

中性子輸送理論の概要 ～決定論的手法～

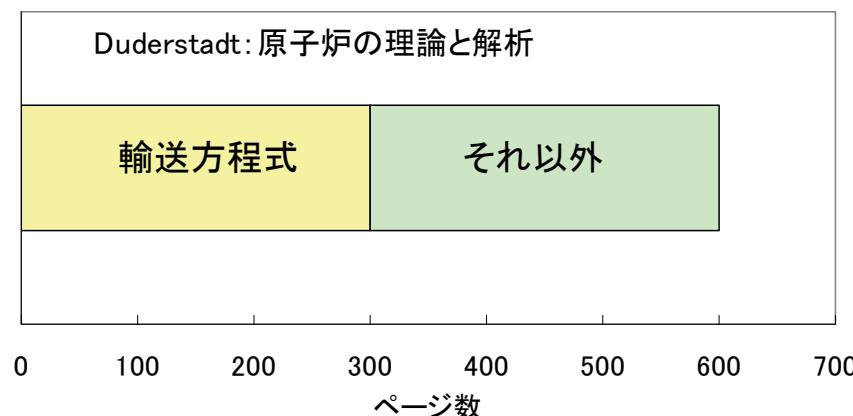
名古屋大学 山本章夫

本講義の概要

- 炉心核設計と中性子輸送の関係
- Boltzmann方程式:二つの基本形
- 決定論的解法の系口
- 種々の解法
- 解法と精度
- 今後の研究とまとめ

はじめに

- 炉物理の教科書におけるBoltzmann方程式の決定論的解法のウエイト
- Duderstadt: 原子炉の理論と解析 全600頁のうち300頁
- 竹田: 原子炉物理 全400頁のうち200頁
- 小林: 原子炉物理 全800頁のうち500頁
- Stammler: Steady state reactor physics 全450頁のうち250頁



三つの質問(答えられますか？)

- (Q1) 軽水炉の炉心核設計において、どの局面で Boltzmann 方程式が利用されているか？
- (Q2) Boltzmann 方程式には、なぜ二つの基本形があるか？
- (Q3) Boltzmann 方程式に対する種々の解法は、それぞれどのような問題に適しているか？

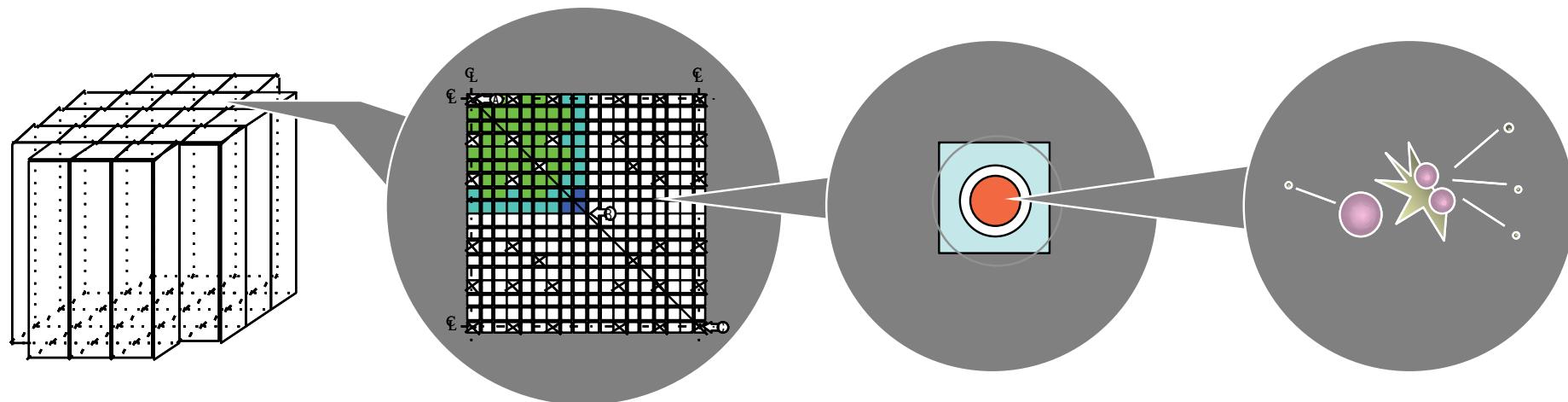
決定論的手法とは

- Boltzmann方程式を解く際に乱数を使わない方法
- 一般には、乱数を用いるモンテカルロ法以外の手法をこのように呼ぶ。

炉心核設計と中性子輸送

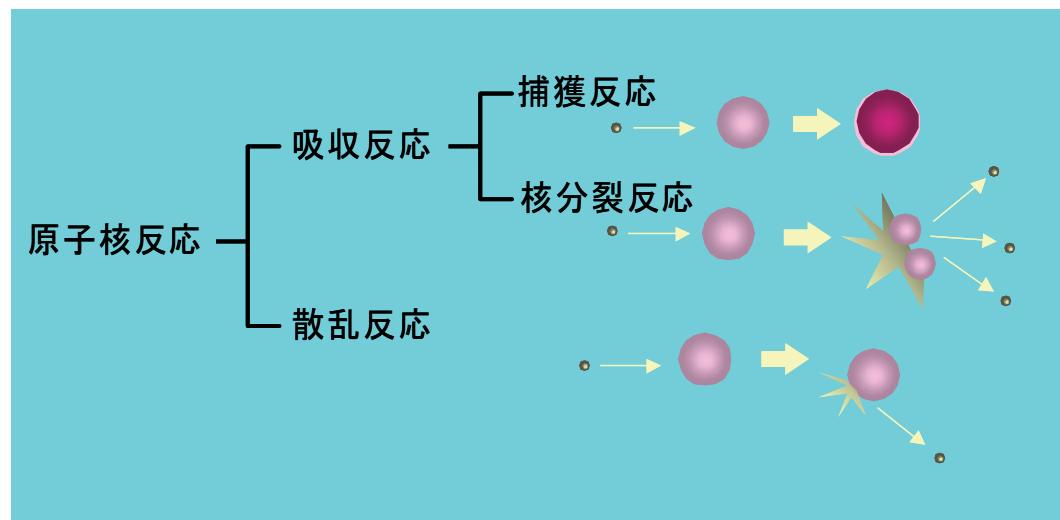
炉心核設計と中性子輸送の深い関係(1)

