く。

	$\rho g A_w x = \rho g A_w \eta$	---- (3.6'')
すなわち	$x = \eta$	---- (3.6''')

(2) 初期値からの解法

時々刻々の運動を求めるには幾つかの方法がある。ここでは、Laplace 変換（片側 Laplace 変換）について要点を説明する。この方法を用いると、次の利点がある。

- 1) 複雑な微分方程式を簡単な代数方程式として取り扱える。
- 2) 伝達関数、すなわち要素の表現が容易なこと。

Laplace 変換を実用面から一言でいえば、時間領域の現象を s という周波数領域への変換操作であり、積分区間を時間 0 、 $s=j\omega$ とおくと Fourier 変換と全く同じになる。

$\begin{aligned} \text{Laplace 変換: } F(s) &= \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad \text{----- (3.11)} \\ &= \mathcal{L} f(t) \end{aligned}$

$\begin{aligned} \text{Fourier 変換: } F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \quad \text{----- (3.12)} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t - j \sin \omega t dt \\ &\quad \omega = 2\pi f \\ &\quad f: \text{周波数(Hz)} \end{aligned}$
--

Laplace 変換のメリット

- 1) 複雑な微分方程式（運動方程式、電流方程式...）が簡単な代数方程式に置き換えられる。

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(df(t)/dt) &= s \mathcal{L}f(t) - f(0) \\ \mathcal{L}(d^2f(t)/dt^2) &= \mathcal{L}s(df(t)/dt) - d(f(t)/dt)_{t=0} \\ &= s\{s\mathcal{L}f(t) - f(0)\} - (df(t)/dt)_{t=0} \\ &= s^2 \mathcal{L}f(t) - sf(0) - (df(t)/dt)_{t=0} \\ \mathcal{L}(d^3f(t)/dt^3) &= s^3 \mathcal{L}f(t) - s^2f(0) - s(df(t)/dt)_{t=0} - (d^2f(t)/dt^2)_{t=0} \\ &\vdots \\ \mathcal{L}(d^nf(t)/dt^n) &= s^n \mathcal{L}f(t) - \sum \{s^{(n-1)}f(0) - s^{(n-2)}(df(t)/dt)_{t=0} - s^{(n-3)}(d^2f(t)/dt^2)_{t=0} \dots\} \quad \text{----- (3.13)} \end{aligned}$$

(積分についても同様)

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(t)dt\right) = \frac{\mathcal{L}f(t)}{s} + \frac{0}{s} \quad \text{----- (3.14)}$$

ここで初期値が零の場合、上式はいずれも第1項のみとなり、極めて簡単になる。

- 2) 線形性が保たれる。

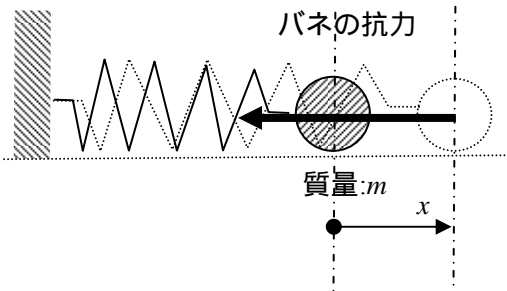
$$\mathcal{L}\{a_1f_1(t) + a_2f_2(t)\} = a_1 \mathcal{L}f_1(t) + a_2 \mathcal{L}f_2(t) \quad \text{----- (3.15)}$$

Laplace 変換の例 (重要な式)

$f(t)$		$\mathcal{L} f(t)$	
1	$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{s}$	$\frac{1}{s+\alpha}$
t	$e^{-\alpha t} t$	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{1}{(s+\alpha)^2}$
$t^{(n-1)}/(n-1)!$	$e^{-\alpha t} t^{(n-1)}/(n-1)!$	$\frac{1}{s^n}$	$\frac{1}{(s+\alpha)^n}$
$\sin \beta t$	$e^{-\alpha t} \sin \beta t$	$\frac{\beta}{s^2+\beta^2}$	$\frac{\beta}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$
$\cos \beta t$	$e^{-\alpha t} \cos \beta t$	$\frac{s}{s^2+\beta^2}$	$\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$

以上の知識を基に、Laplace 変換を用いて先の運動方程式を解いてみよう。その際、多くの場合、速度の初期値は零であり、位置の初期値のみ考えることにする。こうすることにより、変換が容易になり、微分方程式を楽に解法することができる。

[バネに付けた物体の運動] 空気抵抗を考慮しない場合。



$$\begin{aligned} \text{運動方程式: } m(d^2x/dt^2)+kx &= 0 \quad \text{----- (3.4)} \\ \text{初期位置: } &x_0 \end{aligned}$$

(3.4)式を Laplace 変換すると、

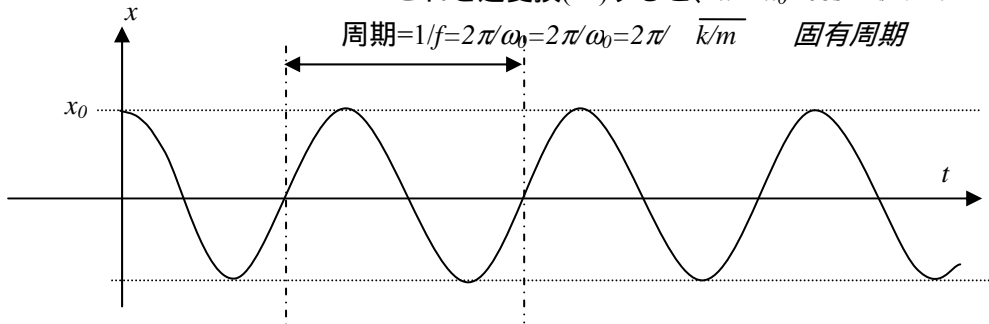
$$m(s^2 \mathcal{L}x - sx_0) + k \mathcal{L}x = 0 \quad \text{----- (3.4a)}$$

$$(m s^2 + k) \mathcal{L}x - m s x_0 = 0 \quad \text{----- (3.4b)}$$

これより、

$$\mathcal{L}x = \frac{m s x_0}{(m s^2 + k)} = \frac{s x_0}{(s^2 + k/m)} \quad \text{--- (3.4c)}$$

これを逆変換()すると、 $x = x_0 \cos \sqrt{k/m} t$ ---- (3.4d)



空気抵抗を考えた場合。

$$\begin{aligned} \text{運動方程式: } m(d^2x/dt^2)+a(dx/dt)+kx &= 0 \quad \text{----- (3.4')} \\ \text{初期位置: } &x_0 \end{aligned}$$

(3.4')式を Laplace 変換すると、

$$m(s^2 \mathcal{L}x - sx_0) + a(s \mathcal{L}x - x_0) + k \mathcal{L}x = 0 \quad \text{----- (3.4a')}$$

$$(m s^2 + a s + k) \mathcal{L}x - (m s + a)x_0 = 0 \quad \text{----- (3.4b')}$$

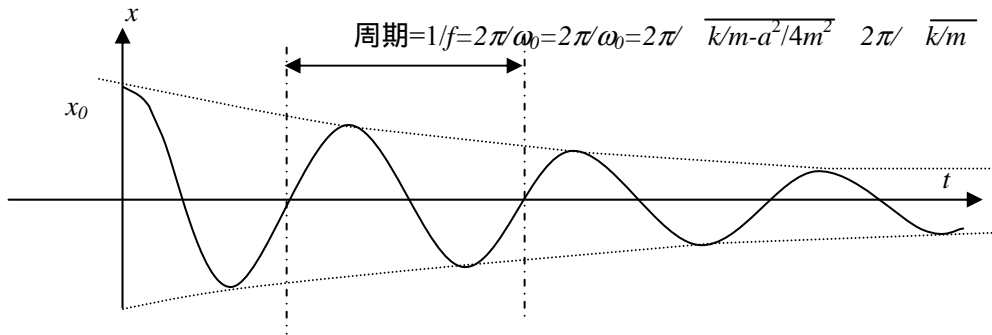
$$\begin{aligned} \mathcal{L}x &= \frac{(ms+a)x_0}{(ms^2+as+k)} = x_0 \frac{(s+a/m)}{\{s^2+(a/m)s+k/m\}} \\ &= x_0 \frac{\{s+(a/2m)\}+(a/2m)}{\{s+(a/2m)\}^2+(k/m-a^2/4m^2)} \\ &= x_0 \frac{\{s+(a/2m)\}+\{(a/2m)/\sqrt{k/m-a^2/4m^2}\} \sqrt{k/m-a^2/4m^2}}{\{s+(a/2m)\}^2+(\sqrt{k/m-a^2/4m^2})^2} \end{aligned} \quad \text{----- (3.4c')}$$

これを逆変換 (,) すると ,

$$\begin{aligned} x &= x_0 e^{-(a/2m)t} \cos\left(\frac{\sqrt{k/m-a^2/4m^2}}{k/m-a^2/4m^2} t\right) \\ &\quad + x_0 \{(a/2m)/\sqrt{k/m-a^2/4m^2}\} e^{-(a/2m)t} \sin\left(\frac{\sqrt{k/m-a^2/4m^2}}{k/m-a^2/4m^2} t\right) \end{aligned} \quad \text{----- (3.4d')}$$

ここで a が十分小さい場合 , $a^2/4m^2 \approx 0$

$$x \approx x_0 e^{-(a/2m)t} \cos\left(\frac{t}{\sqrt{k/m}}\right) \quad \text{----- (3.4e')}$$



【Laplace 逆変換のポイント】 (部分分数へ変換)

逆変換するには前述の基本型が使えるように Laplace 変換式を上手く変形する。

[例 1] $\frac{\kappa_1 s + \kappa_2}{(s + \alpha_1)(s + \alpha_2)} = \frac{a_1}{s + \alpha_1} + \frac{a_2}{s + \alpha_2}$

[例 1'] $\frac{\kappa_{n-1} s^{n-1} + \kappa_{n-2} s^{n-2} + \dots + \kappa_0}{(s + \alpha_1)(s + \alpha_2) \dots (s + \alpha_n)} = \frac{a_1}{s + \alpha_1} + \frac{a_2}{s + \alpha_2} + \dots + \frac{a_n}{s + \alpha_n}$

[例 1''] $\frac{\kappa_{n-1} s^{n-1} + \kappa_{n-2} s^{n-2} + \dots + \kappa_0}{(s + \alpha)^n} = \frac{a_1}{s + \alpha} + \frac{a_2}{(s + \alpha)^2} + \dots + \frac{a_n}{(s + \alpha)^n}$

[例 2] $\frac{\kappa_2 s^2 + \kappa_1 s + \kappa_0}{(s^2 + \beta^2)(s + \alpha)} = \frac{b_1 s + a_1}{s^2 + \beta^2} + \frac{a_2}{s + \alpha}$

[例 3] $\frac{\kappa_3 s^3 + \kappa_2 s^2 + \kappa_1 s + \kappa_0}{(s^2 + \beta_1^2)(s^2 + \beta_2^2)} = \frac{b_1 s + a_1}{s^2 + \beta_1^2} + \frac{b_2 s + a_2}{s^2 + \beta_2^2}$

[例 4] $\frac{\kappa_4 s^4 + \kappa_3 s^3 + \kappa_2 s^2 + \kappa_1 s + \kappa_0}{(s^2 + \beta_1^2)(s^2 + \beta_2^2)(s + \alpha)} = \frac{b_1 s + a_1}{s^2 + \beta_1^2} + \frac{b_2 s + a_2}{s^2 + \beta_2^2} + \frac{a_3}{s + \alpha}$

以上のように、部分分数にすることによって、複数の基本型に展開でき、Laplace 逆変換が可能になる。

3.3 制御系要素の記述

1) 伝達関数

Laplace 変換を用いると複雑な微分方程式が通常の代数方程式のように解け、時々刻々の運動が計算できることがわかった。次には、これをブロック線図で表現することを考える。そのために、先に説明したブロック線図を時々刻々の時間軸変数ではなく、Laplace 変換した空間（一種の周波数空間）に置き換えて考える。ただし、ここで初期値は考えない。

例えば例題のブイの運動(2)において、運動方程式は、

$$m(d^2x/dt^2)+c(dx/dt)+kx=k\eta \quad \text{--- (3.6')}$$

ただし、 $k=\rho g A_w$

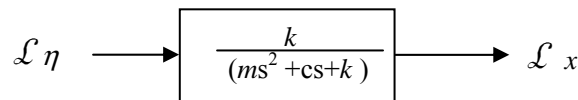
この Laplace 変換は前頁より、

$$(ms^2+cs+k) \mathcal{L}x = k\mathcal{L}\eta \quad \text{----- (3.6'a')}$$

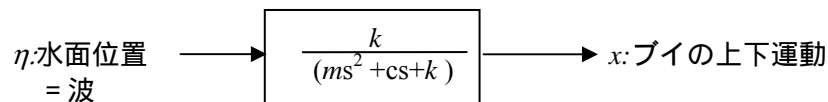
したがって、この(3.6'a')式から Laplace 変換上の入力と出力の関係は、

$$\frac{\mathcal{L}x}{\mathcal{L}\eta} = \frac{k}{(ms^2+cs+k)} \quad \text{----- (3.6'e)}$$

と表される。これをこれを伝達関数と呼ぶ。ブロック線図に表現すると、



さらに、便宜的に Laplace 変換記号を省略して、



と表現する。

2) 伝達関数の性質

(1)インパルス応答(impulse response)

上図あるいは、(3.6'e)式で $\mathcal{L}\eta$ が1の場合、この出力は $\mathcal{L}x$ は制御対象を記述した Laplace 変換そのものになることがわかる。このような入力が存在するだろうか？ Laplace 逆変換の公式は、

$$\begin{aligned} \text{Laplace 逆変換: } f(t) &= \frac{1}{2\pi j} \int_{-j}^{+j} F(s)e^{st} ds \quad \text{----- (3.16)} \\ &= \mathcal{L}^{-1} F(s) \end{aligned}$$

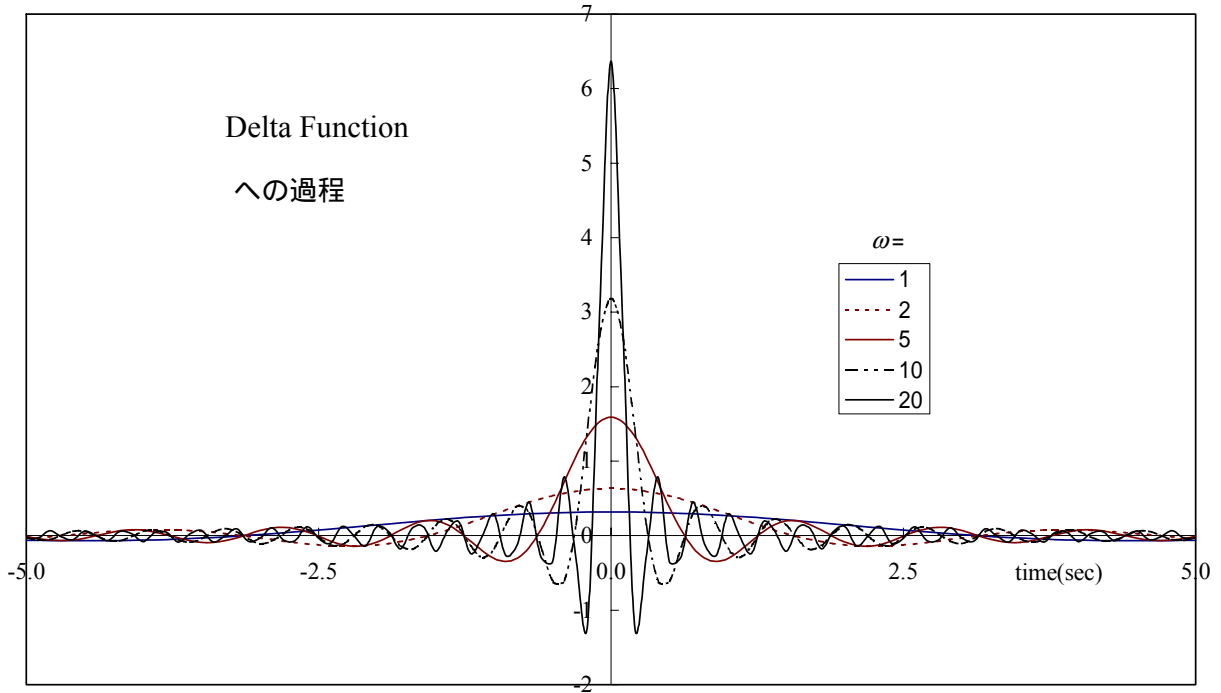
$$\begin{aligned} \text{Fourier 逆変換: } f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int F(\omega)e^{j\omega t} d\omega \quad \text{----- (3.17)} \\ & \quad e^{j\omega t} = \cos\omega t + j \sin\omega t \\ & \quad \omega = 2\pi f \\ & \quad f: \text{周波数(Hz)} \end{aligned}$$

$$\text{これより、} F(s)=1 \text{ となる関数} = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j}^{+j} e^{st} ds = \frac{1}{2\pi} \int e^{j\omega t} d\omega \quad \text{----- (3.18)}$$

上式を展開すると、
$$= \frac{1}{\pi} \lim_{\omega \rightarrow +} \{(\sin \omega t)/t\} = \begin{cases} + & (t=0) \\ 0 & (t \neq 0) \end{cases} \quad \text{----- (3.19)}$$

これは、ディラクのデルタ関数(Dirac's delta Function, or Impulse Function)と呼ばれ、 $\delta(t)$ と表記される。 $t=0$ では+の値を持つが、時間積分した値(時間軸上の関数の面積)は1.0というインパルス(衝撃)関数である。

参考までに、(3.18)式で ω がまだ十分大きくない時の関数形状を下图に示す。

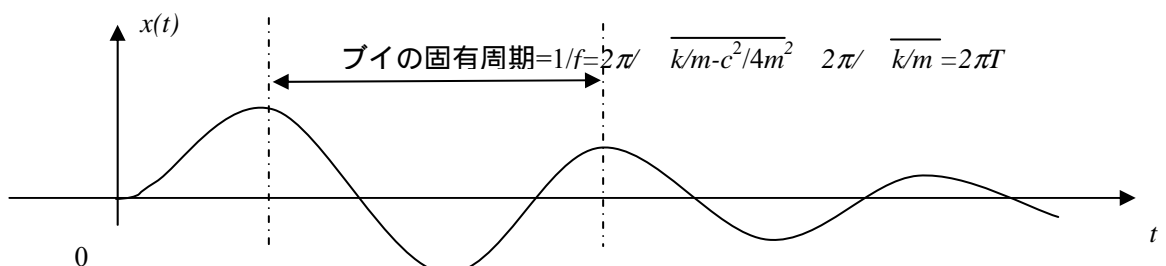


このインパルスに対する応答は $\mathcal{L} \eta=1$ であることから、(3.6'e)式より、伝達関数そのものとなり、

$$\mathcal{L} x = \frac{k}{(ms^2 + cs + k)} \quad \text{----- (3.6'f)}$$

これを逆変換すると、(3.6'f)式を変形した後に、(3.6'g)式となる。

$$\begin{aligned} \mathcal{L} x &= \frac{k/m}{(s^2 + c/m s + k/m)} = \frac{k/m}{(s + c/2m)^2 + k/m - (c/2m)^2} \\ &= \frac{k/m}{(s + c/2m)^2 + \{ \frac{k/m - (c/2m)^2}{k/m - (c/2m)^2} \}^2} = \frac{k/m \frac{\sqrt{k/m - (c/2m)^2}}{k/m - (c/2m)^2}}{(s + c/2m)^2 + \{ \frac{k/m - (c/2m)^2}{k/m - (c/2m)^2} \}^2} \\ x(t) &= \frac{k/m}{k/m - (c/2m)^2} e^{-c/2m t} \sin\left(\frac{\sqrt{k/m - (c/2m)^2}}{k/m - (c/2m)^2} t \right) \quad \text{----- (3.6'g)} \end{aligned}$$



