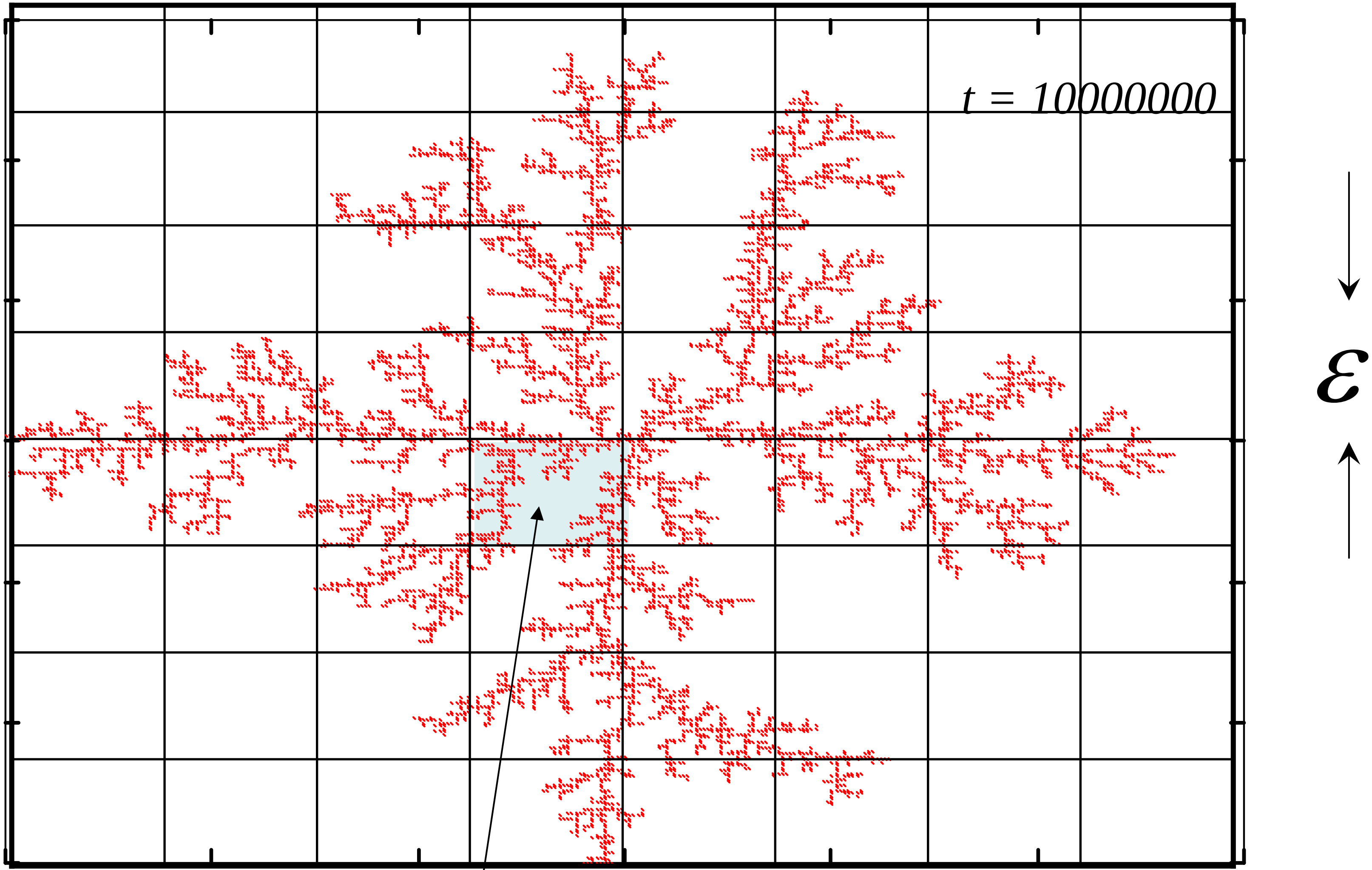
カオス・フラクタル #12

平成21年7月28日（最終回）

情報科学研究科　井上純一

画像をセルに分割する



$$p_i = \frac{\text{セル } i \text{ に含まれる粒子数}}{\text{全粒子数}}$$

一般化次元再考

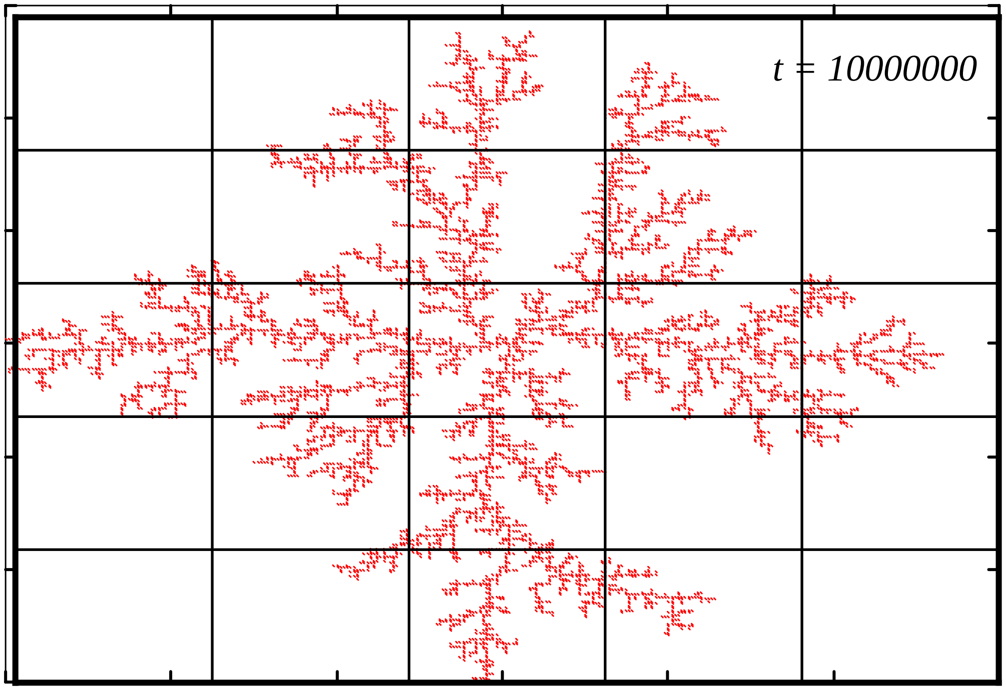
$$D_q = \frac{1}{q-1}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\log Z_q}{\log\varepsilon},\ Z_q = \sum_{i=1}^{n(\varepsilon)} p_i^q$$

ボックスカウント次元

$$D_{q=0} = -\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\log n(\varepsilon)}{\log\varepsilon}$$