- 炉心核設計: 中性子と原子核の反応という極めてミクロな現象を、炉心というマクロな体系の挙動の観点から予測する作業



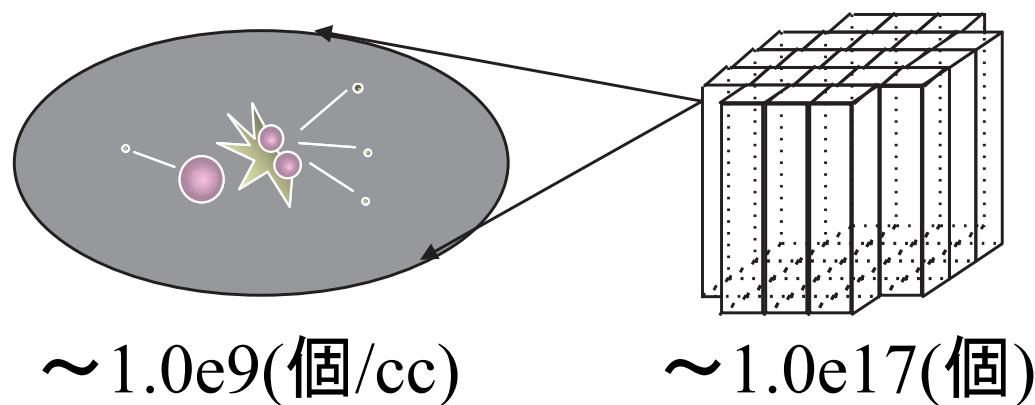
炉心核設計と中性子輸送の深い関係(2)

- マクロな体系の挙動を決定づけるミクロな中性子の挙動はBoltzmann方程式に従う→**体系を支配するBoltzmann方程式を解くことができれば、炉心特性の予測が可能**
- この作業をストレートかつ精度良く行うためには、炉心内の全ての中性子を考慮したBoltzmann方程式のシミュレーションを行えばよいが…



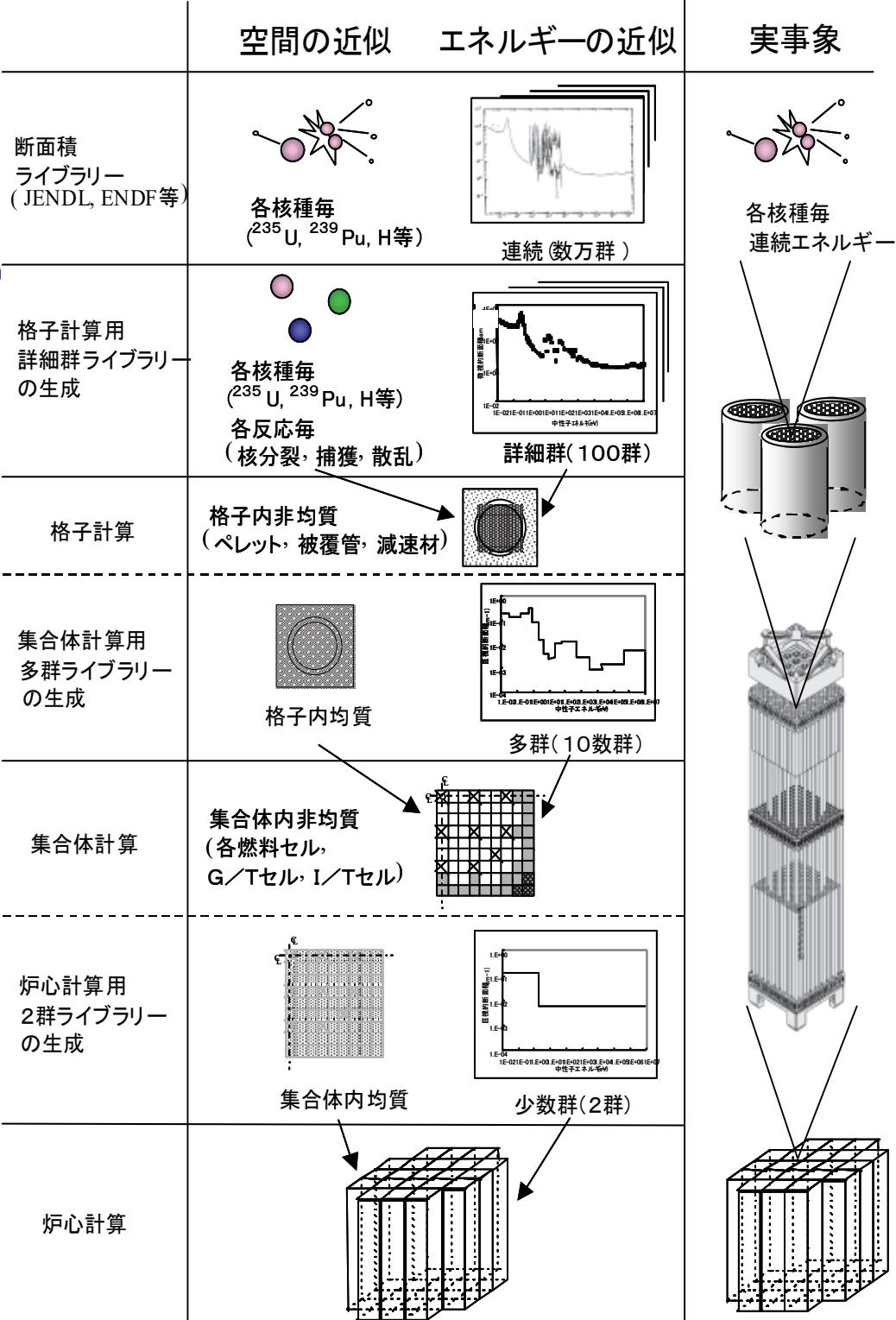
炉心核設計と中性子輸送の深い関係(3)