これをインパルスレスポンス(impulse response)と呼ぶ。

(2) ステップ応答(step response)

インパルス応答は、入力 Laplace 変換が 1 ($\mathcal{L}\eta=1$) の場合の応答であった。このディラクのデルタ関数(Dirac's delta Function, or Impulse Function)を時間積分(時間軸上の関数の面積)すると、下図のような単位跳躍関数となる。

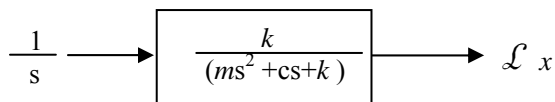
これを単位ステップ関数(unit step function)、あるいは数学では Heaviside 関数と呼ぶ。

この単位ステップ関数の Laplace 変換は既に重要変換例に記載されたように $f(t)=1$ の Laplace 変換と同じ $1/s$ になる(Laplace 変換では $t<0$ を考えないので)。

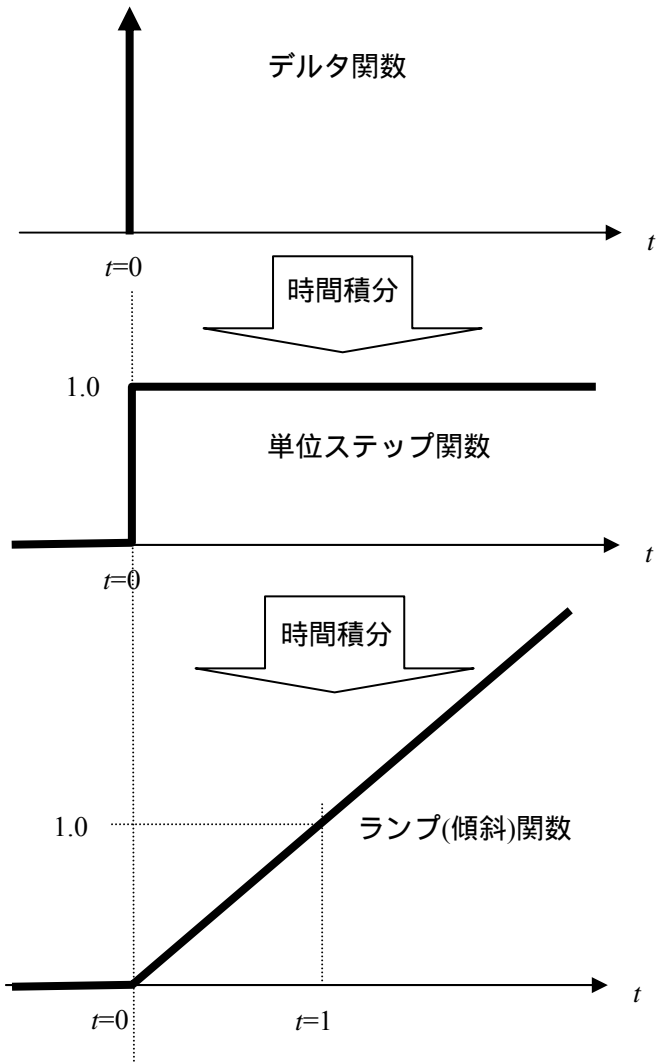
この単位ステップ入力に対する応答(インデンシャル応答とも言う)は(3.6'a)式から

$$\mathcal{L}x = \frac{k}{(ms^2+cs+k)} \frac{1}{s} \quad \text{----- (3.6'k)}$$

と表される。ブロック線図に表現すると、



水面に浮かんだブイの運動の初期値問題(演習)で水面の上昇を 1.0 とするとこの応答となる。



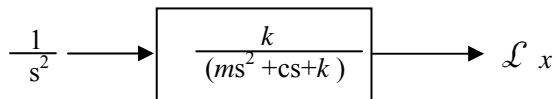
(3) ランプ応答(ramp response)

同様に単位ステップ関数を更に積分すると、左図のようなランプ関数となる。この関数の Laplace 変換は重要変換例に記載されたように $f(t)=t$ の Laplace 変換と同じ $1/s^2$ になる。

この単位ステップ入力に対する応答は

$$\mathcal{L}x = \frac{k}{(ms^2+cs+k)} \frac{1}{s^2} \quad \text{----- (3.6'l)}$$

と表される。ブロック線図に表現すると、



以上述べたインパルス応答、ステップ応答、ランプ応答は制御における代表的な入力波形である。これらの特徴を要約すると、

- インパルス応答 : 伝達関数そのものとして表現できる。
しかし、現実にはこうした入力波形は存在しない。
- 単位ステップ応答 : 現実には存在するので、応答波形から伝達関数を推定(同定)し易い。
- ランプ応答 : より現実に近い入力でシステム起動時の設計に役立つ。

(4)周波数応答 (frequency response)

ここで、伝達関数に $\eta=\sin\omega t$ という正弦波が入力された場合の応答を考えてみよう。ただし、運動モデル(応答モデル)はブイの運動ではなく、以下の簡単な $\left(\frac{1}{Ts+1}\right)$ を考える。

$\xi=\sin\omega t$ という正弦波が入力された場合、この入力の Laplace 変換は $\xi = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$ であるから、この入力に対する応答を Laplace 変換は、

$$\mathcal{L}x = \left(\frac{1}{Ts+1}\right)\left(\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}\right) \quad (3.7a)$$

これを部分分数にすると、

$$\begin{aligned} \mathcal{L}x &= \left(\frac{\omega}{T^2\omega^2 + 1}\right)\left\{\frac{T^2}{Ts+1} - \frac{Ts-1}{s^2 + \omega^2}\right\} \\ &= \left(\frac{\omega}{T^2\omega^2 + 1}\right)\left\{\frac{T}{s+1/T} - \frac{Ts}{s^2 + \omega^2} + \left(\frac{1}{\omega}\right)\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}\right\} \end{aligned} \quad (3.7b)$$

なんとならば、

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{Ts+1}\right)\left(\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}\right) &= \frac{a}{Ts+1} + \frac{bs+c}{s^2 + \omega^2} \\ &= \frac{a(s^2 + \omega^2) + (bs+c)(Ts+1)}{(Ts+1)(s^2 + \omega^2)} \\ &= \frac{a(s^2 + \omega^2) + (bs+c)(Ts+1)}{(Ts+1)(s^2 + \omega^2)} \\ &= \frac{(a+Tb)s^2 + (b+cT)s + (a\omega^2 + c)}{(Ts+1)(s^2 + \omega^2)} \end{aligned}$$

これより、

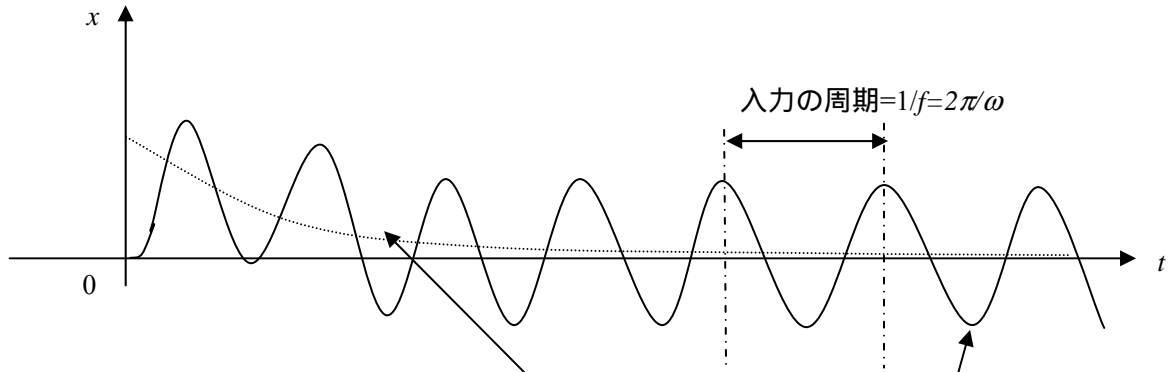
$$a = \frac{\omega T^2}{T^2\omega^2 + 1}, \quad b = \frac{-\omega T}{T^2\omega^2 + 1}, \quad c = \frac{\omega}{T^2\omega^2 + 1}$$

上式を Laplace 逆変換すると

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{\omega}{T^2\omega^2 + 1}\left\{Te^{-\left(\frac{1}{T}\right)t} + \left(\frac{1}{\omega}\right)\sin\omega t - T\cos\omega t\right\} \\ &= \frac{T\omega}{T^2\omega^2 + 1}e^{-\left(\frac{1}{T}\right)t} + \frac{1}{T^2\omega^2 + 1}(\sin\omega t - T\omega\cos\omega t) \\ &= \frac{T\omega}{T^2\omega^2 + 1}e^{-\left(\frac{1}{T}\right)t} + \frac{1}{\sqrt{T^2\omega^2 + 1}}\sin(\omega t + \varepsilon) \end{aligned} \quad (3.7c)$$

$$\text{ただし、}\varepsilon = \tan^{-1}(-T\omega) = -\tan^{-1}(T\omega)$$

これが、周期的に変動する入力の場合の時々刻々の応答である。その時間的な変化はおよそ次のようになる。

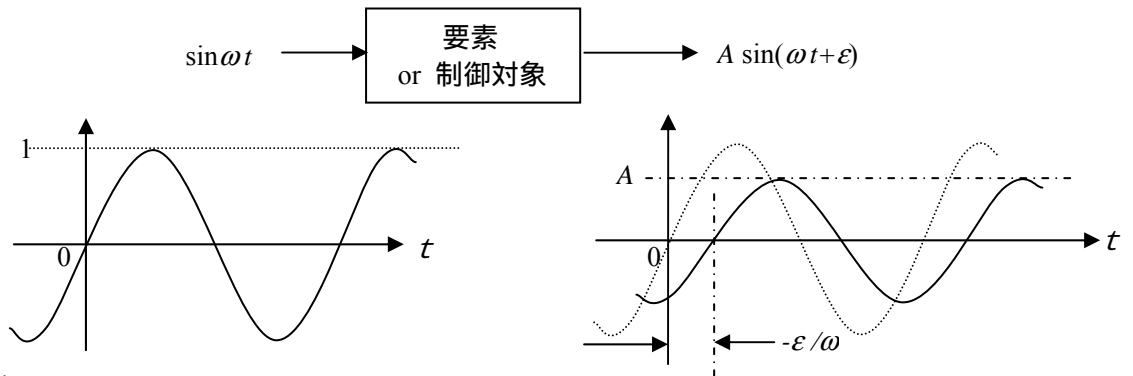


このブイの運動は、時間が十分経つと $e^{-(1/T)t} \rightarrow 0$ となり、(3.7.d)式の前項は限りなく小さくなって、後半 $\sin(\omega t + \varepsilon)$ の項だけが残る。

前半の項：過度応答（破線）

後半の項：定常応答（過度応答が無くなった状態の応答）

周波数応答とは正弦波入力に対する要素の応答であるが、上記の定常応答を指している。



振幅応答 (gain) = A

位相ずれ (phase) = ε (たいていは遅れでマイナス)

これらは何れも ω (周波数) の関数となる。

前述のブイの応答例では、

$$\text{振幅応答 (gain)} = A = \frac{1}{T^2 \omega^2 + 1}$$

$$\text{位相ずれ (phase)} = \varepsilon = -\tan^{-1}(T\omega)$$

} ----- (3.7.e)

さて、この周波数応答をもっと簡単な方法で求めることを考えよう。具体的には、Laplace 変換表示された伝達関数で $s=j\omega$ を代入する。(j)は虚数

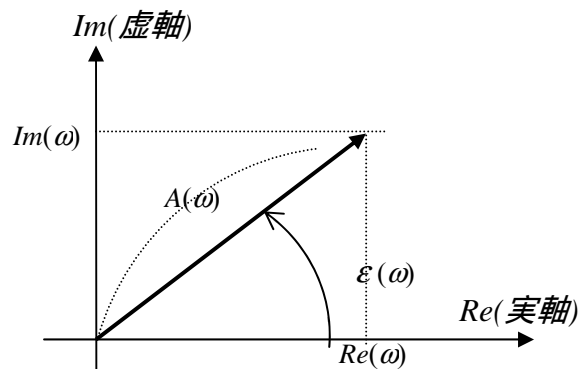
$$G(j\omega) = \text{Re}(\omega) + j \text{Im}(\omega) \quad \text{----- (3.21)}$$

となり、振幅応答: A と位相のずれ: ε はそれぞれ次式で表される。

$$A(\omega) = \sqrt{\text{Re}(\omega)^2 + \text{Im}(\omega)^2} \quad \text{----- (3.22)}$$

$$\varepsilon(\omega) = \tan^{-1} \{ \text{Im}(\omega) / \text{Re}(\omega) \}, \quad \text{----- (3.23)}$$

($\varepsilon > 0$: 進み、 $\varepsilon < 0$: 遅れ)



これを(3.7)式の運動モデル $T(dx/dt) + x = \eta$ で確認してみよう。

この伝達関数は、 $\frac{1}{(Ts+1)}$ より、 $s=j\omega$ とする。

$$G(j\omega) = \frac{1}{T(j\omega)+1} = \frac{1}{(1+jT\omega)}$$

$$= \frac{(1-jT\omega)}{(1+jT\omega)(1-jT\omega)}$$

< 分母が複素数になるとわかりにくいので共役複素数で分子を複素数にする。 $j^2 = -1$ >

$$= \frac{(1-jT\omega)}{(1+T^2\omega^2)}$$

よって、 $Re(\omega) = 1/(1+T^2\omega^2)$
 $Im(\omega) = -T\omega/(1+T^2\omega^2)$

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{Re(\omega)^2 + Im(\omega)^2}} = \frac{1}{T^2\omega^2 + 1} \quad \left. \vphantom{A(\omega)} \right\} \text{----- (3.7f)}$$

$$\varepsilon(\omega) = \tan^{-1}\{Im(\omega)/Re(\omega)\} = \tan^{-1}(-T\omega)$$

これらは(3.7e)式と全く同じになる。

したがって、周波数応答関数は伝達関数において $s=j\omega$ とすることによって容易に求めることができる。

< プイの運動の例：伝達関数 = $\frac{k}{(ms^2 + cs + k)}$ の場合の周波数応答 >

$$\frac{k}{(ms^2 + cs + k)} = \frac{1}{(m/k)s^2 + c/k s + 1} = \frac{1}{(T^2s^2 + 2T\zeta s + 1)} \text{----- (3.6'h)}$$

と便宜的に書き直す。ここで $s=j\omega$ とすると

$$F(\omega) = \frac{1}{\{T^2(j\omega)^2 + 2T\zeta(j\omega)s + 1\}} = \frac{1}{\{(1-T^2\omega^2) + j2T\zeta\omega\}}$$

$$= \frac{\{(1-T^2\omega^2) - j2T\zeta\omega\}}{\{(1-T^2\omega^2) + j2T\zeta\omega\} \{(1-T^2\omega^2) - j2T\zeta\omega\}}$$

< 共役複素数で分子を複素数にする。 $j^2 = -1$ >

$$= \frac{1}{(1-T^2\omega^2)^2 + (2T\zeta\omega)^2} \{(1-T^2\omega^2) - j2T\zeta\omega\} \text{----- (3.6'.i)}$$

したがって、

$$A(\omega) = \frac{1}{(1-T^2\omega^2)^2 + (2T\zeta\omega)^2} \text{----- (3.6'.j)}$$

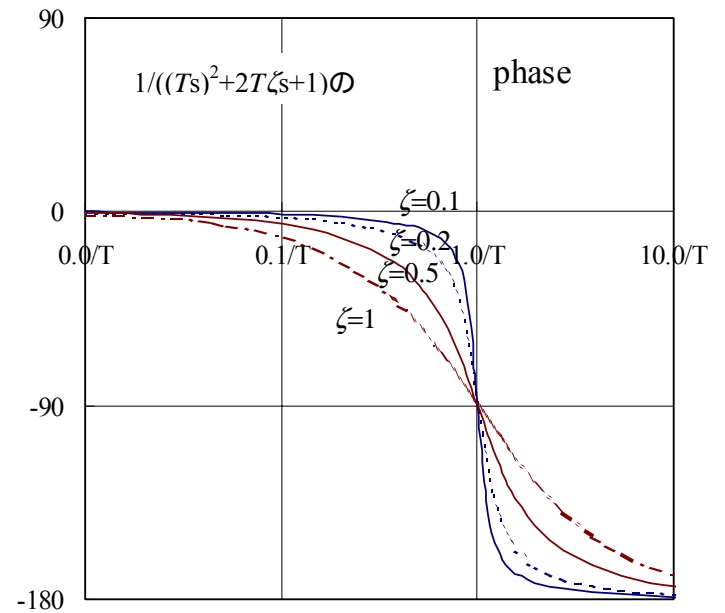
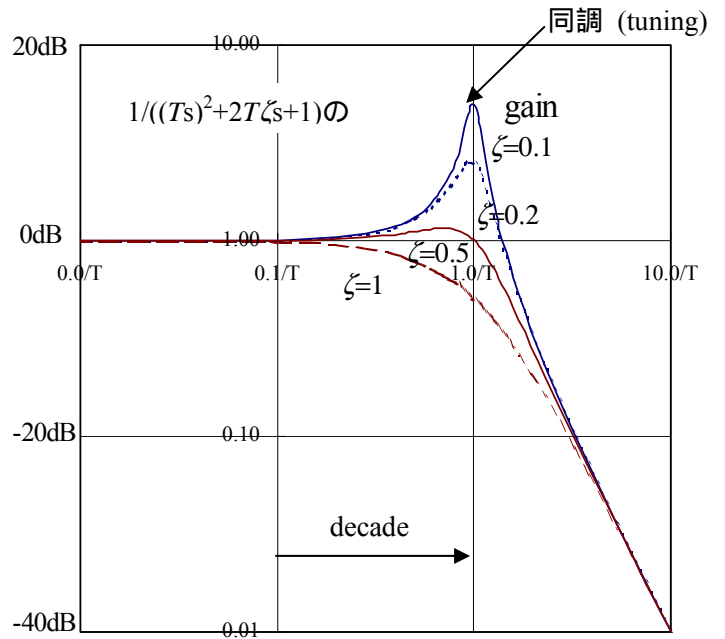
$$\varepsilon(\omega) = -\tan^{-1}\{2T\zeta\omega/(1-T^2\omega^2)\} \text{----- (3.6'.k)}$$

i) 周波数応答関数のボード線図 (Bode diagram)

上記の振幅応答: A と位相のずれ: ε を周波数 ω を横軸として表示したグラフをボード線図という。横軸の ω は通常、対数表示される場合が多く、1 10, 10 100 等の 10 倍の大きさをデカード(decade)、また 1 2, 2 4 等の大きさを(octave)と言い、単位をそれぞれ (dec), (oct) と表記する。また振幅は $20 \log_{10}(A)$ として単位を (dB) で表示されることがある(特に電気工学、音響工学分野)。

< ブイの運動の例: 伝達関数 = $\frac{1}{(T^2s^2 + 2T\zeta s + 1)}$ の場合のボード線図 >

- < 2次系(2次遅れ)の応答関数の特徴 >
 $\omega=1/T$ 付近を境に、振幅が大幅に変化する。
 $\omega < 1/T$ では振幅はほぼ 1.0 で、位相のずれはほとんどない。
 $\omega=1/T$ では位相のずれが 90° となる。
 この周波数を固有周波数という。
 これを Hz(=cycle/sec) で表現すると、
 $f(\text{Hz})=2\pi T$
 この付近では位相が急激に変化する他、振幅も抵抗係数 ζ の大きさによって大幅に変化する。
 $\omega > 1/T$ では位相が 180° となり、振幅も大幅に減衰する。
 この減衰率は 10 倍の ω に対して 1/100 となる。
 = - 40dB/ dec.
 = - 12dB/ oct