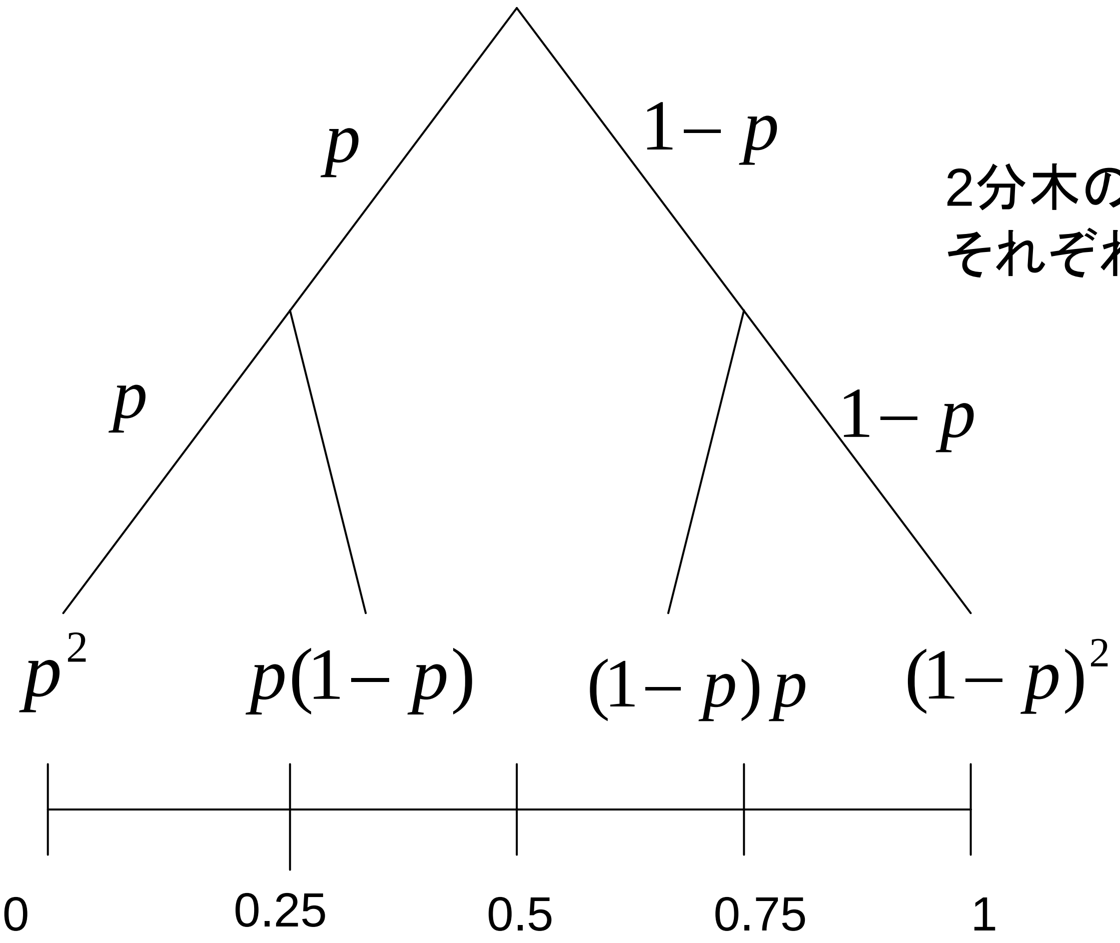
サイズ ε の「箱」に何点
入っているか？

パラメータ q を調節することで
画像に「フィルタ」をかけ、次元を
測りなおすことはできないか？



「ものさし」を複数用意して対象を多角的にしらべたい

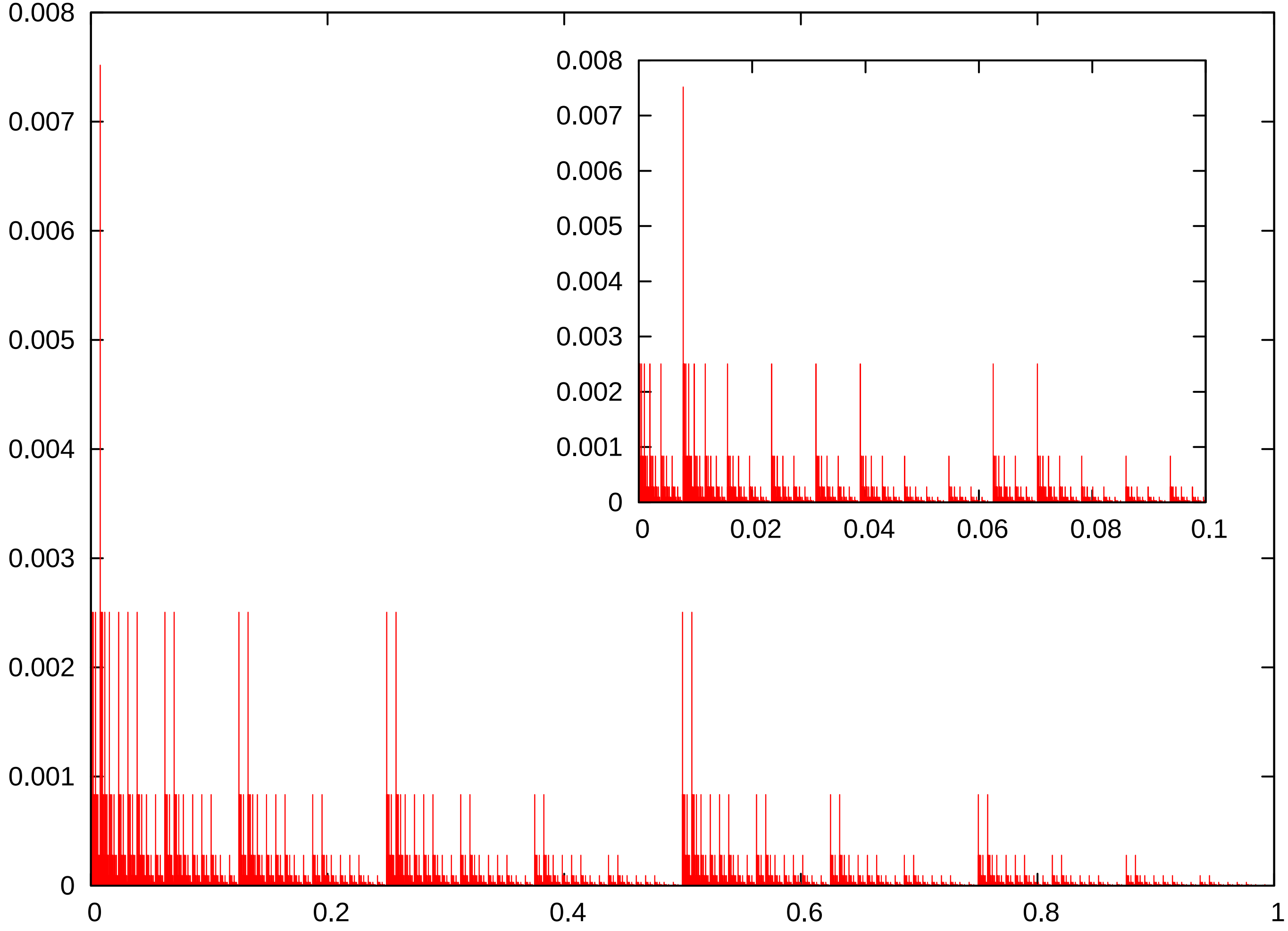
二項分岐過程



2分木の「葉」に
それぞれ確率を割り当てる

確率 $p^k(1-p)^{n-k}$ が割り当てられている「葉」の数 ${}_nC_k$

計算機シミュレーション例



二項分岐過程のマルチフラクタル次元