- 炉心内の全ての中性子を考慮するためには…
 - ✓ 炉内の中性子密度～1.0e9(個/cc)
 - ✓ 炉心体積～1.0e8(cc)
 - ✓ 炉心内の中性子総数～1.0e17(個)
 - ✓ 一秒間に1.0e6個の中性子の挙動を計算したとして、全ての中性子を追跡するための時間は1.0e11(sec)～3000年
- とても無理…ではどうする？



炉心核設計と 中性子輸送 (4)

- 現在の炉心計算フロー
- ミクロからマクロへ
- それぞれのステップで Boltzmann 方程式を利用



炉心核設計と中性子輸送の深い関係(5)

- 多段階で行われる炉心核設計では、全てのステップで Boltzmann 方程式が用いられている。
- (Q1) 軽水炉の炉心核設計において、どの局面で Boltzmann 方程式が利用されているか？
- (A1) 炉心核設計では、中性子のエネルギー・空間分布に関して近似度合いの異なる複数ステップからなる計算を行う。Boltzmann 方程式は、炉心特性を得るまでの全てのステップで利用されている。

二つのBoltzmann方程式

Boltzmann方程式: 微積分型(1)

■ 式の形

$$\vec{\Omega} \cdot \nabla \phi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) + \Sigma_t(\vec{r}, E) \phi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) = Q(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$$

ここで、

\vec{r} : 位置

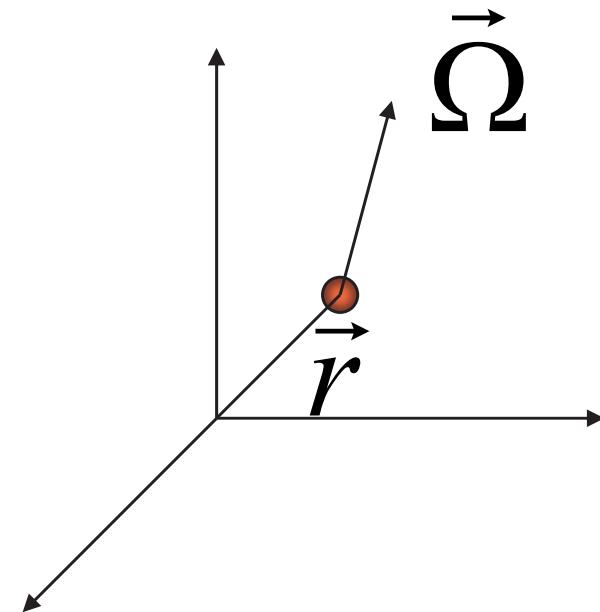
E : 中性子のエネルギー

$\vec{\Omega}$: 中性子の飛行方向

$\phi(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$: 角度中性子束

$\Sigma_t(\vec{r}, E)$: 巨視的全断面積

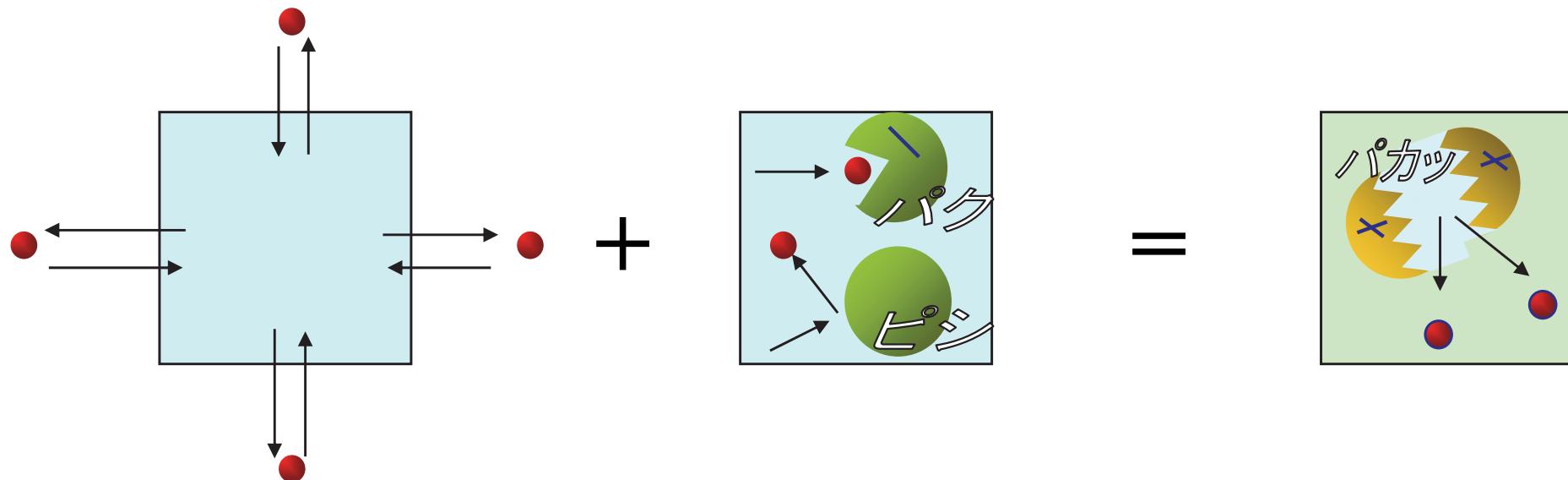
$Q(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$: 中性子源