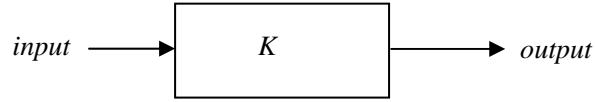
3.4 制御系要素の基本形

基本的な制御系要素の伝達関数を知っていると、複雑なシステムでもそれを要素に分解して考えることにより、比較的容易にシステム全体の特性を把握することができる。以下に最も基本的な制御系要素の伝達関数の例を示す。

(1) 比例要素: $G(s)=K$

K : 係数(gain)

ブロック線図での表現



Laplace 変換上での表現式:

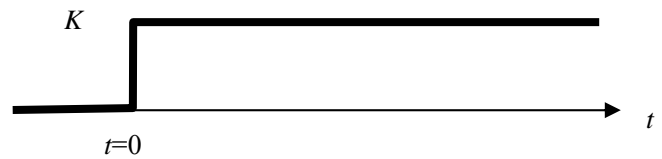
$$\mathcal{L}x = K \mathcal{L}v \quad \text{----- (3.31)}$$

時間軸上の入出力関係式:

$$x(t) = K v(t) \quad \text{----- (3.31')}$$

単位ステップ応答の時系列:
(時間軸上の変化)

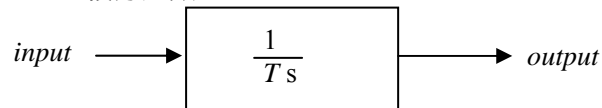
$$x(t) = K \quad \text{----- (3.31'')}$$



(2) 積分要素: $G(s)=\frac{1}{Ts}$

$1/T$: 積分定数

ブロック線図での表現



Laplace 変換上での表現式:

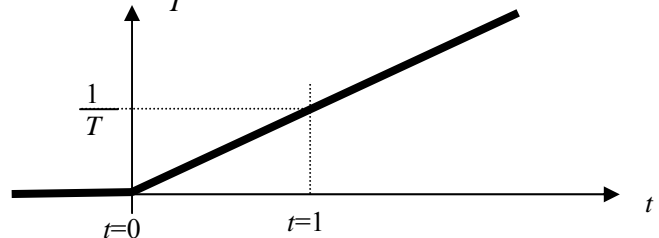
$$\mathcal{L}x = \frac{1}{Ts} \mathcal{L}v \quad \text{----- (3.32)}$$

時間軸上の入出力関係式:

$$x(t) = \frac{1}{T} \int_0^t v(t) dt \quad \text{----- (3.32')}$$

単位ステップ応答の時系列:
(時間軸上の変化)

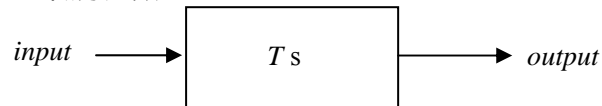
$$x(t) = \frac{1}{T} t \quad \text{----- (3.32'')}$$



(3) 微分要素: $G(s)=Ts$

T : 微分定数

ブロック線図での表現



Laplace 変換上での表現式:

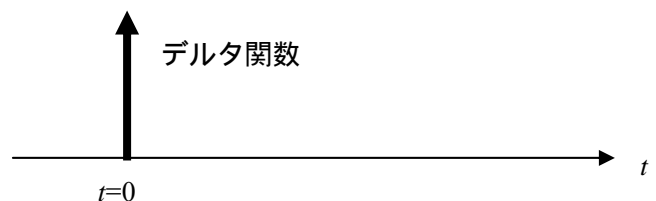
$$\mathcal{L}x = Ts \mathcal{L}v \quad \text{----- (3.33)}$$

時間軸上の入出力関係式:

$$x(t) = T \frac{dv(t)}{dt} \quad \text{----- (3.33')}$$

単位ステップ応答の時系列:
(時間軸上の変化)

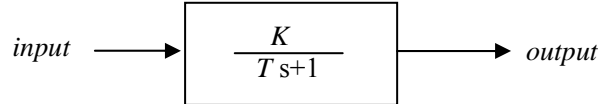
$$x(t) = T \delta(t) \quad \text{----- (3.33'')}$$



(4) 一次遅れ要素: $G(s) = \frac{K}{Ts+1}$

K : 比例定数(gain)、 T : 時定数

ブロック線図での表現



Laplace 変換上での表現式:

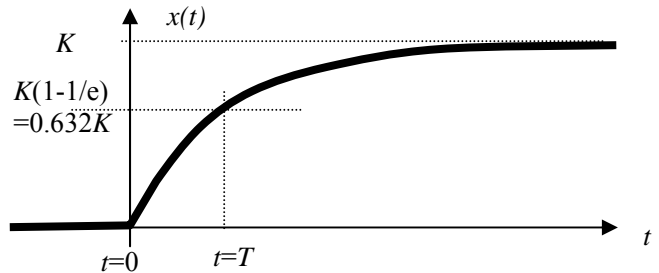
$$\mathcal{L}x = \frac{K}{Ts+1} \mathcal{L}v \quad \text{----- (3.34)}$$

時間軸上の入出力関係式:

$$T(dx(t)/dt) + x = K v(t) \quad \text{----- (3.34')}$$

単位ステップ応答の時系列:
(時間軸上の変化)

$$x(t) = K(1 - e^{-t/T}) \quad \text{----- (3.34'')}$$

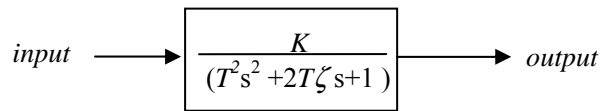


(5) 二次遅れ要素: $G(s) = \frac{K}{(T^2s^2 + 2T\zeta s + 1)}$
 $= \frac{K}{(T_1s+1)(T_2s+1)}$

$\langle \zeta < 1 \rangle$ K : 比例定数(gain)、 T : 時定数

$\langle \zeta > 1 \rangle$ K : 比例定数(gain)、 T_1, T_2 : 時定数

ブロック線図での表現



Laplace 変換上での表現式:

$$\mathcal{L}x = \frac{K}{(T^2s^2 + 2T\zeta s + 1)} \mathcal{L}v \quad \text{----- (3.35)}$$

時間軸上の入出力関係式:

$$T^2(d^2x(t)/dt^2) + 2T\zeta(dx(t)/dt) + x = K v(t) \quad \text{----- (3.35')}$$

単位ステップ応答の時系列: [$\zeta < 1$]
(時間軸上の変化)

$$x(t) = K \left\{ 1 - e^{-(\zeta/T)t} \cos\left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{T}t\right) - \frac{\zeta}{1-\zeta^2} e^{-(\zeta/T)t} \sin\left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{T}t\right) \right\} \quad \text{----- (3.35'')}$$

[$\zeta = 1$]

$$x(t) = K \left\{ 1 - e^{-(t/T)} \left(1 + \frac{t}{T} \right) \right\} \quad \text{----- (3.35''')}$$

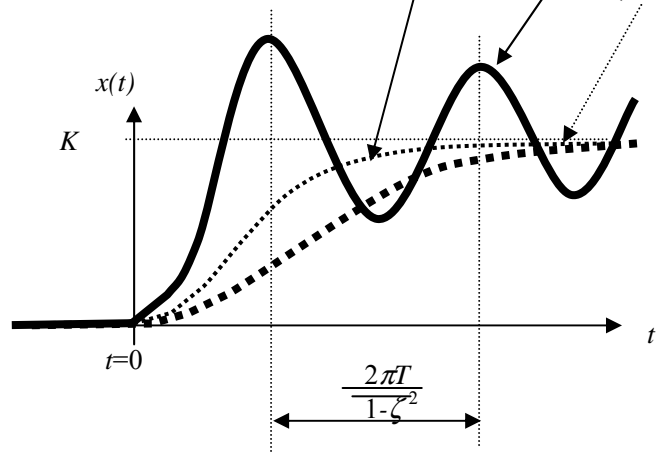
[$\zeta > 1$]

$$x(t) = K \left\{ 1 - \left(\frac{T_1}{T_1 - T_2} \right) e^{-(t/T_1)} + \left(\frac{T_2}{T_1 - T_2} \right) e^{-(t/T_2)} \right\} \quad \text{----- (3.35''''')}$$

ただし、

$$T_1 = \frac{T}{\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}}$$

$$T_2 = \frac{T}{\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}}$$



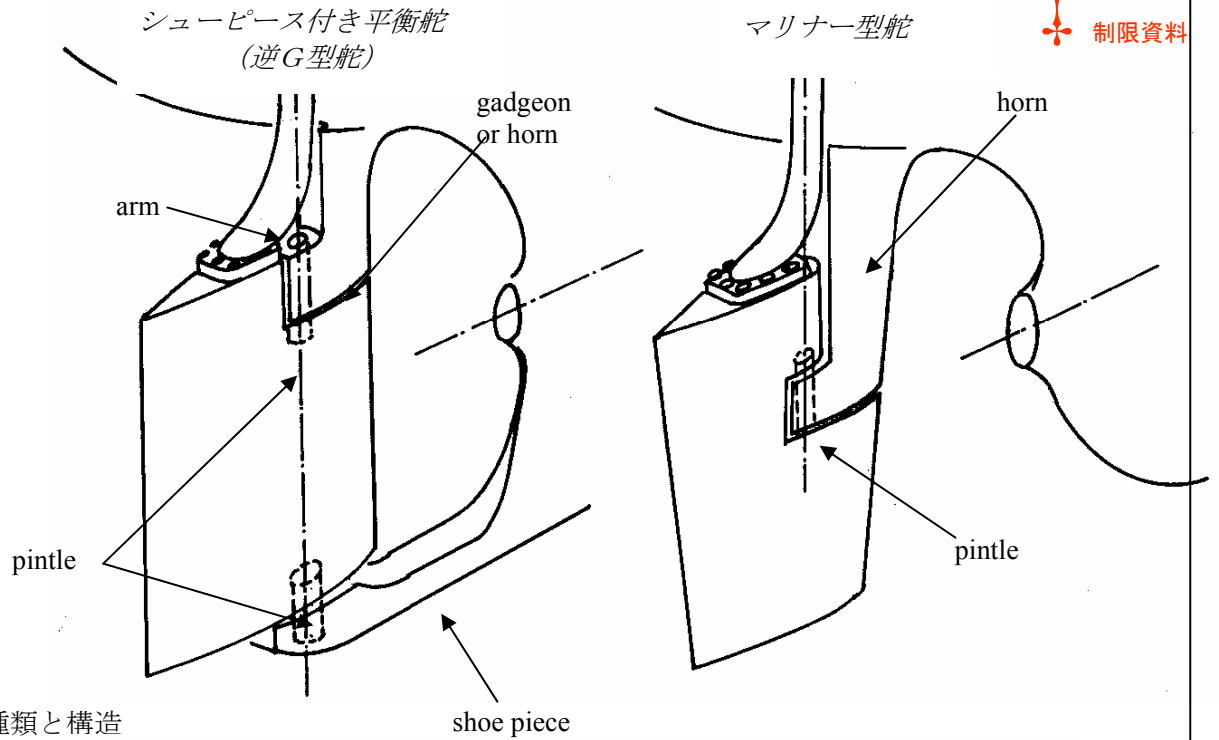
4. システムの具体的構成例

船の操縦性能について

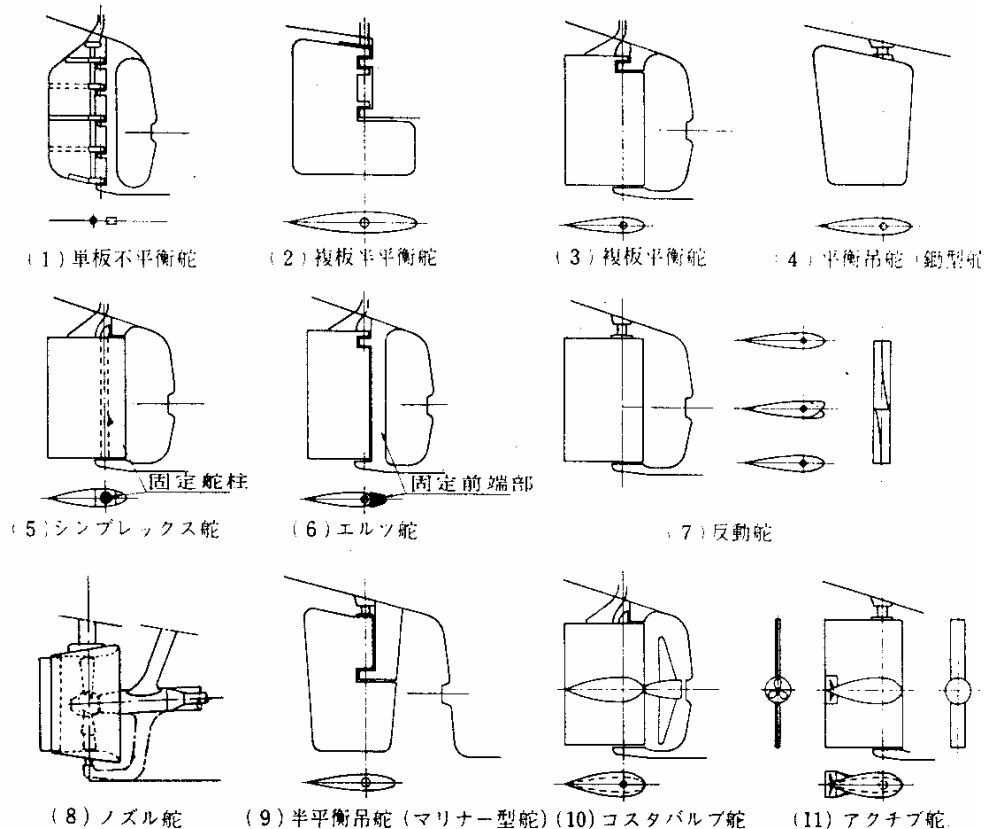
「船は交通・運搬の手段であるから、それは単に走ればよいのではなくて望む方向に走れなければならぬ。かくして操縦の問題は船の歴史と共に古い。(野本謙作)」

One point memo (1) <制御機械の例：船の操舵機>

(故 野本教授自筆の舵図：大阪・広島大学「船舶操縦性」テキストより)

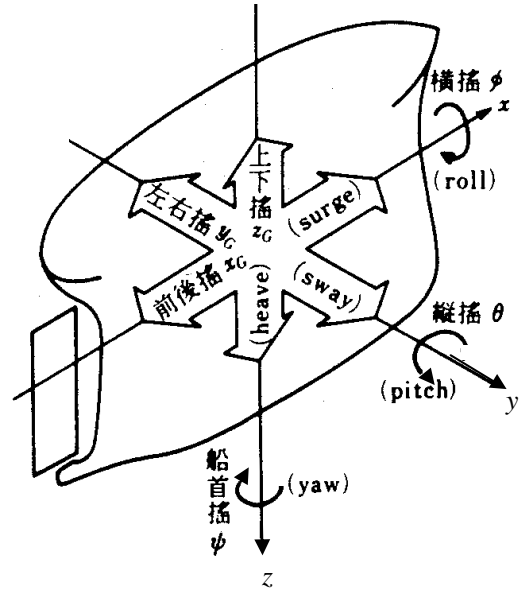


舵の種類と構造



4.1 操縦運動を表す方程式

船の運動は右図のように6自由度で表現されるが、3軸の連成運動を解くことは容易でないので、ここでは、旋回運動に限って以下簡略化して説明する。

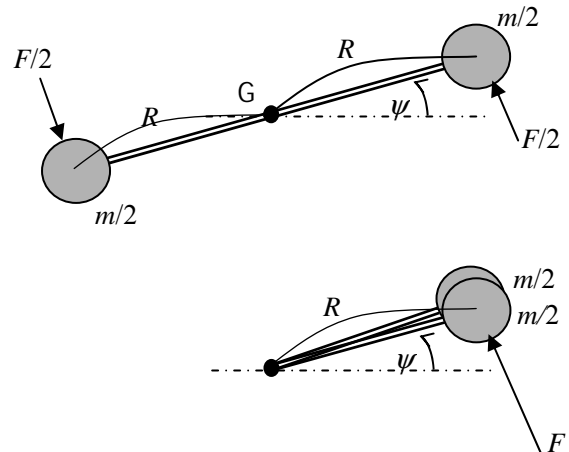


(1) 回転運動を記述する基礎方程式

浮体の上下運動(heave)のように、直線あるいは平行運動する場合はニュートンの運動方程式で表現できることを示したが、横揺(roll)、縦揺(pitch)、船首揺(yaw)といった回転運動は、多少取り扱いが異なる。

簡単のために右図のように、同じ質量 $m/2$ が水平面内で回転できる棒の両先端に取り付けられた物体の回転運動を考えよう。ただし、棒の質量は無いものと仮定する。この物体の重心は言うまでもなく棒の中央にある。

この物体に図のようにそれぞれ $F/2$ なる力が棒に直角に作用する時、物体は重心 G の周りに回転することになる。この回転運動だけを考えると、下図のように、回転中心となる G で折り返した状態に F が作用するのと等価になる。この場合の運動方程式は回転の接線方向の運動となるので、回転角を ψ とすると接線方向の移動量は $R\theta$ であるから、速度が $R(d\psi/dt)$ 、加速度が $R(d^2\psi/dt^2)$ となり、ニュートンの運動方程式が次式で表される。



$$\left(\frac{m}{2} + \frac{m}{2}\right)R \left(\frac{d^2\psi}{dt^2}\right) = F \quad (4.1)$$

上式ではしかし、微少な角度変化の運動しか表現できないので、両辺に回転中心(重心)からの距離 R を掛けてモーメントの形式にする。すなわち、

$$\left(\frac{m}{2} + \frac{m}{2}\right)R^2 \left(\frac{d^2\psi}{dt^2}\right) = F \times R = M \quad (4.2)$$

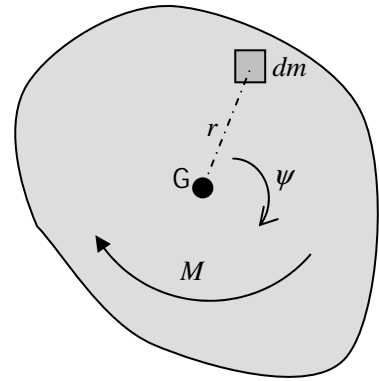
ここで、 $\left(\frac{m}{2} + \frac{m}{2}\right)R^2$ は元の物体では、質量 \times (重心から質点までの距離)² の総和であり、これを回転軸周りの慣性二次モーメントと言う。

より一般的には、次式で表現される。

$$I \cdot \left(\frac{d^2\psi}{dt^2} \right) = M \quad (4.3)$$

ただし、 $I = \int r^2 dm = \kappa^2 m$

ここに、 κ は平均的な重心から質点までの距離で「慣動半径」と呼ばれる。



回転運動の方程式

(慣性二次モーメント) × (角加速度) = (作用するモーメント)

(2) 船の操縦運動方程式

船体に働くモーメントは、船の方向を制御する駆動力と、運動を抑制する抵抗成分に大別することができる。前者が舵の力である。

1) 舵の力

舵の力は舵に発生する揚力である。舵への流入速度はほぼ船の速度 U 、流入角は舵角 δ となっている。舵直圧力は次式で表される。

$$F_N = \left(\frac{\rho}{2} \right) f_{\alpha} \delta \cdot A_R U^2 \quad \text{----- (4.4)}$$

ただし、 ρ は水の密度、 A_R は舵面積、 f_{α} 舵単独の直圧力係数の勾配である。この舵直圧力 F_N による船の旋回モーメント N_R は、レバーの長さが船の長さ L の約 $1/2$ なので、次式で表すことができる。

$$N_R = \left(\frac{L}{2} \right) F_N = N_{\delta} \delta \quad \text{----- (4.5)}$$