$$Z_q = \sum_{i=1}^{n(\varepsilon)} p_i^q = \sum_p \rho(p) p^q$$

確率 p をもつセルのみを
集めて、p ごとに和をとっても同じ

$$Z_q = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k \left[p^k (1-p)^{n-k} \right]^q$$

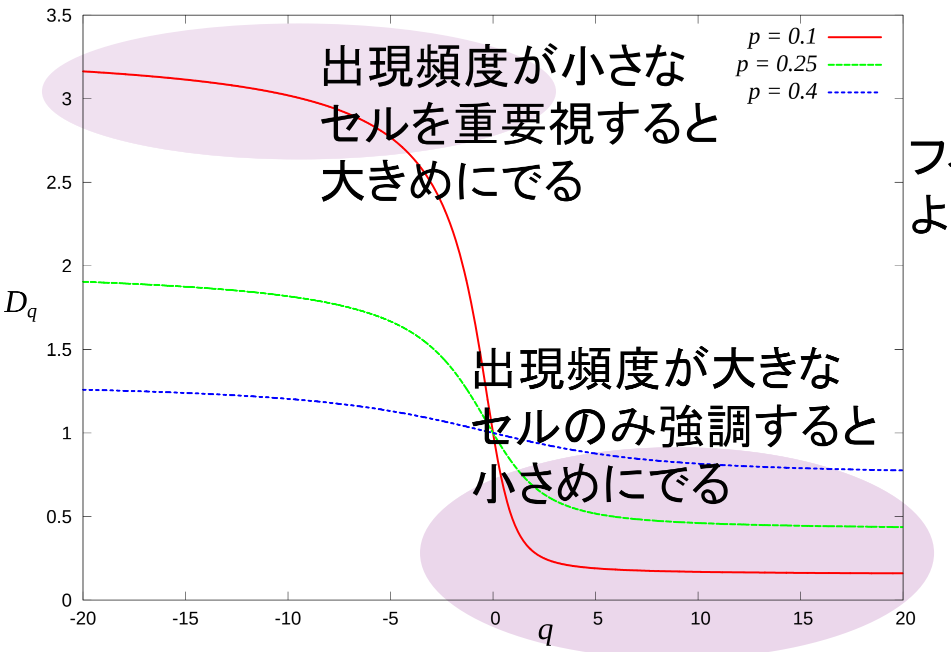
$$= \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k \, p^{qk} (1-p)^{q(n-k)}$$