Boltzmann方程式: 微積分型(2)

- 式の意味: あるエネルギー、方向に着目

もれ(微分項)	消滅	生成(積分項)
$\vec{\Omega} \cdot \nabla \phi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) + \sum_t (\vec{r}, E) \phi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) = Q(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$		
(1/cm)・(個/cm ² /sec)	(1/cm)・(個/cm ² /sec)	(個/cc/sec)
= (個/cc/sec)	= (個/cc/sec)	



Boltzmann方程式: 微積分型(3)

- 第一項の意味は?
- ガウスの発散定理を使用すると…

$$\int_V \vec{\Omega} \cdot \nabla \phi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) d\vec{r} = \int_S \vec{n} \cdot \vec{\Omega} \phi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) ds$$

ここで、

n : 表面に対する法線ベクトル

s : 注目している領域の表面における積分

- 第一項は、注目している領域表面から出入りする中性子の数になる

Boltzmann方程式: 微積分型(4)

■ 生成項の内訳

$$Q(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) = \overbrace{\int_{4\pi} \int_0^\infty \Sigma_s(\vec{r}, E' \rightarrow E, \vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}) \phi(\vec{r}, E', \vec{\Omega}') d\vec{\Omega}' dE'}^{\text{散乱}} + \overbrace{\frac{\chi(E)}{4\pi} \int_{4\pi} \int_0^\infty v \Sigma_f(\vec{r}, E') \phi(\vec{r}, E', \vec{\Omega}') d\vec{\Omega}' dE'}^{\text{核分裂}}$$

+ $S(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$ 中性子源

ここで、

$\Sigma_s(\vec{r}, E' \rightarrow E, \vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega})$: 散乱断面積(エネルギー E' から E 、方向 $\vec{\Omega}'$ から $\vec{\Omega}$)

$\chi(E)$: 核分裂スペクトル

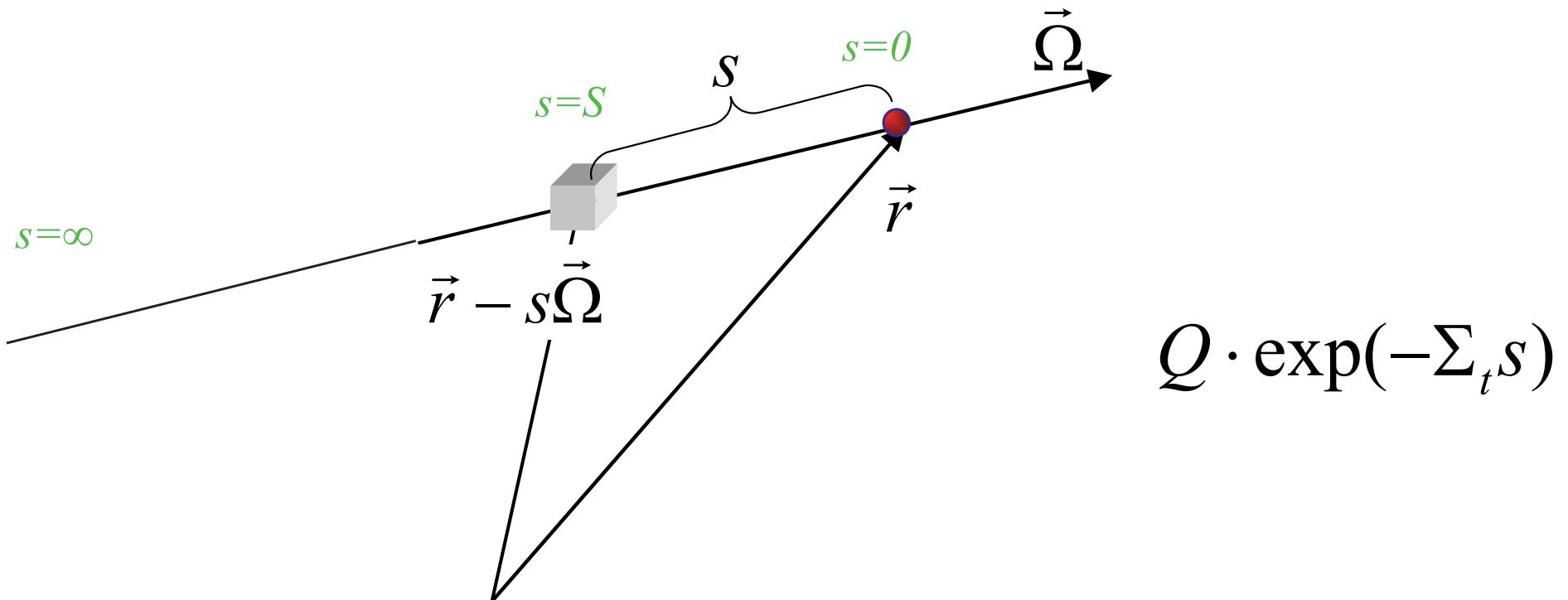
$v \Sigma_f(\vec{r}, E')$: 生成断面積

$S(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$: 外部中性子源

Boltzmann方程式: 積分型

■ 式の形と意味

$$\phi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) = \int_0^\infty Q(\vec{r} - s\vec{\Omega}, E, \vec{\Omega}) \exp\left(-\int_0^S \Sigma_t(\vec{r} - s'\vec{\Omega}, E) ds'\right) ds$$