ただし、 N_{δ} は係数で、揚力の特徴から $(\rho/2)A_R U^2$ に比例している。

2) 船体の旋回抵抗

流体中を物体が運動すると、この運動が流体にエネルギーや力を与えるので、その運動を止める方向に抵抗が流体から作用する。

旋回角速度による抵抗：物体には運動する速度に依存する抵抗。船が旋回すると、船の重心から x 離れた所の横方向速度は $x(d\psi/dt)$ となるから、全体の旋回抵抗が次式で表される。

$$N_H = -N_r \left(\frac{d\psi}{dt} \right) \quad \text{----- (4.6)}$$

加速抵抗：この内、物体が運動する加速度に比例した抵抗について考えよう。この抵抗係数を仮に a とすると、(5.7)式の上下運動の場合、次式となる。

$$N_A = -J_{ZZ} \left(\frac{d^2\psi}{dt^2} \right) \quad \text{----- (4.7)}$$

(4.5) ~ (4.7) 式を (4.3) 式の回転の運動方程式に代入すると、操舵による運動方程式が得られる。

$$\begin{aligned} I_{ZZ} \left(\frac{d^2\psi}{dt^2} \right) &= N_R + N_H + N_A \\ &= N_{\delta} \delta - N_r \left(\frac{d\psi}{dt} \right) - J_{ZZ} \left(\frac{d^2\psi}{dt^2} \right) \end{aligned}$$

すなわち，

$$(I_{zz} + J_{zz}) \left(\frac{d^2\psi}{dt^2} \right) = N_{\delta} \delta - N_r \left(\frac{d\psi}{dt} \right)$$

これより，

$$T \left(\frac{d^2\psi}{dt^2} \right) + \left(\frac{d\psi}{dt} \right) = K \delta \quad \text{----- (4.8)}$$

4.2 操縦性能

前術の操舵に対する応答モデルにおいて，直進状態（初期値： $d\psi/dt=0$ ）から舵角 δ_0 を操舵した場合の船の旋回運動は上記の(4.8)式を Laplace 変換すると，

$$Ts \mathcal{L}(d\psi/dt) + \mathcal{L}(d\psi/dt) = K \mathcal{L}\delta \quad \text{----- (4.9)}$$

すなわち，

$$(T+1) \mathcal{L}(d\psi/dt) = K \delta_0 / s$$

$$\mathcal{L} \left(\frac{d\psi}{dt} \right) = \frac{K \delta_0}{(Ts+1)s} = K \delta_0 \left\{ \frac{1}{s} - \frac{T}{(Ts+1)} \right\} = K \delta_0 \left\{ \frac{1}{s} - \frac{1}{(s+1/T)} \right\}$$

これを逆変換すると，

$$\frac{d\psi}{dt} = K \delta_0 \left\{ 1 - e^{-t/T} \right\} \quad (4.10)$$

となる。ここで t では指数関数の項が全て 0 となり，操舵後，十分時間が経つと，

$$\left(\frac{d\psi}{dt} \right) = K \delta_0 \quad (4.11)$$

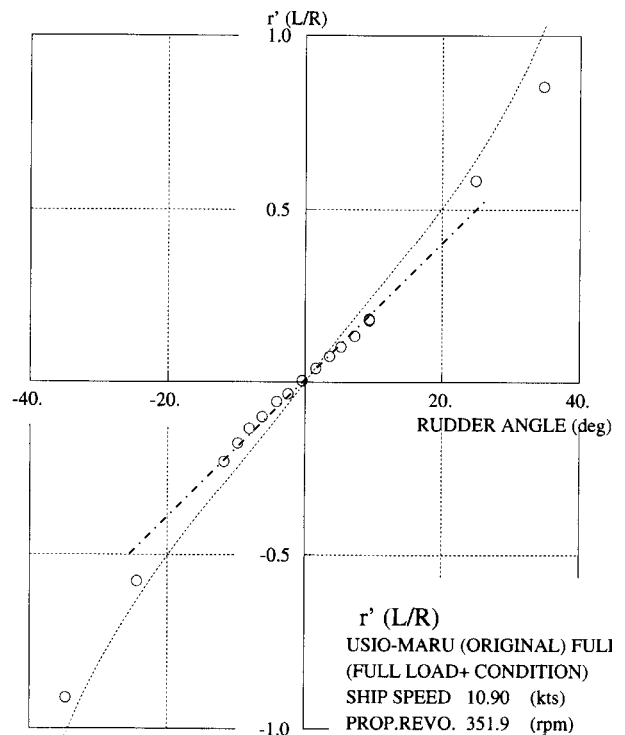
すなわち， K は操舵した時，その舵角で最終的に発揮する旋回角速度と横流れ速度を決定する定数になる。したがって， K を **旋回力の指数** と言う。(制御学的には static gain 係数)

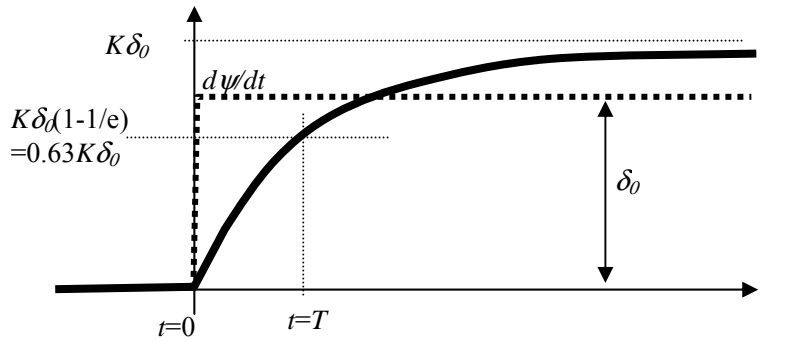
この(7.25)式を(7.15)式を代入すると，

$$\frac{L}{R} = \left(\frac{d\psi}{dt} \right) \left(\frac{L}{U} \right) = \left(K \frac{L}{U} \right) \delta_0 \quad (4.12)$$

右図には，うしお丸（改造前 123GT 状態）の種々の舵角に対する無次元の定常旋回角速度(L/R)の例を示すが，これらの関係は(7.26)式のようにほぼ直線になる。また， $K(L/u)$ を無次元化された旋回力指数と言いこれを K' で表記する。

一方，操舵直後の旋回運動は下図のように， T が大きい程，時間に対する指数関数の減少が遅くなり，旋回運動や横流れ運動の発達が遅くなる。このような船では操舵に対する追従が悪い。したがって， T は操舵に対する追従性を表す指標になる。(制御学的には時定数 time constant)

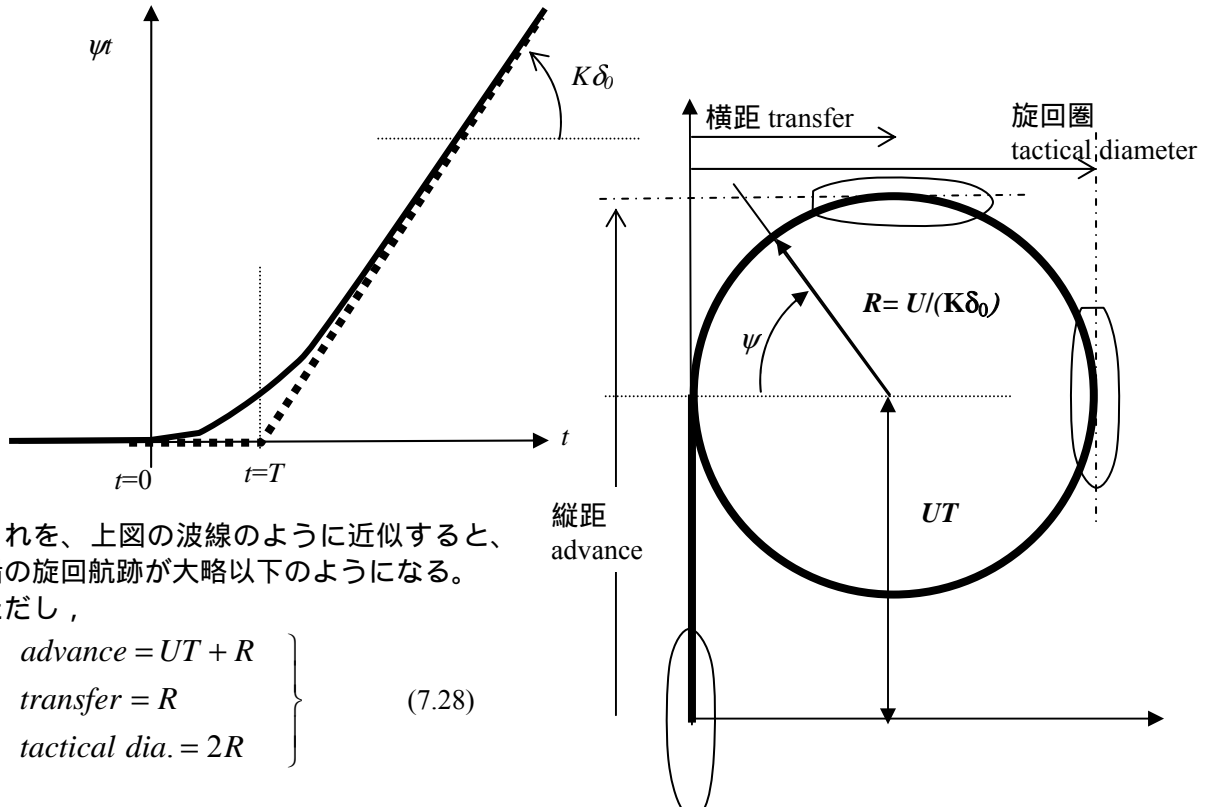




この応答モデルでは旋回角度 ψ は、(7.33)式を時間積分すると、

$$\psi = K\delta_0 \left\{ t - T + Te^{-t/T} \right\} \quad (4.13)$$

となり、以下のような時間変化になる。



これを、上図の波線のように近似すると、船の旋回航跡が大略以下のようなになる。ただし、

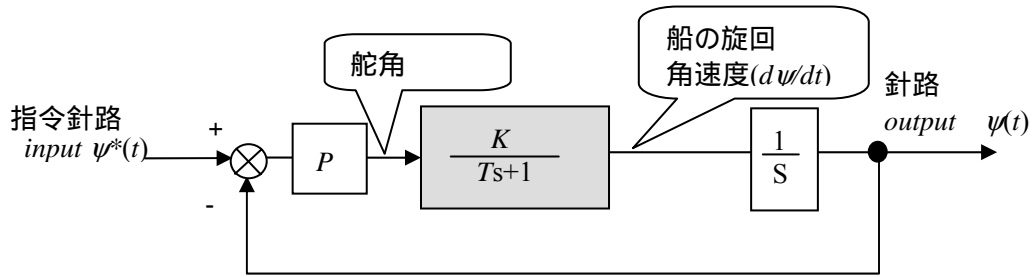
$$\left. \begin{aligned} advance &= UT + R \\ transfer &= R \\ tactical\ dia. &= 2R \end{aligned} \right\} \quad (7.28)$$

ただし、 $R = \frac{U}{K\delta_0}$

4.3 自動操舵装置（針路制御）

船は広い海を長時間航海するので、その間ずっと舵を操作するのは大変な作業になる。そこで、針路を自動的に保持してくれる装置があれば大変便利になる。このため、次のようなフィードバック制御を行う。

船の針路は ψ であり、これは旋回角速度 ($d\psi/dt$) を時間積分したものであるから、指令する針路 $\psi^*(t)$ とし、以下のようにフィードバックすることえを考える。



この制御システム全体の伝達関数、すなわち指令針路 ψ^* に対する実針路 ψ の伝達関数 G は、既に2章に示したように、

$$G = \frac{GP(1/s)}{GP(1/s)+1} = \frac{\frac{K}{(Ts+1)s} P}{\frac{K}{(Ts+1)s} P + 1} \quad \text{----- (4.14)}$$

これを整理すると、(分子・分母に $(Ts+1)s$ を掛ける)

$$\begin{aligned} &= \frac{KP}{KP+(Ts+1)s} = \frac{1}{T/(KP)s^2 + (1/KP)s + 1} \\ &= \frac{1}{T_1^2 s^2 + 2T_1 \zeta s + 1} \quad \text{----- (4.15)} \end{aligned}$$

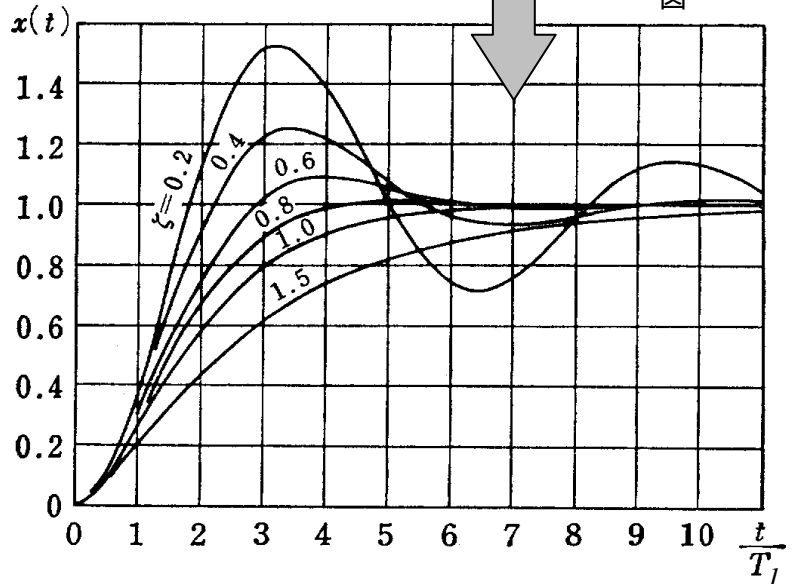
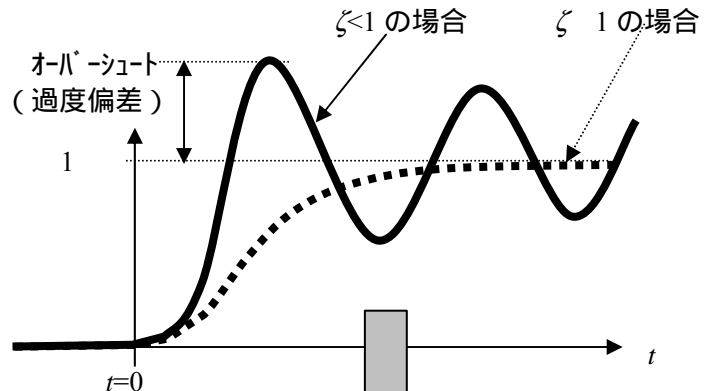
ただし、

$$T_1 = \sqrt{\frac{T}{KP}}, \quad \zeta = \frac{1}{2\sqrt{TKP}}$$

このシステムのステップ応答は前章に示したように、2次遅れ要素であるから、右図のようになる。

定数 P が小さいと、 T_1 が大きくなり、指令に対する応答は遅くなる。逆に、定数 P を大きくすると、 T_1 が小さくなって、指令に対する応答は速くなるが、 ζ も小さくなるので、指令深さに対して行き過ぎ(オーバーシュート)が発生する。制御学ではこの ζ のことをダンピングファクター(damping factor=減衰係数)と呼んでいる。

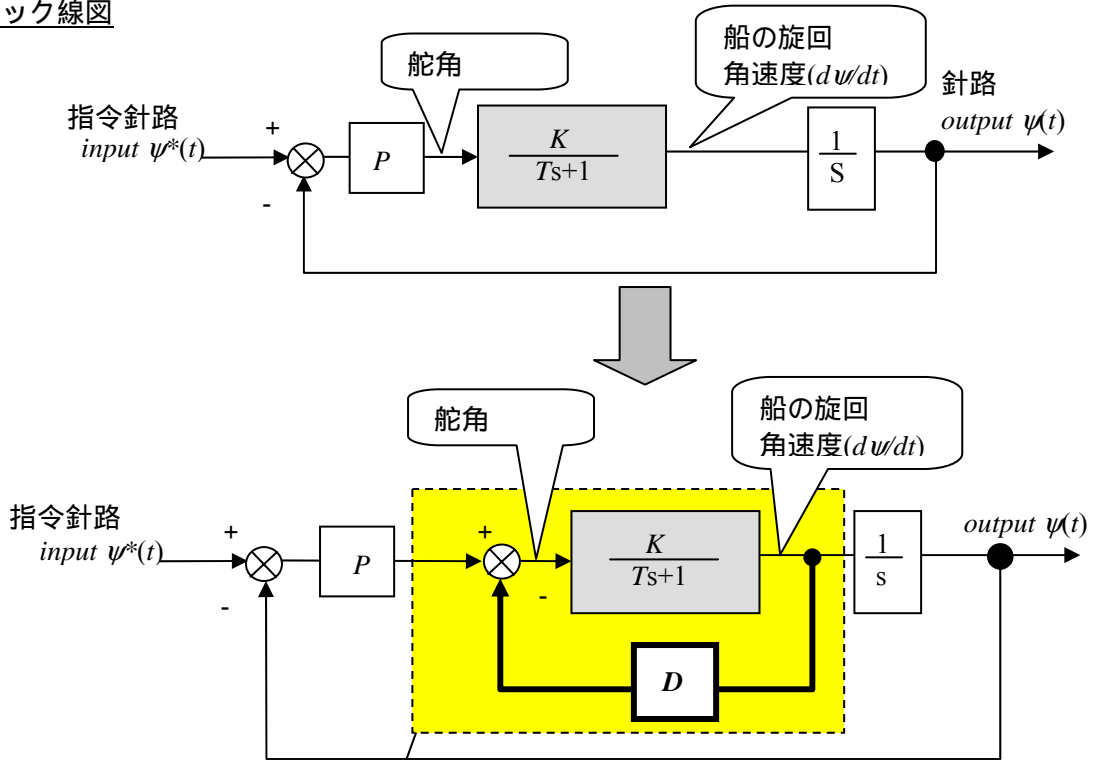
オーバーシュートが大きい場合は、速度のフィードバックを行って、 ζ を大きくし、オーバーシュートを少なくさせる必要がある。(微分制御)



< 漁船の自動操舵でオーバーシュートを小さくする設計 >

前頁のウインチ速度のフィードバックを入れてζを大きくし、オーバーシュートを少なくさせる具体的方法を検討してみよう。速度をフィードバックする方法には、幾つか考えられるが、下図のようにモータ電圧に比例した物理量の帰還を考える。係数 D は速度のフィードバック定数である。

ブロック線図



伝達関数

このブロック線図において、黄色の特性は2章の方法により、

$$G_1 = \frac{\frac{K}{Ts+1}}{\frac{KD}{Ts+1} + 1} = \frac{K}{Ts+(1+KD)}$$

したがって、指令位置 $\psi^*(t)$ に対する実際の釣り位置 $\psi(t)$ の伝達関数は、

$$\begin{aligned} G &= \frac{G_1 P(1/s)}{G_1 P(1/s) + 1} = \frac{\frac{PK}{(Ts+1+KD)s}}{\frac{PK}{(Ts+1+KD)s} + 1} \\ &= \frac{PK}{Ts^2 + (1+KD)s + PK} \\ &= \frac{1}{\frac{T}{PK}s^2 + \frac{1+KD}{PK}s + 1} \\ &= \frac{1}{T_I^2 s^2 + 2T_I \zeta s + 1} \end{aligned} \quad \text{----- (4.16)}$$