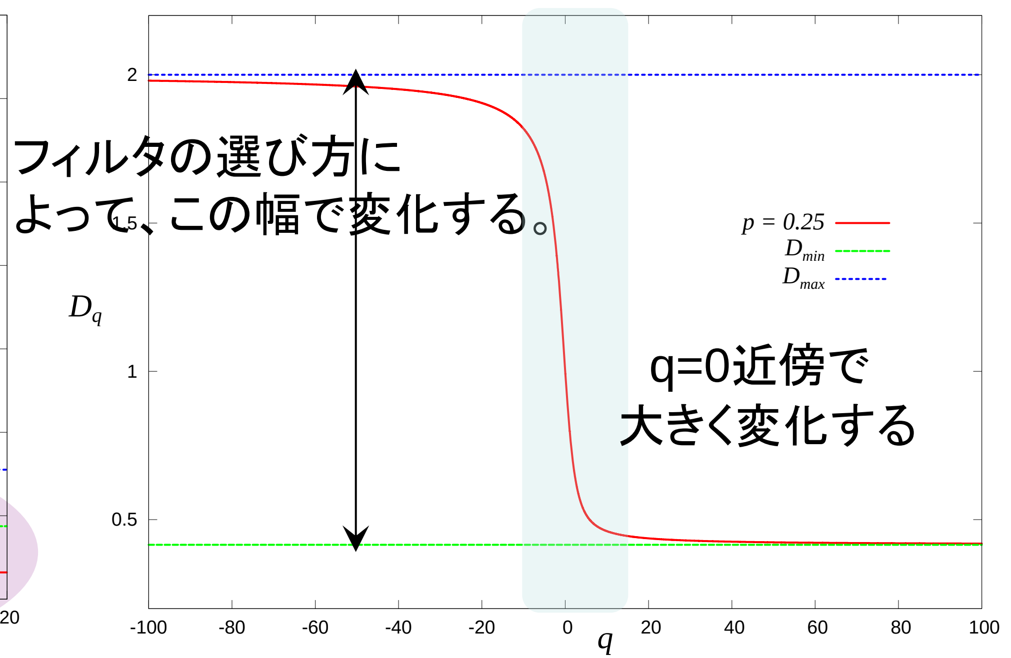
$$= \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k \left(p^q \right)^k \left\{ (1-p)^q \right\}^{n-k} = \left[p^q + (1-p)^q \right]^n$$

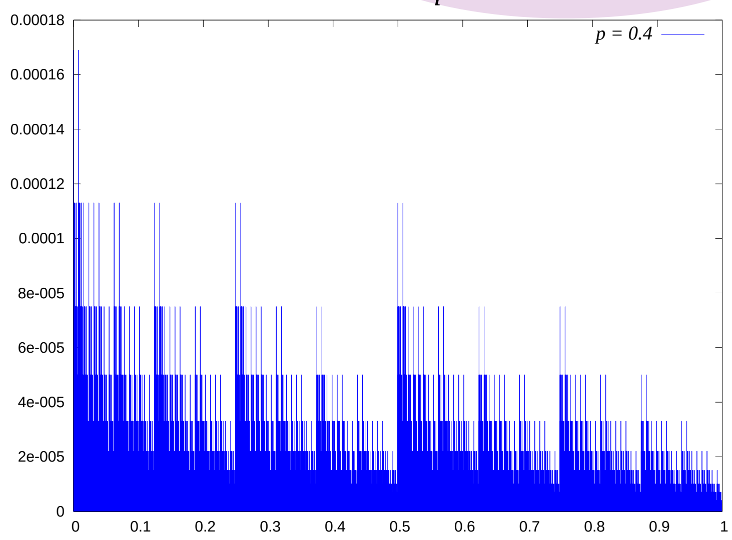
$$\boxed{D_q = \frac{1}{q-1} \frac{\log\left[p^q + (1-p)^q \right]}{\log\left(1/2 \right)}}$$