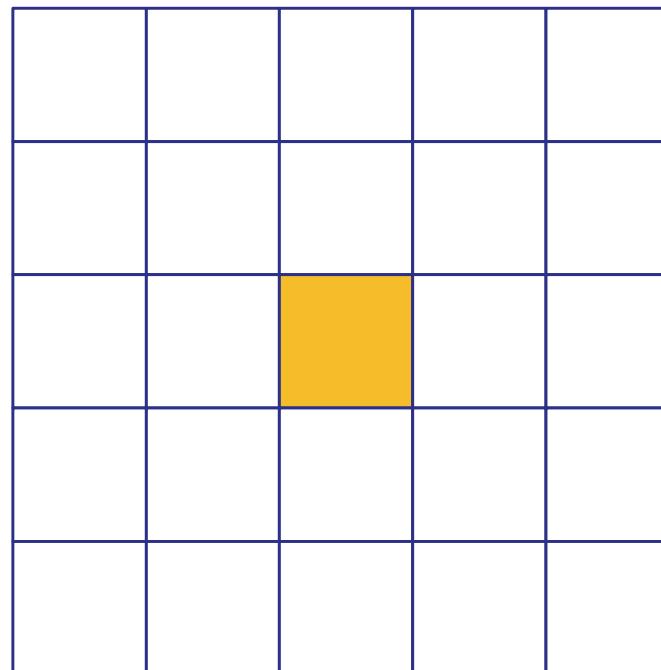


微積分と積分型：なぜ二つの形が？

- 物理量の計算(測定)精度：積分値 > 微分値(例：距離と速度)
 - ✓ 上記の観点から、積分型のほうが一般的に精度良い解が求まる。
- さらに…
 - ✓ 微積分型に現れる空間微分項は、単純な幾何形状しか扱えないが、積分だと複雑な形状も扱える。
- ということは、積分型だけ考えればいいのでは？
- しかし…

微積分と積分型：積分型だけで困ること

- 取り扱う領域が多くなると、積分型は破綻：考慮すべき相互作用は(領域数)の二乗に比例。
- これに対して、微分型は隣接領域のみ考慮：考慮すべき相互作用は(領域数)に比例。

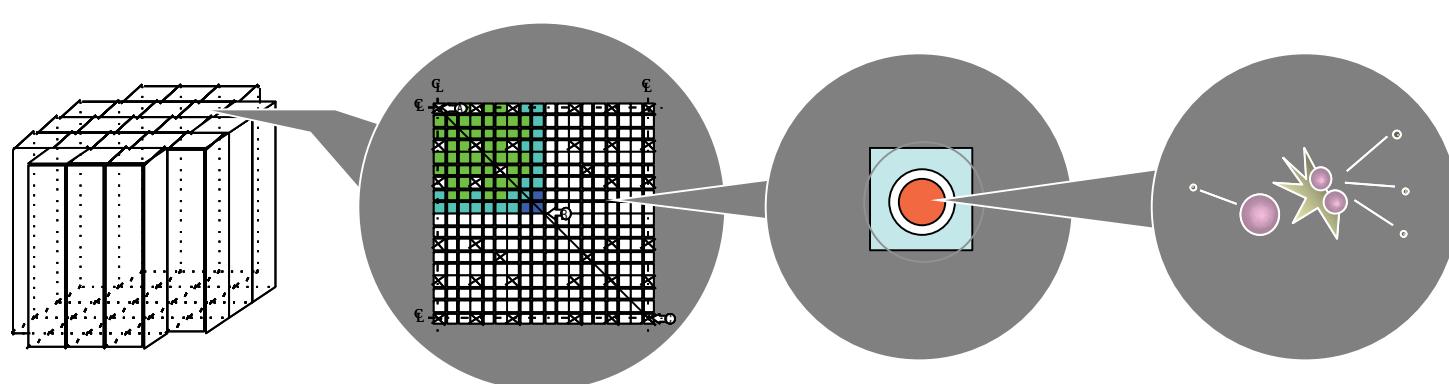


微積分と積分型：メリットとデメリット

	微積分型	積分型
長所	隣接領域との相互作用のみを考慮すればよい。そのため、領域が多くても計算時間は比較的短い。	精度が高い。 複雑な形状の取り扱いが可能。
短所	複雑な形状の取り扱いが困難。	領域が多いと計算時間が長くなる。
適した体系	比較的大きな体系 単純な幾何形状	比較的小さな体系 複雑な体系
炉心核設計での適用	集合体 炉心計算	セル計算 集合体計算 (炉心計算)

微積分と積分型：まとめ

- (Q2) Boltzmann方程式には、なぜ二つの基本形があるか？
- (A2) 炉心核設計では、取り扱う体系の空間的なスケールとしてmm単位からm単位まで様々なものが現れる。現実的な計算時間の制約のもと、これらの問題にもっとも精度の高い解を与えるために二つの基本形が使われている。