ただし、

$$T_1 = \sqrt{\frac{T}{KP}}, \quad \zeta = \frac{1+KD}{2\sqrt{TKP}}$$

このシステムで旋回角速度のフィードバック定数 D を零にすると、当然のことながら(4.15)式となり、この時は船の旋回抵抗によるダンピングファクターのみとなる。

D を大きくすると、時定数 T_1 は変わらないが、ダンピングファクター： ζ の値だけを自由に調節することができ、オーバーシュートを無くすることが可能になる。

このように、サーボシステムでは、比例制御量： P と微分制御量： D を適度に調整して、最適な応答になるよう調整することができる。

< 一口メモ >

制御定数 P, D と人間の行動

人間の行動や思考も制御系設計における P, D に似たところがある。

積極的に素早く行動できる人は一般に「 P 」が大きいと言える。しかし、単に「 P 」が大きいだけでは、早合点や過剰な行動となりがちで、動作も大きく物を壊したり、自分自身が怪我をすることも多く、一般に軽率と評価される。(普通の「 P 」値の人でも、過度の興奮状態や、飲酒した場合は、一時的に「 P 」の値が上がり、こうした状況になりがちになる。)

これを行き過ぎることなくスムーズにするのが「 D 」である。(4.16)式からもわかるように、上記の「 P 」が大きい人ほど、より大きな「 D 」が必要になる。これを的確に備えた人が「堅実」「実直」と信頼される。しかしこれも、過度に「 D 」が大きすぎると、なかなか行動しようとしないう「石橋を叩いて渡る」ような人間となり、これはまた、評価の分かれる結果となる。

機械の制御定数は理論的に決めることができるが、人の行動に関しては、なかなか最適な「 P 」と「 D 」は見つけにくい。各人が若い時代から多くの経験と交流を通して、その人に的確で相応しい「 P 」と「 D 」を備えることが必要である。

5 . システムの安定性

前章に示した制御システムの例では、制御定数 P や D の組み合わせによってはオーバーシュートが変化するものの、何れも安定して作動していた。しかし、システムが複雑になると応答も複雑になり、それが安定に作動するかどうか重要な問題になる。

<制御系の安定・不安定の定義>

制御系が安定・不安定とは、入力変化があった時、

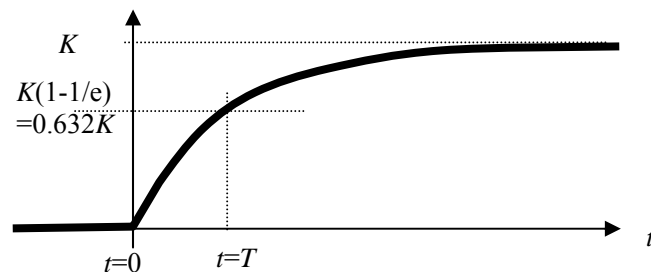
- ・その出力が入力に対応して新たな平衡状態に収束（落ち着く）ときは「安定」。
- ・その出力がいつまでも平衡状態にならない、あるいは発散するような場合は「不安定」

【伝達関数が 1 次遅れの場合】

制御系の伝達関数が $\frac{K}{Ts+1}$ で書き表される場合、このステップ応答は以下ようになった。

[$T>0$]の場合

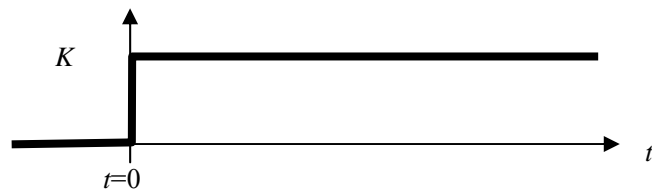
$$x(t) = K \{1 - e^{-(t/T)}\} \quad \text{----- (3.34'')}$$



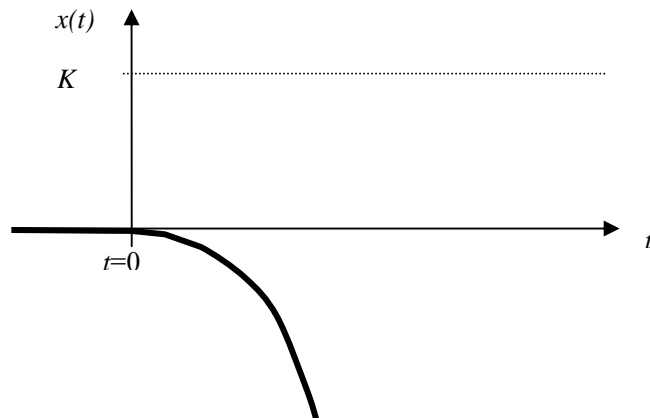
[$T=0$]の場合

伝達関数は単に、 K という比例要素になり、この単位ステップ応答の時系列は、

$$x(t) = K \quad \text{----- (3.31'')}$$



[$T<0$]の場合は、どうなるだろうか。この場合のステップ応答は、やはり(3.34'')式となるが、ここで、 $e^{-(t/T)}$ の指数部が時間 t の増加と共に正に増加するため、応答は無限の大きさに発散する。



1次遅れの場合は、以上のように3種類の応答に分けることができるが、系の安定・不安定については次のようにまとめられる。

- $T > 0$ の時「安定」
- $T = 0$ の時「不安定（限界安定）」
- $T < 0$ の時「不安定」

【伝達関数が2次遅れの場合】

制御系の伝達関数が前章の(4.2d)式 $\frac{K}{T^2 s^2 + 2T \zeta s + 1}$ で書き表される(ただし $T = T_3$ として表記)場合、このステップ応答は以下ようになった。

$$[1 < \zeta] \quad x(t) = K \left\{ 1 - \left(\frac{T_1}{T_1 - T_2} \right) e^{-(t/T_1)} + \left(\frac{T_2}{T_1 - T_2} \right) e^{-(t/T_2)} \right\} \quad \text{----- (3.35.a)}$$

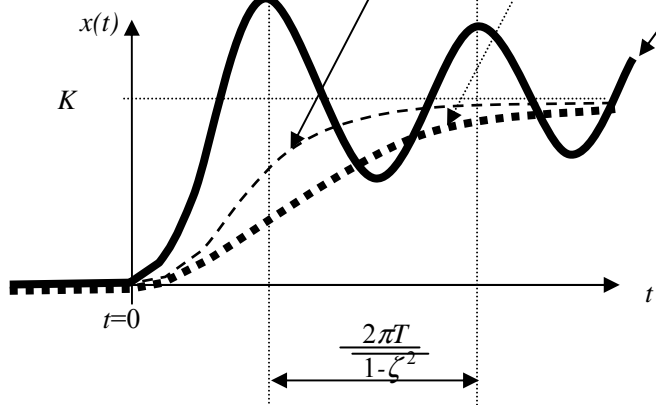
$$[\zeta = 1] \quad x(t) = K \left\{ 1 - e^{-(t/T)} \left(1 + \frac{t}{T} \right) \right\} \quad \text{----- (3.35.b)}$$

$$[0 < \zeta < 1] \quad x(t) = K \left\{ 1 - e^{-(\zeta/T)t} \cos\left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{T} t\right) - \frac{\zeta}{1-\zeta^2} e^{-(\zeta/T)t} \sin\left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{T} t\right) \right\} \quad \text{----- (3.35.c)}$$

ただし、 $1 < \zeta$ では

$$T_1 = \frac{T}{\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}} > 0$$

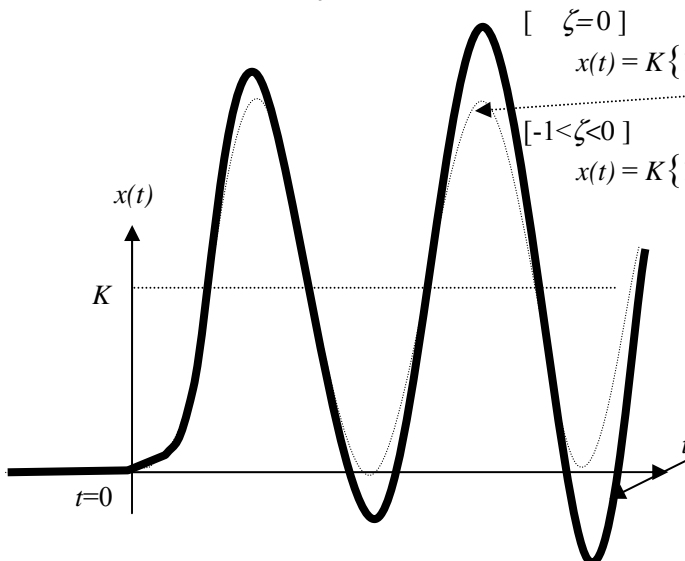
$$T_2 = \frac{T}{\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}} > 0$$



$0 < \zeta$ の場合は、上記の安定・不安定の定義に従えば、応答は時間と共に K に収束し「安定」である。ここで、 $\zeta = 0$ の場合はどうなるだろうか。この場合のステップ応答は、

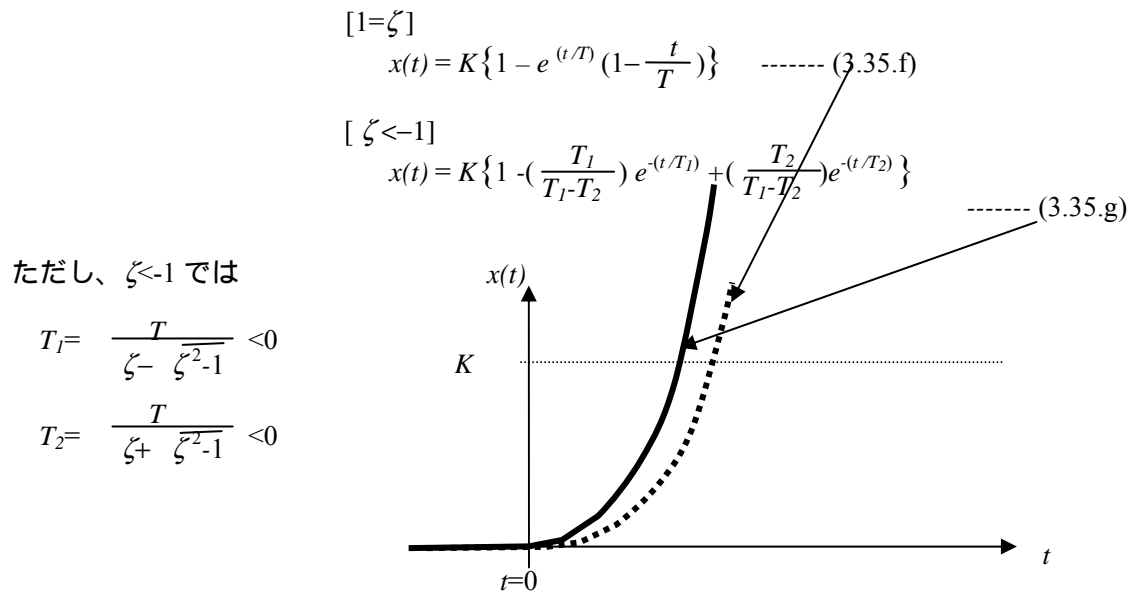
$$[\zeta = 0] \quad x(t) = K \left\{ 1 - \cos\left(\frac{1}{T} t\right) \right\} \quad \text{----- (3.35.d)}$$

$$[-1 < \zeta < 0] \quad x(t) = K \left\{ 1 - e^{(|\zeta|/T)t} \cos\left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{T} t\right) - \frac{\zeta}{1-\zeta^2} e^{(|\zeta|/T)t} \sin\left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{T} t\right) \right\} \quad \text{----- (3.35.e)}$$



となり、ステップ応答は K を中心に益々振幅が大きくなって時間と共に発散する結果になる。

更に ζ が-1より小さくなると、ステップ応答は(3.35.b)式と同じ形になるが、二つの時定数： $T_1 T_2$ の内、 T_1 は少なくとも負の値となり、応答はKから離れ、無限の大きさに発散する。



2次遅れの制御系は、以上のように5種類の応答に分けることができるが、系の安定・不安定については次のようにまとめられる。

- $\zeta > 0$ の時「安定」
- $\zeta = 0$ の時「不安定（限界安定）」
- $\zeta < 0$ の時「不安定」

5.1 ステップ応答・インパルス応答と系の安定・不安定

【伝達関数が1次遅れの場合】

1次遅れのステップ応答はTの値にかかわらず、その解は全て(3.34")式の形で表現することができる。より具体的には、伝達関数の分母を以下のように展開する。

$$Ts+1 = T(s-P) \quad \text{----- (5.1)}$$

ただし、Pは $Ts+1=0$ の根であり、 $P = -(1/T)$

この場合の伝達関数は、

$$\frac{K}{Ts+1} = \frac{K}{T(s-P)}$$

<ステップ応答> この応答のLaplace変換は伝達関数に(1/s)を掛けて与えられる。

$$\mathcal{L}x = \frac{K}{T(s-P)s} = \frac{a}{(s-P)} + \frac{b}{s}$$

$a = -K, b = K$ より、上式を逆Laplace変換すると、この系のステップ応答は次式となる。

$$x(t) = K \{ 1 - e^{(P)t} \} \quad \text{----- (5.2)}$$

<インパルス応答> この応答のLaplace変換は伝達関数そのもので与えられる。

$$\mathcal{L}x = \frac{K}{T(s-P)}$$

$$x(t) = \left(\frac{K}{T} \right) e^{(P)t} \quad \text{----- (5.3)}$$

【伝達関数が2次遅れの場合】

前述のステップ応答は一般に複素数を用いて表記すると、その解は全て(3.35.c)式の形で表現することができる。より具体的には、伝達関数の分母を以下のように展開する。

$$T^2s^2+2T\zeta s+1=T^2(s-P_1)(s-P_2) \quad \text{----- (5.4)}$$

ただし、 $P_{1,2}$ は $T^2s^2+2T\zeta s+1=0$ の根であり、 $\zeta^2 < 1$ の場合は複素数になる。

$$P_{1,2}=\begin{cases} \frac{-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2-1}}{T}, & (\zeta^2 > 1 \text{ の場合}) \\ \frac{-\zeta \pm j\sqrt{1-\zeta^2}}{T}, & (\zeta^2 < 1 \text{ の場合}) \end{cases} \quad \text{----- (5.5)}$$

この場合の伝達関数は、

$$\frac{K}{T^2s^2+2T\zeta s+1} = \frac{K}{T^2(s-P_1)(s-P_2)}$$

<ステップ応答> この応答の Laplace 変換は伝達関数に(1/s)を掛けて与えられる。

$$\frac{K}{T^2(s-P_1)(s-P_2)s} = \frac{a}{(s-P_1)} + \frac{b}{(s-P_2)} + \frac{c}{s}$$

$a=K P_2/(P_1-P_2)$, $b=-K P_1/(P_1-P_2)$, $c=K$ より、上式を逆 Laplace 変換すると、この系のステップ応答は次式に要約される。

$$x(t) = K \left\{ 1 + \left(\frac{P_2}{P_1-P_2} \right) e^{P_1 t} - \left(\frac{P_1}{P_1-P_2} \right) e^{P_2 t} \right\} \quad \text{----- (5.6)}$$

<インパルス応答> この応答の Laplace 変換は伝達関数そのもので与えられる。

$$\frac{K}{T^2(s-P_1)(s-P_2)} = \frac{a'}{(s-P_1)} + \frac{b'}{(s-P_2)}$$

$a'=-K P_1 P_2/(P_1-P_2)$, $b'=+K P_1 P_2/(P_1-P_2)$ より、上式を逆 Laplace 変換すると、この系のインパルス応答は次式に要約される。

$$x(t) = K \left\{ \left(\frac{P_1 P_2}{P_1-P_2} \right) e^{P_1 t} - \left(\frac{P_1 P_2}{P_1-P_2} \right) e^{P_2 t} \right\} \quad \text{----- (5.7)}$$

以上のステップ応答やインパルス応答から、以下のことがわかる。

(1) 指数関数項の $e^{P_1 t}$ 、あるいは $e^{P_1 t}, e^{P_2 t}$ の指数の実数部が系の収束や発散のカギになる。すなわち系の安定性を決定する。それは(伝達関数の分母=0)の根の実数部の極性に依存する。

したがって、伝達関数の分母は非常に重要な意味を持っており、

[伝達関数の分母]=0 を特性方程式と言い、その根を伝達関数の極と言う。

制御系が安定であるためには、この極の実数部が正(プラス)の値でないことが必要十分条件になる。

5.2 安定の判別法

特性方程式は一般に s の高次多項式となり、3 次以上では根を解析的に求めることが困難になる。特性方程式を解かずに、安定・不安定の判別をする方法として、「ナイキスト(Nyquist)の方法」や特性方程式から代数的に判別する「ラウス・フルビッツ(Routh-Hurwitz 英式でルース・ハービッツとも呼ばれる)の方法」等がある。以下ではこれらの方法について示す。

(1) Hurwitz の安定判別法 (Routh の判別法も基本的には同じ)

特性方程式： $a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_n = 0$ において、
 $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ の係数が全て存在し、
 これらが全部同符号で、
 次の行列式(Hurwitz の行列式) が成り立つこと。

$$H_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & a_{2(i-1)-1} \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & a_{2(i-1)-2} \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & a_{2(i-1)-3} \\ 0 & a_0 & a_2 & \dots & a_{2(i-1)-4} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} \end{vmatrix} > 0 \quad \text{----- (5.5)}$$

ただし、 $i=2,3, \dots, n$ $a_k: k < 0, k > n$ の時 0 とする。

この行列式はたとえば、 $n=2$ ならば次式となり、

$$H_2 = \begin{vmatrix} a_1 \\ a_0 \end{vmatrix} = a_1 > 0$$

2 次式の特性方程式を持つ伝達関数では Hurwitz の安定判別法 (全部同符号の条件) と合わせて、全ての係数が正であることが必要で、 $\zeta > 0$ となる先の判別と一致していることがわかる。

$n=3$ の場合、 $a_0 \sim a_3$ が全部同符号で、かつ

$$H_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0$$

$n=4$ の場合、 $a_0 \sim a_4$ が全部同符号で、かつ

$$H_4 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = a_0 a_1 a_2 - a_1^2 a_4 - a_0 a_3^2 > 0$$

$n=5$ の場合も同様であるが、行列式の解法がやや面倒になるが以下のように解ける。(詳しくは線形代数学の行列式計算の項を参照)