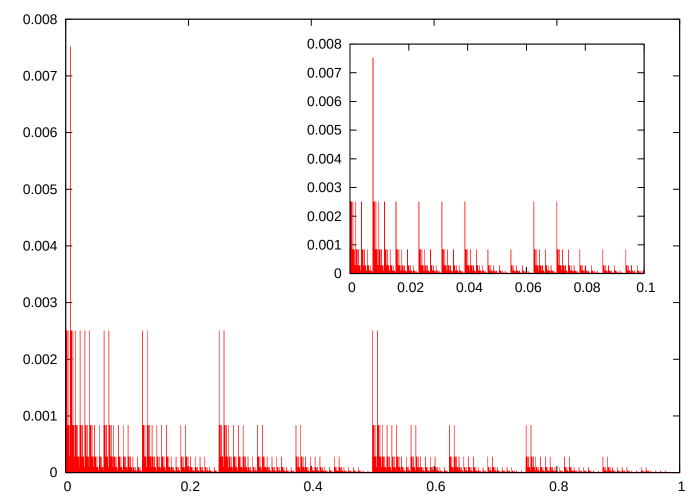
二項分岐過程の
マルチフラクタル次元

マルチフラクタル次元の振る舞い





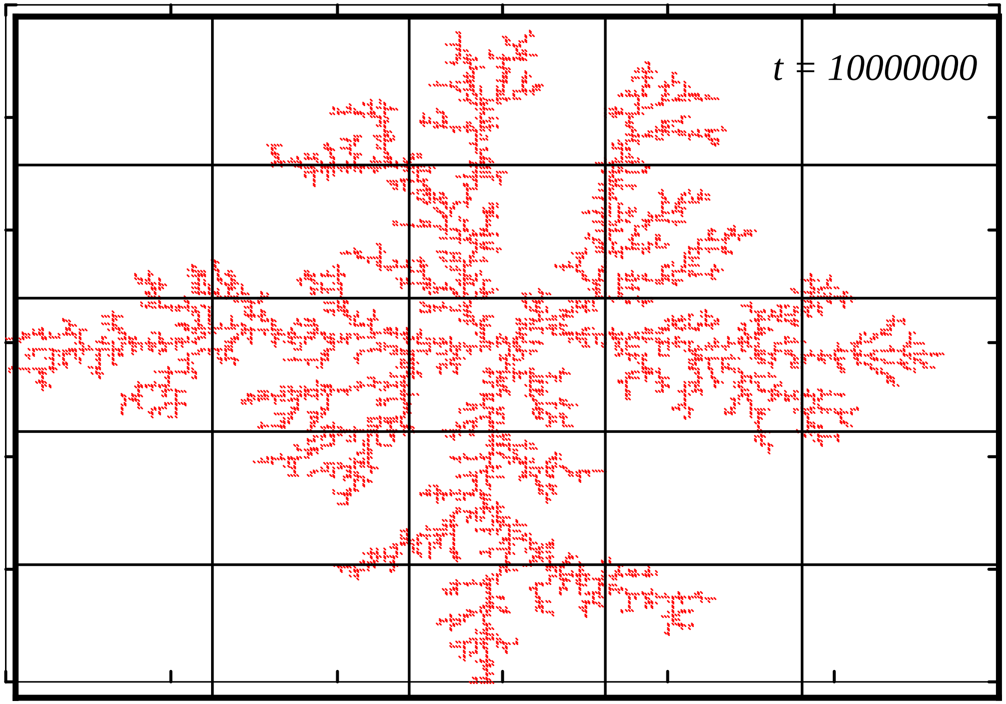




一般論

$$p_i \propto \varepsilon^{\alpha_i}$$

セルサイズの減少とともに確率も小さくなる



「特異性の強さ」

$$\alpha_i$$

はセルごとに異なりある分布を持つ

分配関数は次のようになる

$$Z_q = \int_0^\infty \rho(\alpha)\varepsilon^{-f(\alpha)}\left[\varepsilon^{\alpha}\right]^q d\alpha = \int_0^\infty \rho(\alpha)\varepsilon^{-f(\alpha)+q\alpha} d\alpha$$

特異性の強さの分布

大域スペクトル

大域スペクトルの振る舞い