決定論的解法への入り口

決定論的解法: 求めたいもの

- もう一度Boltzmann方程式を確認

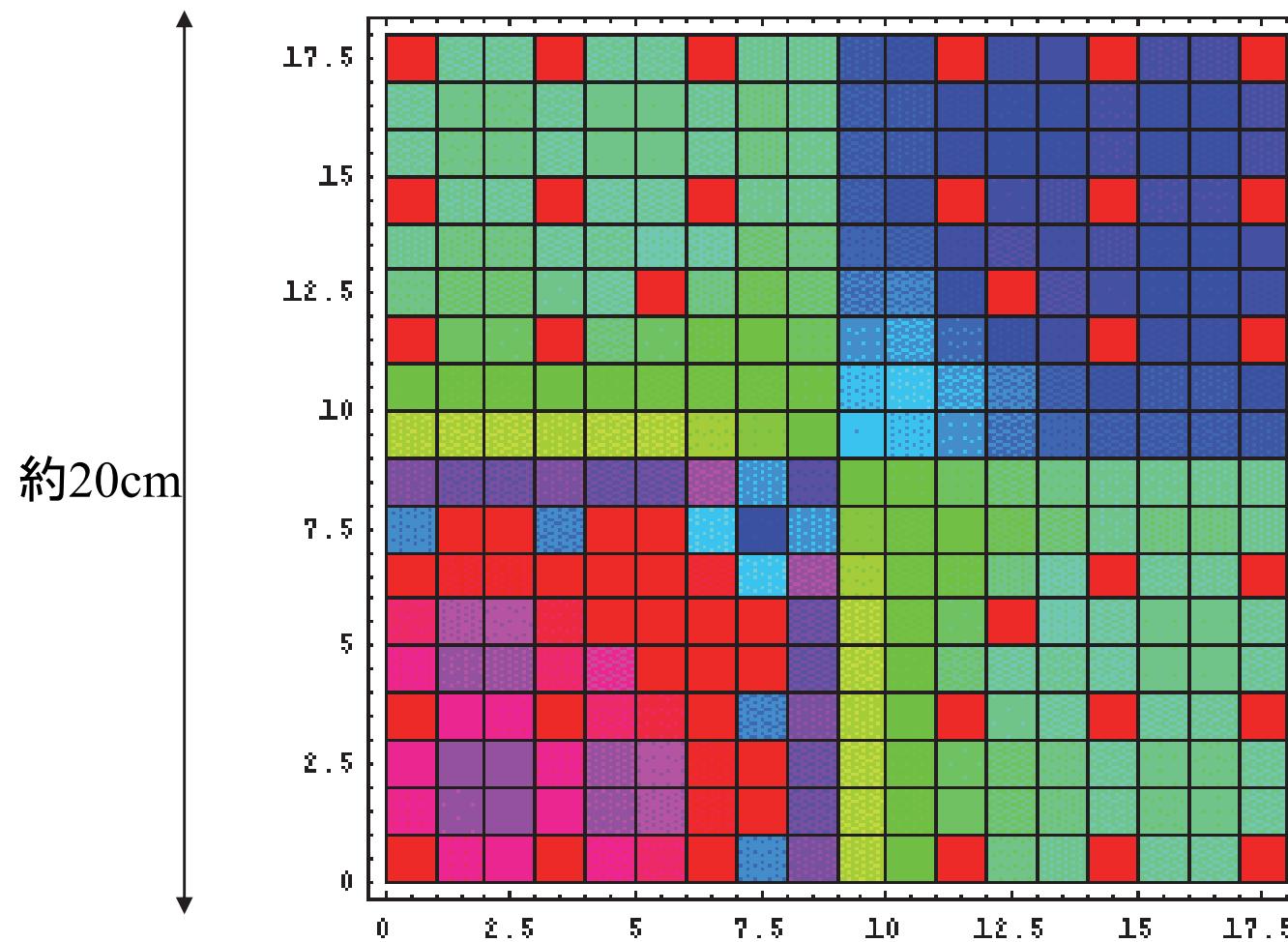
$$\vec{\Omega} \cdot \nabla \phi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) + \underset{\text{未知}}{\Sigma_t}(\vec{r}, E) \phi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) = Q(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$$

未知 既知 未知 既知

- 求めたいのは、中性子束 ϕ (**未知**)
- 断面積 Σ は**既知**
- 中性子源項は断面積と中性子束の積+外部中性子源(**既知**)