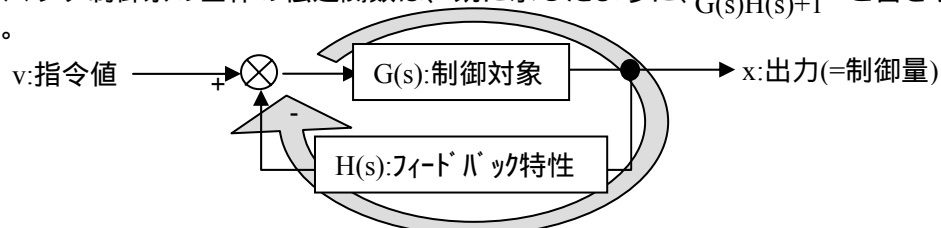
$$\begin{array}{c}
 \text{Hi=} \\
 \left[\begin{array}{cccc|cccc}
 a_1 & a_3 & a_5 & \dots & a_{2(i-1)-1} & 1 & a_3/a_1 & a_5/a_1 & \dots & a_{2(i-1)-1}/a_1 \\
 a_0 & a_2 & a_4 & \dots & a_{2(i-1)-2} & a_0 & a_2 & a_4 & \dots & a_{2(i-1)-2} \\
 0 & a_1 & a_3 & \dots & a_{2(i-1)-3} & 0 & a_1 & a_3 & \dots & a_{2(i-1)-3} \\
 0 & a_0 & a_2 & \dots & a_{2(i-1)-4} & 0 & a_0 & a_2 & \dots & a_{2(i-1)-4} \\
 0 & 0 & a_1 & \dots & \dots & 0 & 0 & a_1 & \dots & \dots \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & 0 & 0 & \dots & a_{i-1} & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{i-1}
 \end{array} \right] \xrightarrow{= a_1} \dots
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \mathbf{1} \\
 \mathbf{0} \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 \dots \\
 \dots \\
 \dots \\
 0
 \end{array}
 \left[\begin{array}{cccc|cccc}
 a_3/a_1 & a_5/a_1 & \dots & a_{2(i-1)-1}/a_1 & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 a_2 - a_0 a_3/a_1 & a_4 - a_0 a_5/a_1 & \dots & a_{2(i-1)-2} - a_0 a_{2(i-1)-1}/a_1 & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 a_1 & a_3 & \dots & a_{2(i-1)-3} & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 a_0 & a_2 & \dots & a_{2(i-1)-4} & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & a_1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & 0 & 0 & \dots & a_{i-1} & \dots & \dots & \dots
 \end{array} \right] \\
 \xrightarrow{= a_1(a_2 - a_0 a_3/a_1)} \\
 \begin{array}{c}
 \mathbf{1} \\
 \mathbf{0} \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 \dots \\
 \dots \\
 \dots \\
 0
 \end{array}
 \left[\begin{array}{cccc|cccc}
 a_3/a_1 & a_5/a_1 & \dots & a_{2(i-1)-1}/a_1 & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \mathbf{1} & (a_4 - a_0 a_5/a_1) / (a_2 - a_0 a_3/a_1) & \dots & (a_{2(i-1)-2} - a_0 a_{2(i-1)-1}/a_1) / (a_2 - a_0 a_3/a_1) & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & a_3 - a_1 \left(\dots \right) & \dots & a_{2(i-1)-3} - a_1 \left(\dots \right) & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & a_2 - a_0 \left(\dots \right) & \dots & a_{2(i-1)-4} - a_0 \left(\dots \right) & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & 0 & a_1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & 0 & 0 & \dots & a_{i-1} & \dots & \dots & \dots
 \end{array} \right]
 \end{array}$$

以下、順次 $\left[\dots \right]$ の行列の第1列目が $\begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix}$ となるよう、機械的に演算操作を行って行く
と行列式の解が得られる。

(2) Nyquist の安定判別法

フィードバック制御系の全体の伝達関数は、既に見したように、 $\frac{G(s)}{G(s)H(s)+1}$ と書き表されることを示した。



制御系の安定性は、[伝達関数の分母=0]となる特性方程式の根、すなわち極の実数部が正でないことが必要十分条件であったから、 $G(s)H(s)+1=0$ を満足する s の実数部が正でないことと等価である。すなわち、 $G(s)H(s)=-1$ とする正の実数部を持つ s が存在しないことを証明すれば、制御系は安定となる。

ここで、 $G(s)H(s)$ のことを一巡伝達関数と言う。

さて次に、 s と一巡伝達関数 $G(s)H(s)$ の関係を複素平面で調べてみよう。

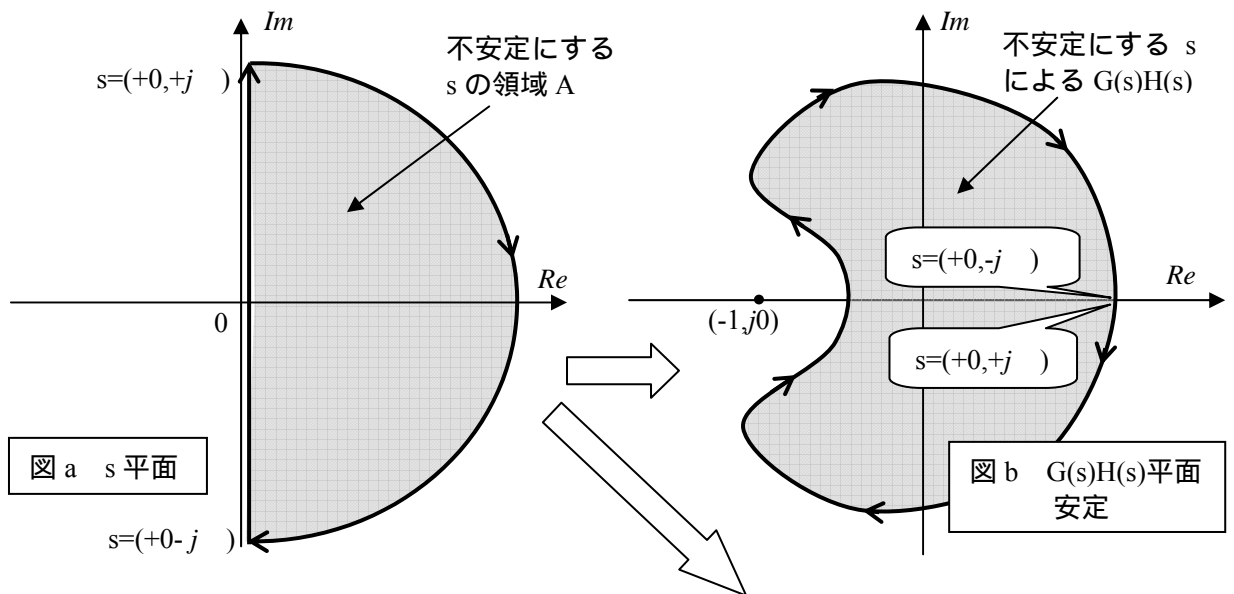
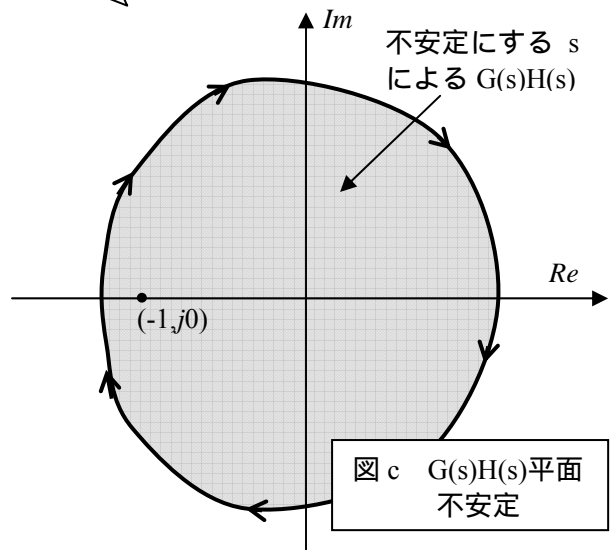


図 a は実数部が正となり制御系を不安定にする s の集合 A でこの周りの境界を右回り $s=+0-j$ から $s=+0+j$ の方向に周回した場合、この制御系の一巡伝達関数の軌跡を図 b に示す。写像の法則により、この図で同一周りで囲まれた領域は集合 A によって作られた部分であることがわかっている。

ここで、図 b のようにこれらの領域に $(-1, j0)$ が含まれていなければ、 $G(s)H(s)=-1$ とする正の実数部を持つ s が存在しないこととなり、制御系が安定であることを示している。

逆に、図 c の場合は、同一周りで囲まれた領域の中にあることから、 $G(s)H(s)=-1$ とする正の実数部を持つ s が存在し、制御系が不安定であることを示している。



以上より、Nyquist の安定判別法は実用的には以下のように要約される。(Nyquist の本来の安定判別法はやや複雑で、本テキストではわかりやすく以下のようにまとめる。)

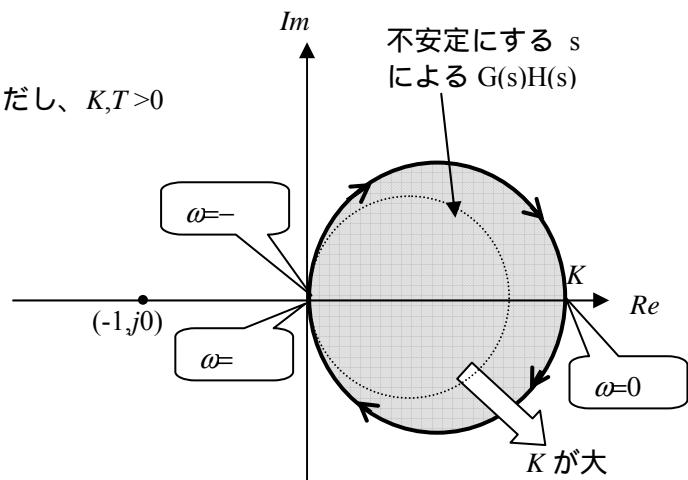
一巡伝達関数 $G(s)H(s)$ で $s=j\omega$ として、 $\omega=0$ に変化させ、 $G(s)H(s)$ のベクトル軌跡を複素平面上に描く。($\omega=-0$ の軌跡は上記の軌跡を実軸に対して対称となる。)
 この軌跡上を $\omega=-0 \rightarrow +\infty$ 方向に進む時、点 $(-1, j0)$ が進行方向の左側にあれば「安定」。右側もしくはベクトル軌跡上にあれば「不安定」

(ただし、ベクトル軌跡が複数回、点 $(-1, j0)$ を回る場合は、図 b,c に戻って領域内に $(-1, j0)$ が含まれるか否かを詳しく調べる必要がある。)

< 代表的な一巡伝達関数と Nyquist の安定判別例 >

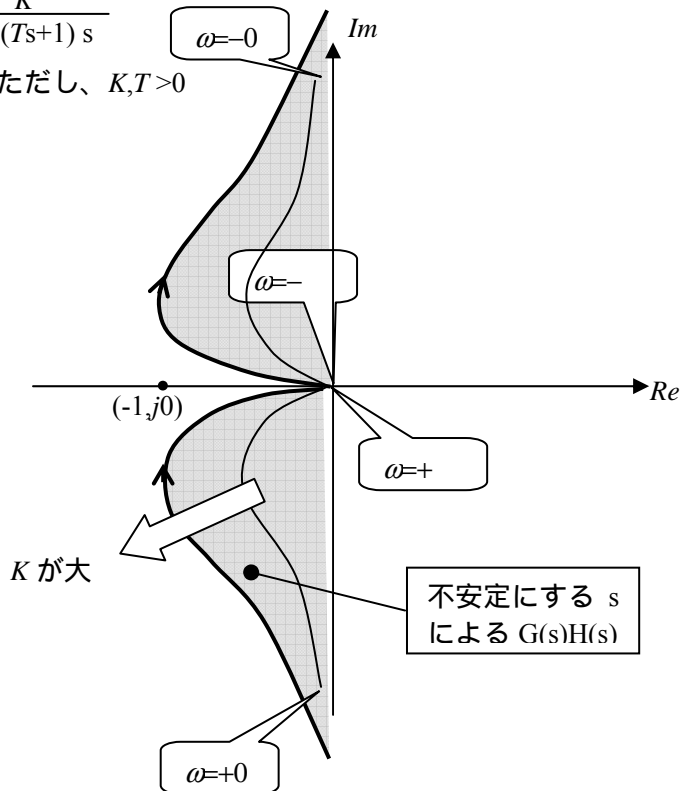
(1) 一次遅れ : $G(s)H(s) = \frac{K}{Ts+1}$

ただし、 $K, T > 0$
 K の値にかかわらず「安定」



(2) 一次遅れ × 積分 : $G(s)H(s) = \frac{K}{(Ts+1)s}$

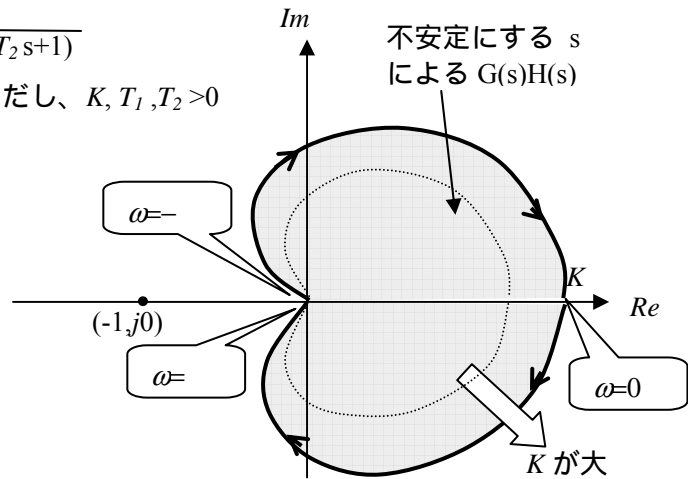
ただし、 $K, T > 0$
 K の値にかかわらず「安定」



(3) 二次遅れ : $G(s)H(s) = \frac{K}{(T_1s+1)(T_2s+1)}$

ただし、 $K, T_1, T_2 > 0$

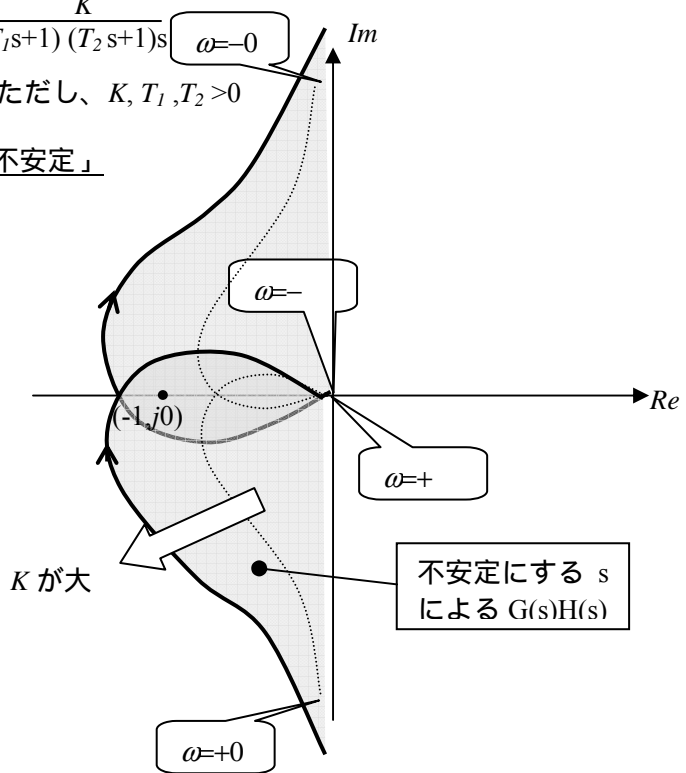
K の値にかかわらず「安定」



(4) 二次遅れ × 積分 : $G(s)H(s) = \frac{K}{(T_1s+1)(T_2s+1)s}$

ただし、 $K, T_1, T_2 > 0$

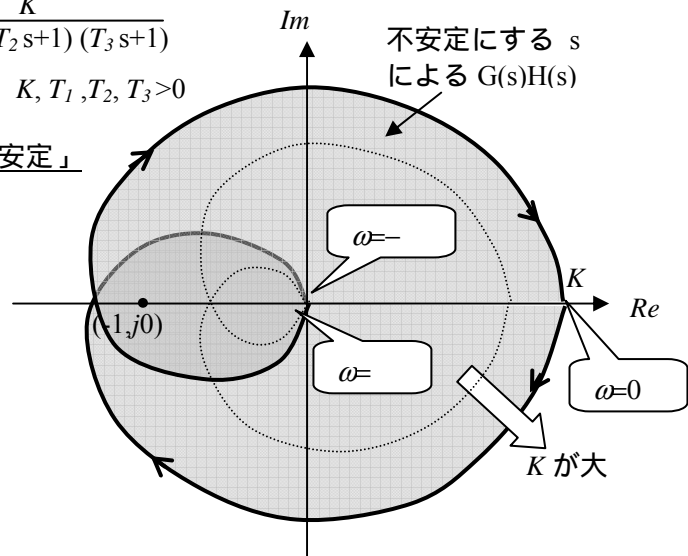
K 小 : 「安定」、 K 大 : 「不安定」



(5) 三次遅れ : $G(s)H(s) = \frac{K}{(T_1s+1)(T_2s+1)(T_3s+1)}$

ただし、 $K, T_1, T_2, T_3 > 0$

K 小 : 「安定」、 K 大 : 「不安定」



(3) Bode 線図による安定判別法

(ゲイン余裕と位相余裕：Gain margin and Phase Margin)

フィードバック制御系の一巡伝達関数(GH)を複素平面上にプロットしたものが Nyquist 線図であり、この線図を使って安定判別を行うのが Nyquist の安定判別方法であった。これを Bode 線図上で行えるよう書き直したのがこの方法である。

ゲイン余裕(Gain Margin)

Nyquist の安定判別法において、安定条件は一巡伝達関数のベクトル軌跡が $\omega=-0 \rightarrow +\infty$ 方向に進む時、点(-1,j0)が進行方向の左側にあることであった。複素平面上の点(-1,j0)は、

振幅： $|G(j\omega)H(j\omega)|=1$

位相： $\angle G(j\omega)H(j\omega)=-180^\circ$

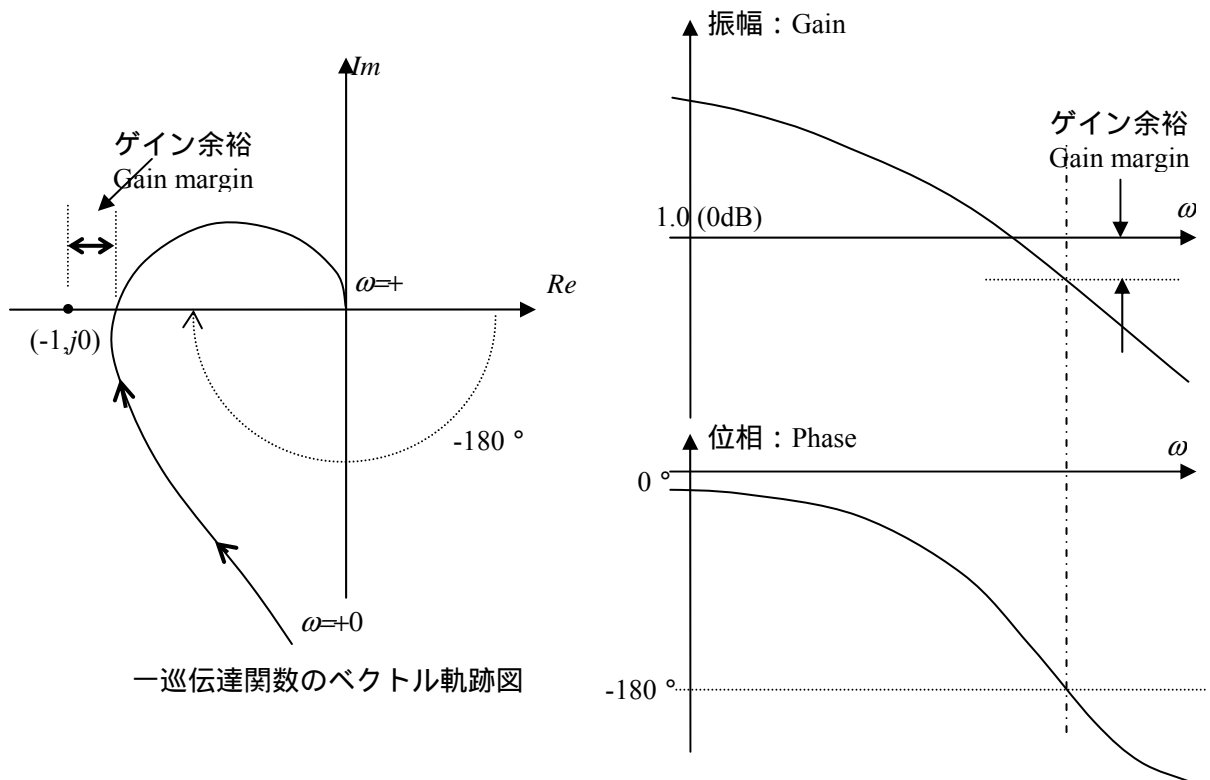
である。従って、一巡伝達関数の位相が -180° の時、振幅が1.0以下であれば、ベクトル軌跡は点(-1,j0)の右側を通り、系は安定である。

しかし、実際の機械系においては、機械パラメータが時間と共に変化することを考慮する必要がある。つまり、位相が -180° における一巡伝達関数の振幅が1.0以下であっても、振幅が1.0に近い場合は、わずかのパラメータ変動により、系が不安定になる可能性がある。振幅がどの程度増加すれば1.0となり、系が不安定になるかを示す量をゲイン余裕と言う。

Nyquist の安定判別方法 “一巡伝達関数のベクトル軌跡が $\omega=-0 \rightarrow +\infty$ 方向に進む時、点(-1,j0)が進行方向の左側にあれば「安定」。右側もしくはベクトル軌跡上にあれば「不安定」”

一巡伝達関数のベクトル軌跡の実軸との交点が (-1,j0)の右側にあること。

Bode 線図の振幅特性で言い換えれば、一巡伝達関数の位相が -180° の時、振幅が1.0以下であること。この余裕：ゲイン余裕 大きい程系は安定



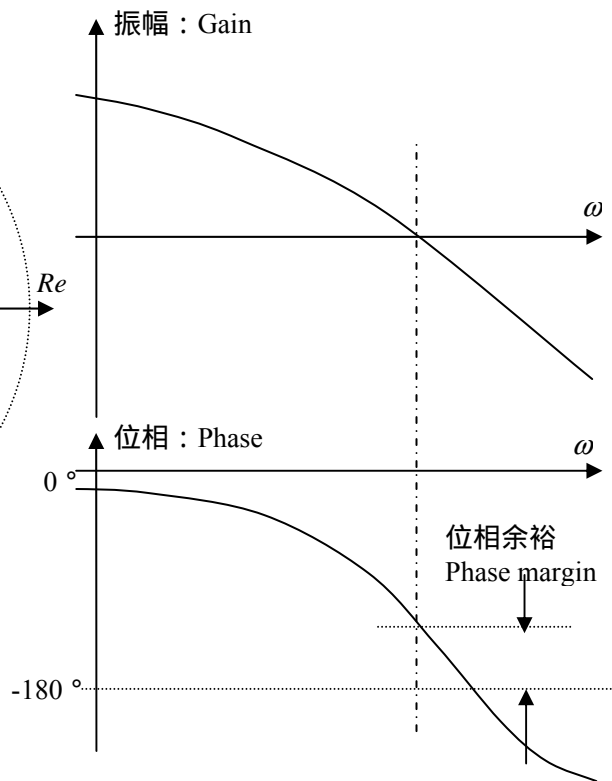
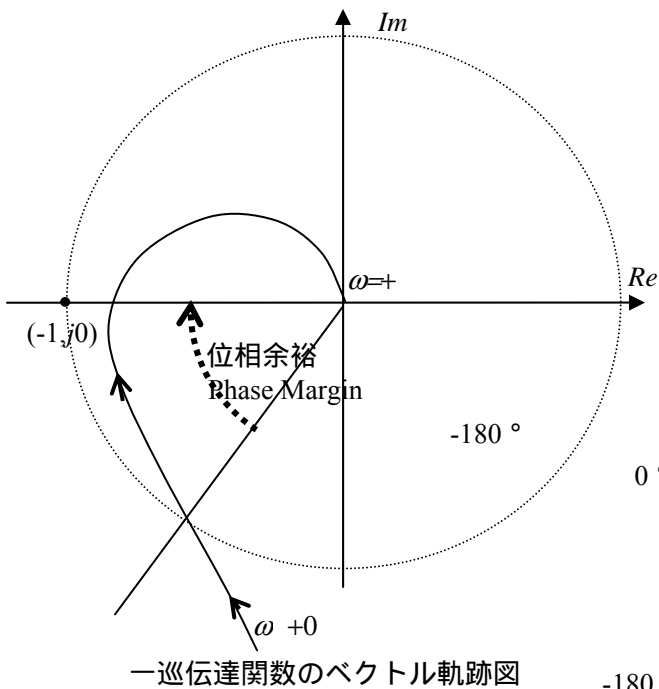
位相余裕(Phase Margin)

同様な考え方で、一巡伝達関数が 1.0 の時の位相が -180° より小さければ、ベクトル軌跡は点 $(-1, j0)$ の右側を通り、系は安定と言える。逆に -180° より大きければ不安定となる。安定な場合でもこの位相が -180° に近いとわずかのパラメータ変動により、系が不安定になり易い。一巡伝達関数の位相がどの程度遅れれば -180° となり、系が不安定になるかを示す角度を位相余裕と言う。

Nyquist の安定判別方法 “一巡伝達関数のベクトル軌跡が $\omega=-0 \rightarrow +\infty$ 方向に進む時、点 $(-1, j0)$ が進行方向の左側にあれば「安定」。右側もしくはベクトル軌跡上にあれば「不安定」”

一巡伝達関数のベクトル軌跡の実軸との交点が $(-1, j0)$ の右側にあること。

Bode 線図の位相特性で言い換えれば、一巡伝達関数の振幅が 1.0 の時、位相が -180° 以下であること。この余裕：位相余裕 大きい程系は安定



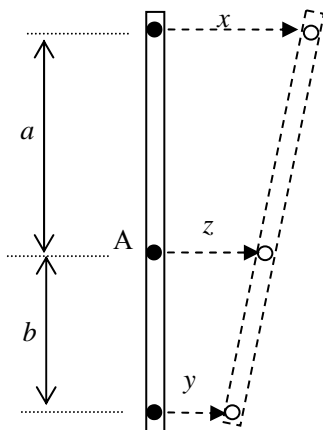
6 . 制御系の具体的実現

制御系の構成の仕方や構成した制御系が安定して作動するための必要条件などについて前節までに示した。ここでは、こうした制御系を具体的に実現する手法について示す。

ブロック線図で描かれた信号・情報の流れを具体的に実現するには、どうすればできるのだろうか？ 一口に信号を加算・減算する、係数を乗ずる、あるいは微分・積分するといっても、ブロック線図のように信号線をつなげば実現する訳ではない。ここでは代表的な方法について、その仕組みを示す。

1 . 機械的な方法

(1) レバーによる方法



< 加算器 >

左図のようなレバーを考える。はヒンジになっており、回転はこの周りに自由にできるとする。ここでレバーの上端が x 、下端が y 右に移動したとすると、点 A の移動量は、

$$z = \frac{ay+bx}{a+b} = \left(-\frac{b}{a+b}\right)x + \left(\frac{a}{a+b}\right)y \quad \text{----- (6.1)}$$

となり、この点で物理的移動量の加算ができる。 x や y を反対方向に動かせばもちろん減算も可能である。ここで、 a 、 b を適当に選べば、加算する係数が設定できる。

< 係数器 (正の係数器) >

また、このレバーで、 $y=0$ と固定すると、

$$z = \left(\frac{b}{a+b}\right)x \quad \text{----- (6.2)}$$

となり、出力 z は x の係数を設定することができる。

< 符号変換器 (負の係数器) >

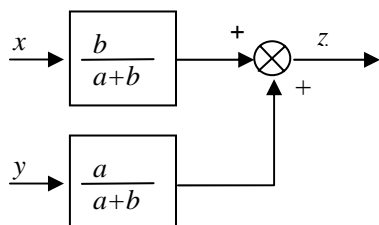
また、このレバーで、 $z=0$ と固定すると、

$$y = -\left(\frac{b}{a}\right)x \quad \text{----- (6.3)}$$

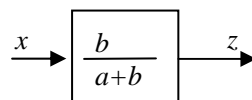
となり、 y は x の符号を反転し、係数を設定することができるようになる。

これらをブロック線図で描けば、それぞれ以下ようになる。

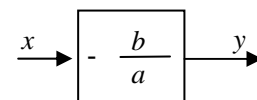
< 加算器 >



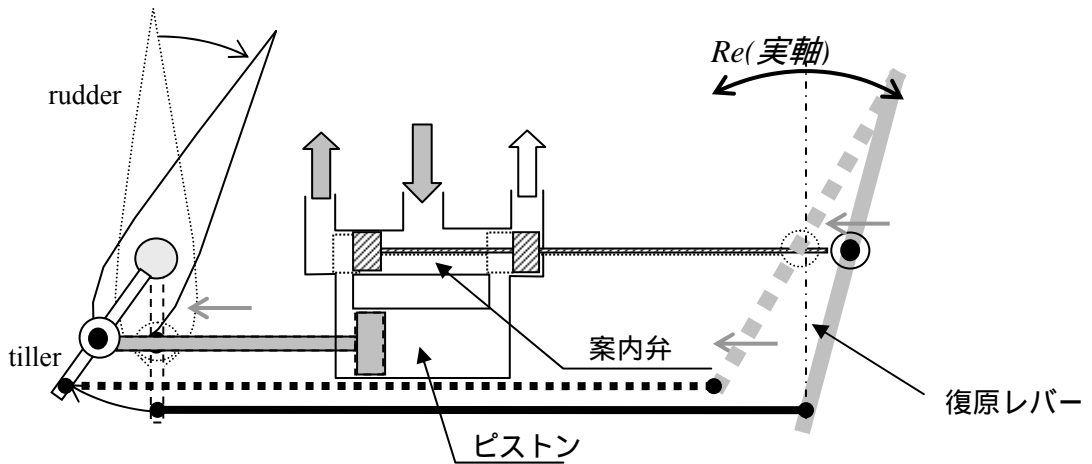
< 係数器(正の係数器) >



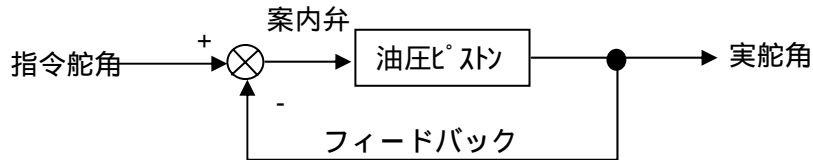
< 符号変換器(負の係数器) >



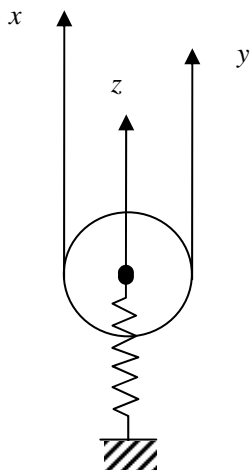
大型船の油圧式操舵装置はこのようなレバーの簡単な演算メカニズムを利用した制御システムの代表的な例である。



この場合、 x が指令舵角、 y が $-$ (実舵角) であり、 $a=b$ として z の位置を油圧装置の案内弁の移動量とすれば、 $z=x-y$ すなわち、(指令舵角) - (実舵角) となり、以下のようなフィードバック制御系を作ることができる。



(2) 滑車による方法



< 加算器 >

左図のような滑車(動滑車)を考える。この滑車の索の移動量をそれぞれ、 x 、 y とする。滑車の移動を z とすると、

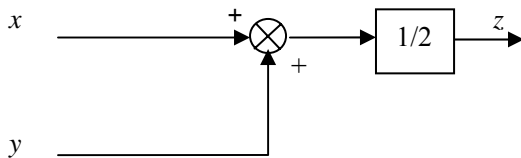
$$z = (x + y)/2 \quad \text{----- (6.4)}$$

となり、加算ができる。 x や y を反対方向に動かせばもちろん減算も可能である。

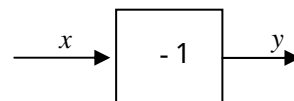
また、この歯車で、 $z=0$ として固定すると、

$$y = -x \quad \text{----- (6.5)}$$

となり、 y は x の符号を反転することができる。

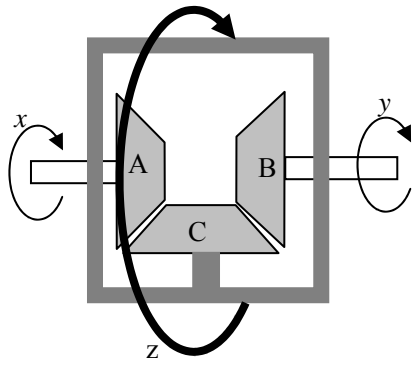


< 加算器 >

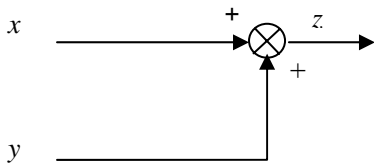


< 符号変換器 >

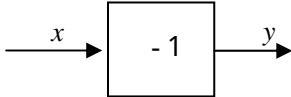
(2) 歯車による方法



< 加算器 >



< 符号変換器 (負の係数器) >



< 加算器 >

左図のような歯車 (差動歯車) を考える。A と B の歯車は同じ直径の歯車で、外側のケースを貫通している。その回転角をそれぞれ、 x 、 y とする。歯車 C は遊星歯車 (自由に回転できる歯車) でその軸が外側のケースに固定されている。このケースの回転角を z とすると、

$$z = x + y \quad \text{----- (6.6)}$$

となり、回転角の加算ができる。 x や y を反対方向に動かせばもちろん減算も可能である。自動車の駆動輪ではエンジンの出力軸を z とし、カーブを曲がる際、左右の車輪の回転が異なる現象 (内輪差) を上手く調整している。

< 符号変換器 (負の係数器) >

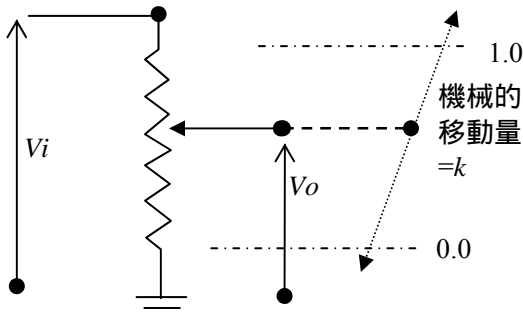
また、この歯車で、 $z=0$ として固定すると、

$$y = -x \quad \text{----- (6.7)}$$

となり、 y は x の符号を反転し、係数を設定することができるようになる。

2. 電気的な方法

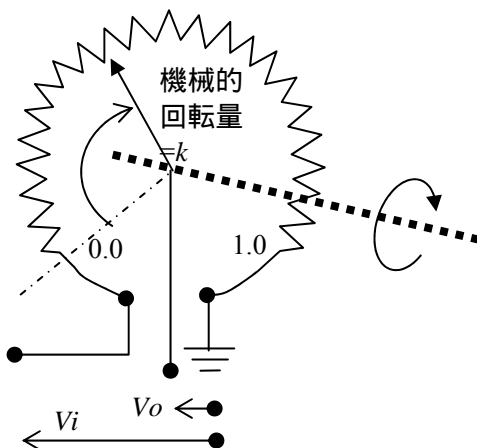
多くの制御信号・情報は電圧・電流の電気信号に変換されることが多い。



例えば、移動量を電圧に変換する場合は、左図のように可変抵抗器 (potentiometer) 等を機械的に連結し、機械的移動量を電圧信号に変換することができる。すなわち、

$$V_o = k V_i \quad \text{----- (6.8)}$$

回転角の変換も、基本的にこれと同じで、上記の可変抵抗器を円形にすればよい。すなわちラジオやステレオ装置のボリュームである。



この他にも、移動量や回転角を種々な方法で、電気量に変換する装置がある。また、速度、加速度、力などの機械的諸量や、温度、圧力といった物理量も電気信号に変換することが可能である。こうした機器を一般にセンサー (sensor) と呼ばれる。

こうした電気量 (多くは電圧信号) に変換されたものを、加算・減算、係数を乗ずる、微分・積分する方法について紹介する。

(1) 演算増幅器(operational amplifier、通称 OP アンプ)と演算の仕組み

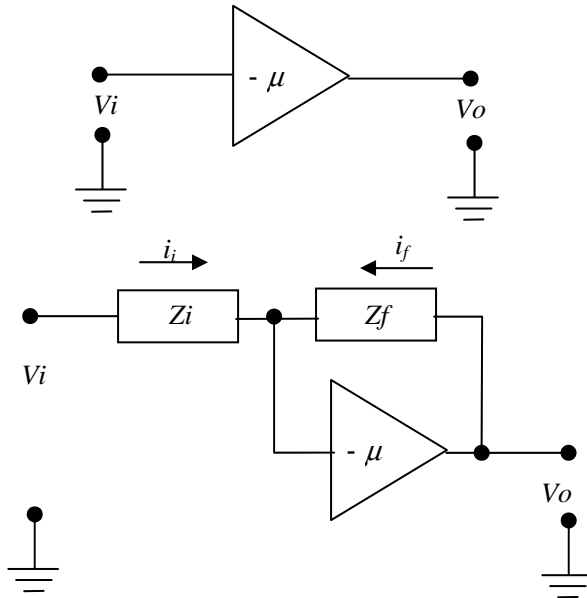
演算増幅器とはいわゆるアンプであるが、微小な信号を増幅することができる。その増幅率は一般に $10^5(=100\text{dB})$ 程度あり、周波数帯域も直流($\omega=0$)から高周波領域まで使用可能で、位相遅れも少ない。精密な演算増幅器になる程この性能が優れている。

この演算増幅器の増幅率を μ とし、この増幅器の入力、出力電圧をそれぞれ V_i 、 V_o とすると、

$$V_o = -\mu V_i \quad \text{----- (6.9)}$$

となる。

この演算増幅器に左図のようなインピーダンス(抵抗器やコンデンサ)を接続すると、増幅器の入力電圧は(6.9)式より $(-V_o/\mu)$ である。また、演算増幅器は電圧のみを増幅し、電流はほとんど流さないで、左図のように電流を考えると、キルヒホッフの法則によって、



$$i_i + i_f = 0$$

すなわち、

$$\frac{(-V_o/\mu) - V_i}{Z_i} + \frac{(-V_o/\mu) - V_o}{Z_f} = 0$$

上式から、次式のような V_o と V_i の関係が得られる。

$$V_o = - \left\{ \frac{1}{1+(1/\mu)+(1/\mu)(Z_f/Z_i)} \right\} \left(-\frac{Z_f}{Z_i} \right) V_i \quad \text{----- (6.10)}$$

ここで、 μ は非常に大きいので、 $(1/\mu)=0$ となり、上式は非常に簡単になる。

$$V_o = - \left(\frac{Z_f}{Z_i} \right) V_i \quad \text{----- (6.11)}$$

次に、入力インピーダンスが複数にある場合を考えよう。この場合も演算増幅器の入力点にキルヒホッフの法則を適用すると、

$$\sum_{j=1}^n i_{ij} + i_f = 0$$

すなわち、

$$\sum_{j=1}^n \frac{(-V_o/\mu) - V_{ij}}{Z_{ij}} + \frac{(-V_o/\mu) - V_o}{Z_f} = 0$$

これより、

$$-V_o \sum \frac{1}{\mu Z_{ij}} - \sum \frac{V_{ij}}{Z_{ij}} - V_o \frac{(1/\mu)+1}{Z_f} = 0$$

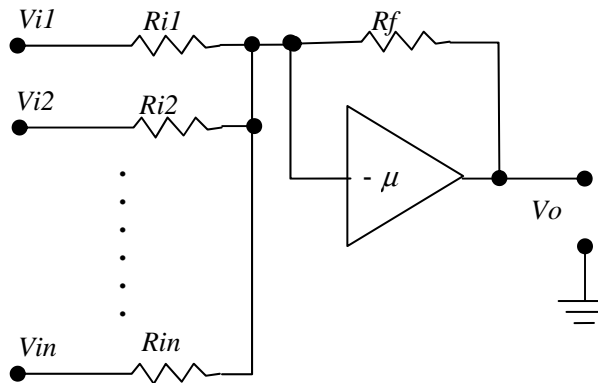
上式から、次式のような V_o と $V_{ij}(j=1,n)$ の関係が得られる。

$$V_o = - \frac{1}{1+(1/\mu)+\sum_{j=1,n} (Z_f/\mu Z_{ij})} \sum \left(\frac{Z_f}{Z_{ij}} \right) V_{ij} \quad \text{----- (6.12)}$$