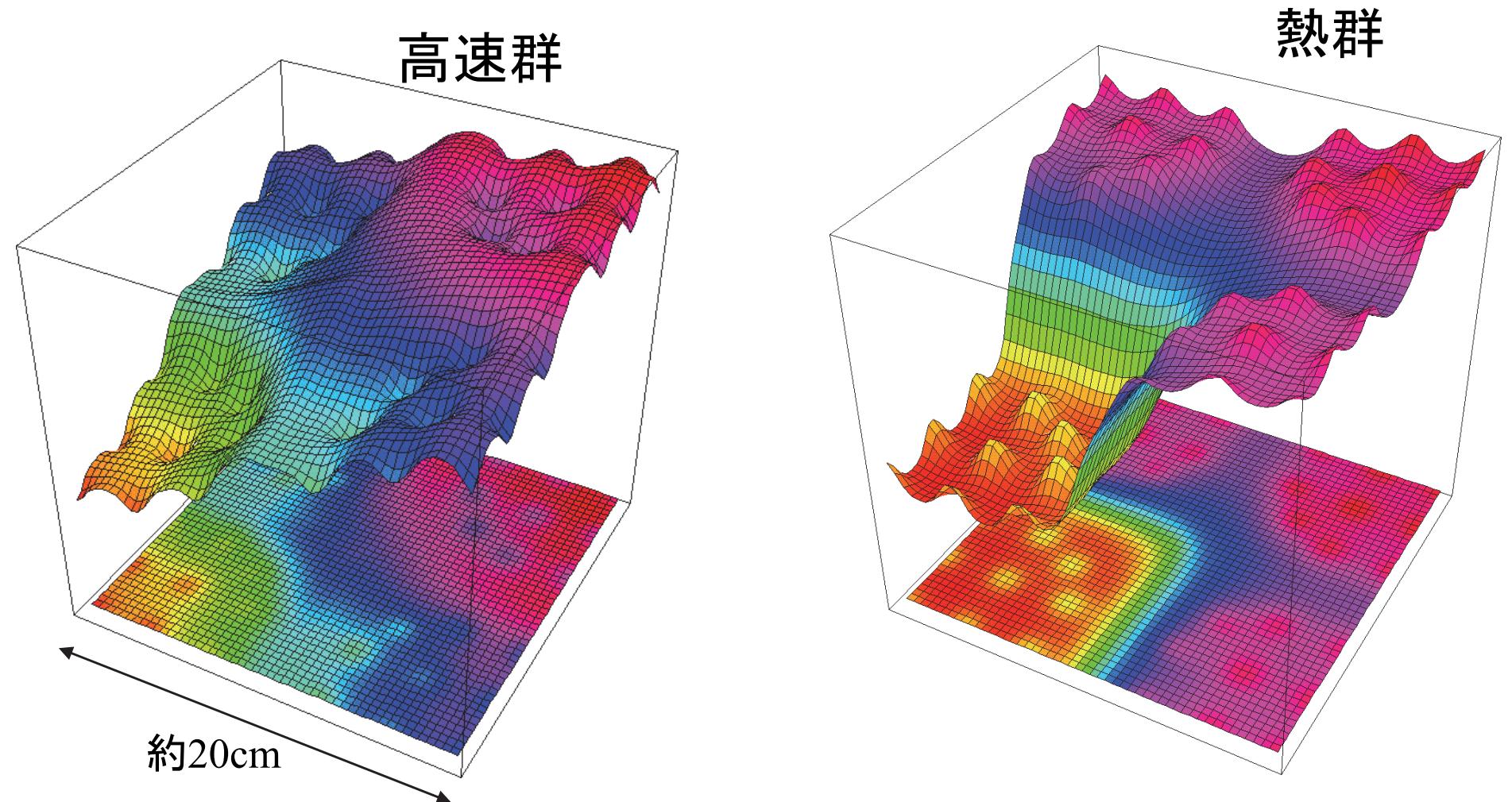
中性子束分布のイメージ(1)

- MOX/UO₂体系での燃料棒出力分布



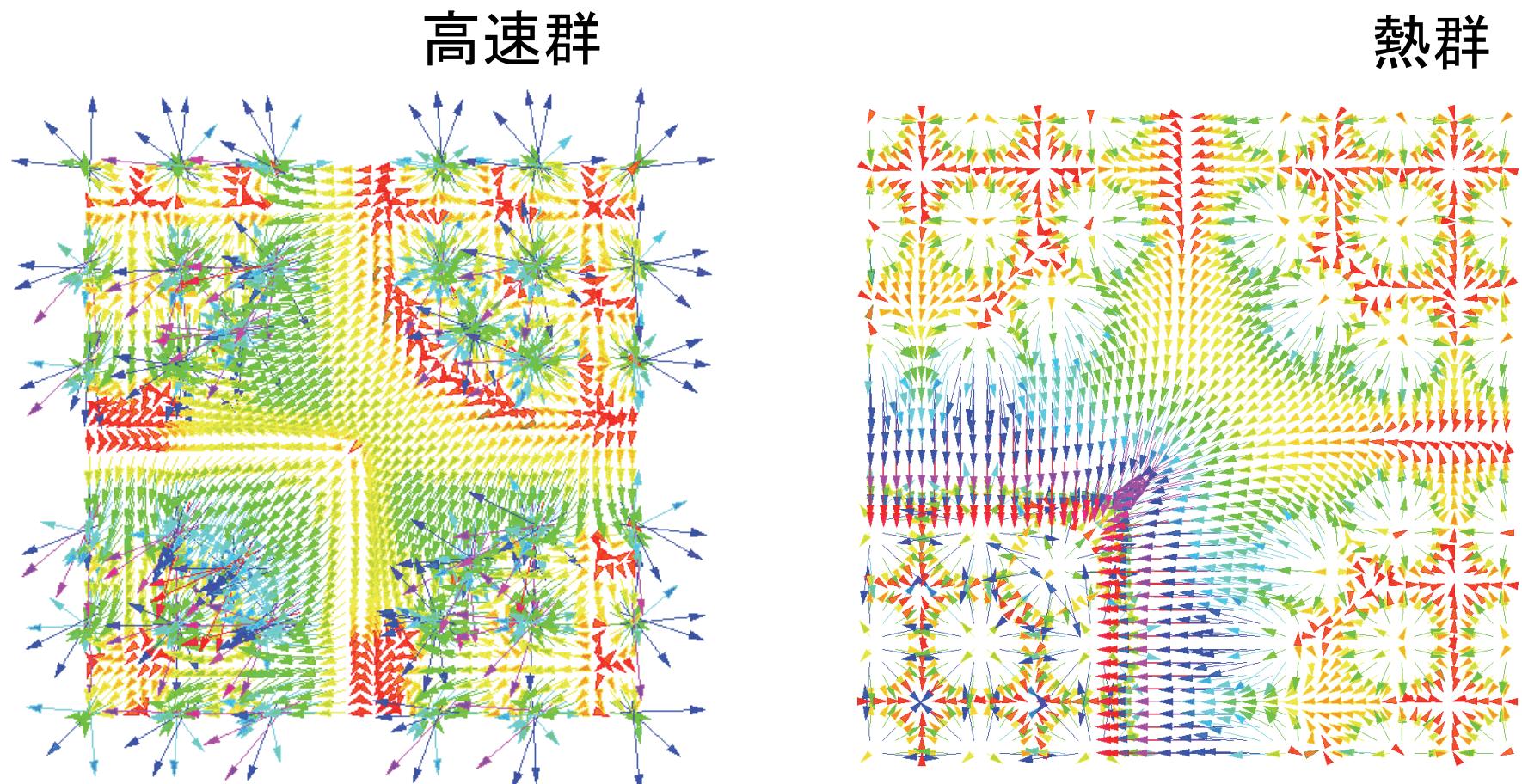
中性子束分布のイメージ(2)