同様に、 μ は非常に大きいので、 $(1/\mu)=0$ となり、次式となる。

$$V_o = - \sum (\text{---}) V_{ij} \text{-----} (6.13)$$

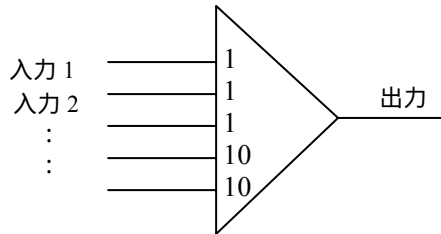
(2) 加算器



上記の演算回路において、インピーダンスを Z_f , Z_{ij} を単なる抵抗器(resistance) R_f , R_{ij} にすると、(6.11)式は次式のような加算となる。(ただし、符号が逆転する)

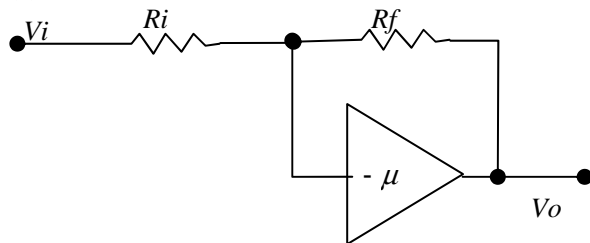
$$V_o = - \sum_{j=1, n}^n \left(\frac{R_f}{R_{ij}} \right) V_{ij} \text{-----} (6.14)$$

<アナログ計算機の記号>



$R_f=1M\Omega (=10^6\Omega)$ の場合、 $R_{ij}=1M\Omega$ で「1」、 $R_{ij}=100k\Omega (=10^5\Omega)$ で「10」となる。

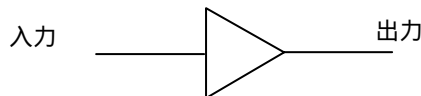
(3) 符号変換器



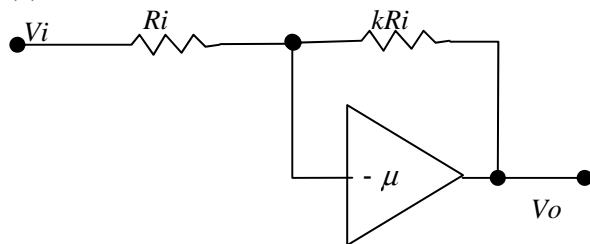
上記の加算器で、単一入力とし、 $R_f = R_i$ とすると、符号変換器となる。

$$V_o = - V_{ij} \text{-----} (6.15)$$

<アナログ計算機の記号>



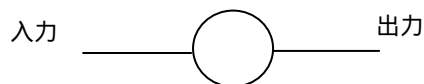
(4) 係数器 (負の係数)



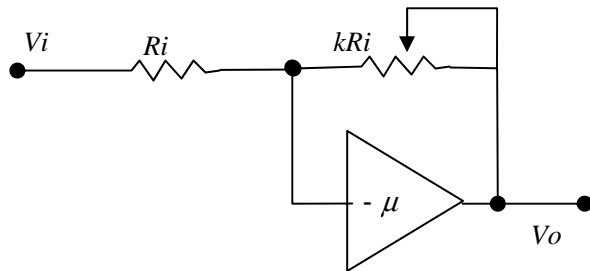
上記の加算器で、単一入力とし、 $R_f = kR_i$ とすると、係数器となる。

$$V_o = - kV_{ij} \text{-----} (6.16)$$

<アナログ計算機の記号>

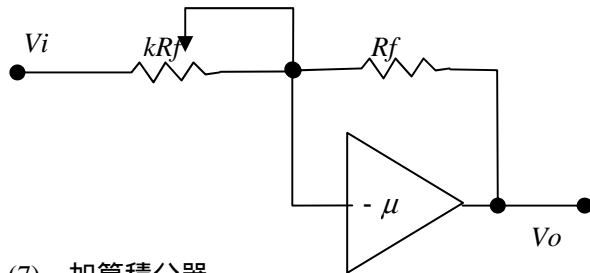


(5) 係数器 (負の係数で可変型)



上記の加算器は固定であるが、これを可変抵抗器とすると、任意の係数を設定することが可能になる。

(6) 係数器 (負の係数で可変逆数型)

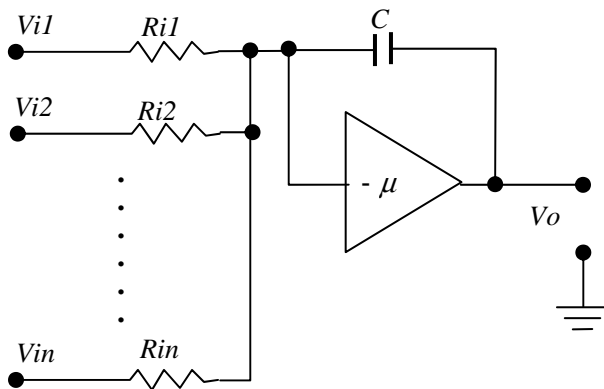


上記とは逆に、 $R_i = kR_f$ とすると、逆数を設定する係数器となる。これは、係数を大幅に変更したい場合等によく利用される。

$$V_o = - (1/k)V_i \quad \text{----- (6.17)}$$

ただし、 $k=0$ とすると演算器が飽和するので、極端に小さい係数は設定できない。

(7) 加算積分器



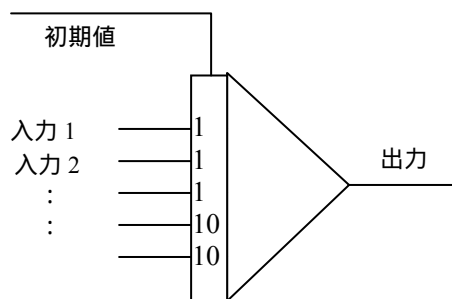
(2) の加算器において、 Z_f をコンデンサー (capacitance) に置き換え、その容量を C とすると、このインピーダンスはラプラス変換表示で、 $1/(CS)$ であり、演算増幅器の出力電圧は、(6.13) 式より、

$$V_o = - \sum_{j=1, n}^n \left(\frac{1}{CR_{ij}S} \right) V_{ij} \quad \text{----- (6.18)}$$

となり、加算可能な積分器となる。もちろん単独入力でもよい。

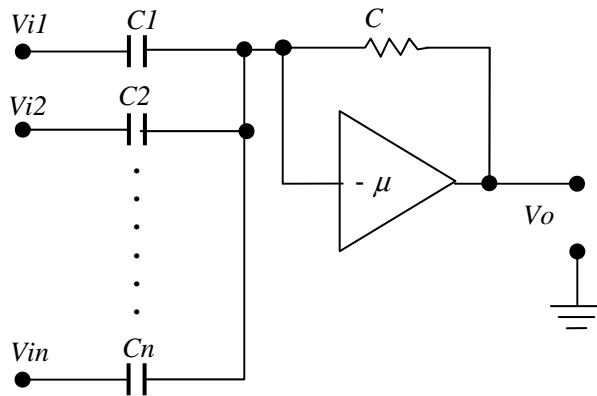
積分器として、分子に S を持つリアクタンス (reactance = コイルでラプラス変換表示で LS) を Z_i 側に置くことも原理的には可能である。しかし、容量の大きいリアクタンスは寸法重量が大きくなるので、現実の演算回路では採用されない。

< アナログ計算機の記号 >



$R_f = 1\mu F (= 10^{-6}F)$ の場合、 $R_{ij} = 1M\Omega (= 10^6\Omega)$ で「1」、 $R_{ij} = 100k\Omega (= 10^5\Omega)$ で「10」となる。

(8) 加算微分器



(2)の加算器において、 Z_{ij} をコンデンサー (capacitance)に置き換え、その容量を C_j とすると、このインピーダンスはラプラス変換表示で、 $1/(CS)$ であり、演算増幅器の出力電圧は、(6.13)式より、

$$V_o = - \sum_{j=1, n}^n \left(\frac{C_j S}{R_{ij}} \right) V_{ij} \text{----- (6.19)}$$

となって、加算可能な微分器となる。もちろん単独入力でもよい。

ただし、微分特性は制御要素の節でも述べたとおり、周波数 ω に比例して振幅が増大するので、高周波に使用することはできない。

また、微分器として、分子に S を持つリアクタンス (reactance) を Z_f 側に置くことも原理的には可能であるが、積分器同様、大容量のリアクタンスは寸法重量が大きくなるので、現実の演算回路では一般に採用されない。

以上(2)~(8)に示した電気式の演算要素を活用して、制御系を自由自在に構成することができる。また、こうした要素を用いて、制御システムのシミュレーション (模擬演算) を行うこともできる。このような専用の演算装置をアナログコンピュータ (analogue computer) と呼ばれ、デジタルコンピュータ (digital computer) が発達する 1970 年初頭までは、現役の制御設計手段としてフルに活用されてきた。

<アナログコンピュータによるシミュレーション>

アナログコンピュータを用いて物理現象の実時間シミュレーションを行ってみよう。

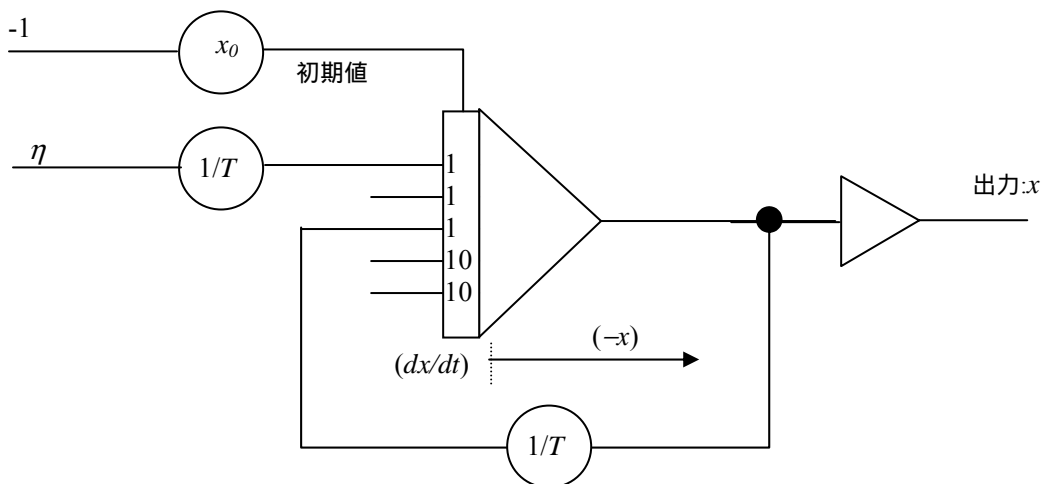
システムのモデルが以下の簡単な一次系の場合、

$$T(dx/dt) + x = \eta \text{--- (a)}$$

(a)式を変形すると、

$$(dx/dt) = (\eta - x)/T \text{--- (b)}$$

これをアナログコンピュータのプログラムに表すと次図となる。



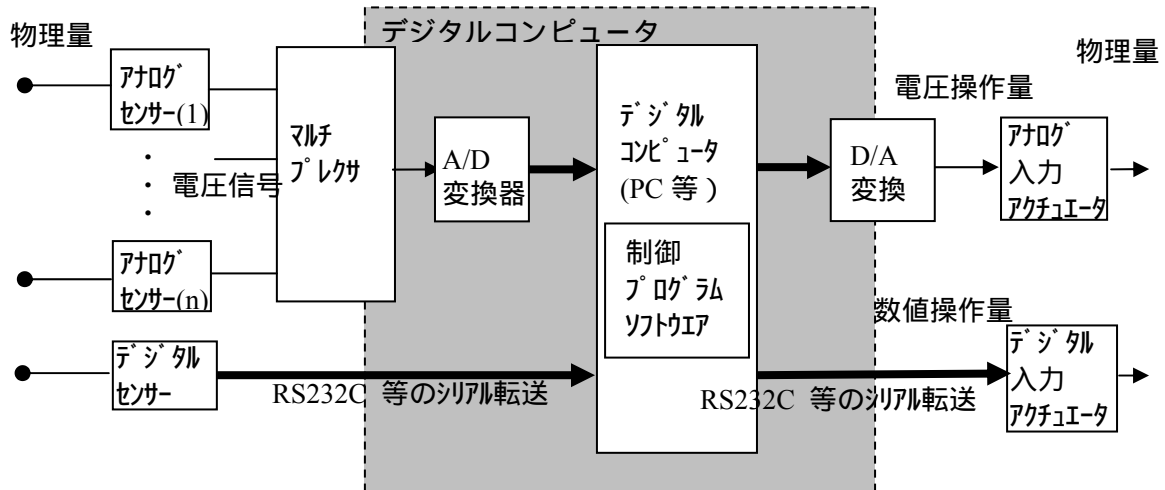
3. デジタルコンピュータによる方法

機械式、あるいは電気式の演算装置は瞬時に計算できるメリットがある反面、物理量でアナログ計算するため、誤差や不確定な要素が多い。また、新しい制御系の設計には試行錯誤的な要素も多く、制御系を変更する毎に機械や電気回路を変更することは不便である。

一方、数値計算を最も得意とする digital computer は年と共に発展を遂げ、小型・高速・大容量の記憶装置を持つに至り、昨今の制御システムには例外なく使用されるまでになった。本節では digital computer を使用した制御について概略紹介する。

(1) ハード構成

パーソナルコンピュータ(PC)等で制御する場合の制御演算部のハード構成は概略以下のように構成される。



(2) 各要素の説明

< センサー系 >

制御対象等の観測データを電気信号もしくは数値情報に変換する装置

- ・アナログセンサー : 制御対象等の物理量を電圧等の電気信号に変換して出力する装置
- ・デジタルセンサー : " を数値で出力する装置

数値は多くの場合、RS232C等の標準化された通信規約に従って、転送される。

< 信号処理系 >

観測データや操作量が電圧信号を介して行う場合に必要な装置

- ・マルチプレクサ : 複数の電圧信号を高速で切り替える装置
- ・A/D変換器 : 電圧信号(アナログ)をコンピュータで計算可能なように数値変換する装置
- ・D/A変換器 : コンピュータで計算された数値操作量を電圧信号に戻す装置。
アクチュエータにもコンピュータがあり、数値で受け取れる場合は不要。

< 演算部 >

観測データと所定のプログラムに従って、操作量を計算する。プログラムはC言語や、Visual BASIC等を使って専用のものを作成するか、または汎用ソフトウェアを利用することもできる。アナログ計算にはない高度な計算が自由自在に可能だが、その分計算時間も長くなる。瞬時計算は基本的にできないので僅かに遅れることは避けられず、制御対象が高周波の場合は計算負荷を下げる等の工夫が必要である。

< アクチュエータ >

計算された操作信号を実際の物理量に変換する装置

- ・アナログ入力アクチュエータ：入力が電圧信号形式のもの。
- ・デジタル入力アクチュエータ：入力が数値入力形式のもの。（アクチュエータが専用のコンピュータで操作されている場合）
センサーの場合と同様、数値は多くの場合、RS232C等の標準化された通信規約に従って、転送される。

7. 現代制御理論の概要

前節までには、古典制御理論を中心にその要点を示したが、コンピュータの発展に伴って、よりきめ細かな制御が可能になってきた。現実の機械などの制御対象となる特性は、時間と共に微妙に変化する場合が多く、また予期せぬ外乱（システムに混入する種々のノイズ）によって、システムが乱されることも多い。制御対象を観測するセンサー自体も必ずしも正確にキャッチしているとは限らず、多かれ少なかれ誤差や作動ミスもある。こうした種々のノイズや制御特性の時間的变化に対し、古典制御理論に基づいて始めから固定された制御システムではいつも十分対応できるとは限らない。そこで、古典制御に代わる新しい制御理論が数多く提案されるようになった。こうした背景には、何よりも制御系の演算にデジタルコンピュータが活用され、種々の制御アルゴリズムが容易に組み込めるようになった成果と言える。

船や航空機をはじめとする種々の機械では、波や気流といった乱れで制御対象がかく乱されることが多い。このかく乱を限りなく零にするよう、ひたすら操作を続けたとすると、途方もないエネルギーをかけ続け、結果的にはムダな操作を行うことにもなる。現代制御理論における最適制御では、制御結果のみならず操作を含めた評価関数を設け、この評価関数を最小にするよう制御パラメータを最適に決定する方法が開発され、多くの分野で今日使用されている。

あるいはまた、制御系の最適性を追求し過ぎると、最適性を評価するために設定した条件が少しでもずれると、一挙に質の悪い制御となり得る場合がある。また、設計時と実際に運用する実システムの特性と多少異なることも現実には多い。このため、特性の変化に合わせて制御系のパラメータを適応型として、常に最適に保とうとする制御、あるいは、制御対象の時間的变化やノイズに対して、冗長性（一見ムダのように見えるが、種々の変化に適用性が高い）を持たせた制御手法が数多く提案されるようになった。

代表的な現代制御理論の特徴を以下に要約する。

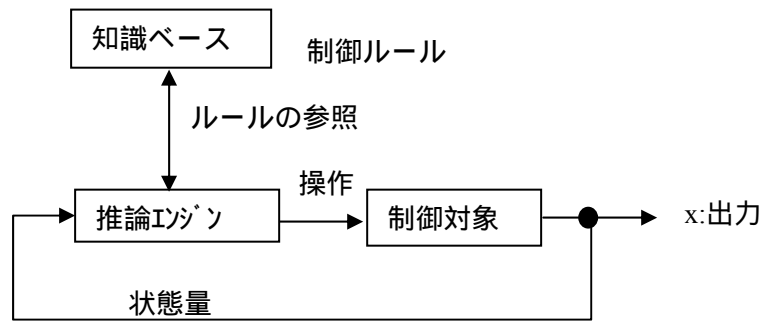
1) 入力（指令値）に対して、よりの確にシステムを作動させる制御

- (a) 最適制御：制御対象を幾つかの状態変数の1階微分方程式（状態方程式）で表す。[古典制御に対して現代制御とも言われる]また、制御性能を評価する関数を定義し、この評価が最大になる（例えば操作量と制御出力の総エネルギーが最小になる）最適制御状態を求める。
- (b) 適用制御：
[オートチューニング適応制御]、[モデル規範適応制御]
- (c) H 制御：制御系の特性に外乱等の変化による影響を受けにくい堅固な安定性 [robust 性] を構築する方法。安定を重視するため、最適制御等にくらべて追従性が悪くなる場合がある。

2) より効果的な操作（指令値）を与える制御

- (d) エキスパートシステム制御：人工知能(AI: Artificial Intelligence)の研究から、専門家(Expert)の持つ知識を格納した「知識ベース」と、その知識ベースを用いて推論を進める「推論エンジン」からなる計算機システムが開発された。これを制御に適用しようとするものである。ただし、これは上記の制御が扱ってきたよりも更に上位・上流のシステム制御（運転計画・運航計画などの制御）に適している。

(例) 船の衝突防止システム



- (e) ファジィ制御: 上記の「知識ベース」に格納する知識には曖昧さを含んだ表現で記述でき、推論エンジンの記述をファジィ(曖昧)制御で行う
人間が介在する全体システムの制御を考える時、曖昧さを含む人間の感性、感覚、評価などを知識ベースとして用いることができる点で有用な制御手法。
(例) 複数のエレベータの運転管理システム
- (f) ニューラルネットワーク制御: 生体の神経系を模擬した計算回路網が開発され、多数の情報を短時間に処理し、適正な判断を行うのに適している。これはまた、あるデータに対して正解を示すことにより学習機能を持たすことができる。