- MOX/UO₂体系での中性子束空間分布



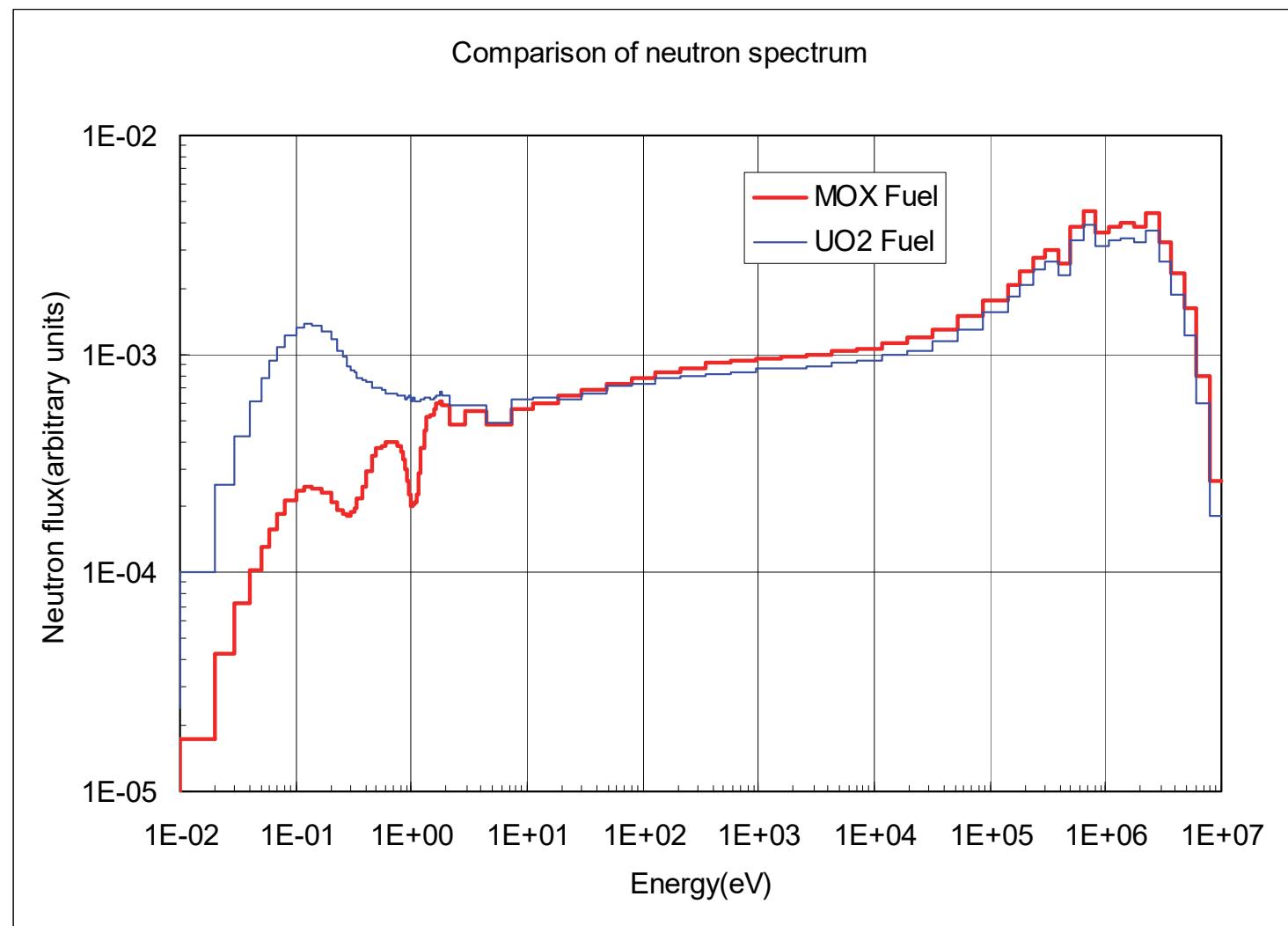
中性子束分布のイメージ (3)

- MOX/UO₂体系での中性子流空間分布



中性子束分布のイメージ(4)

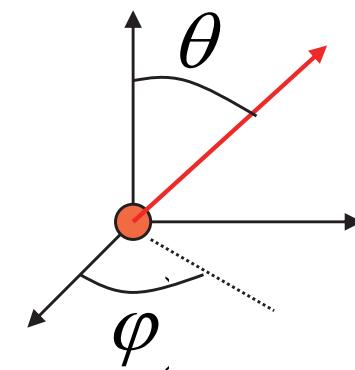
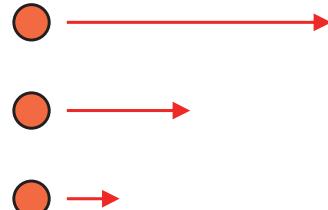
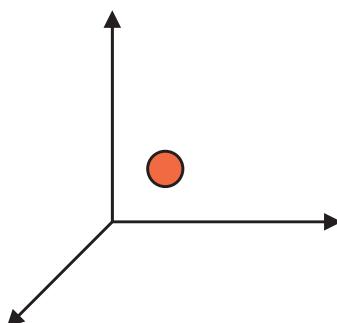
- MOXとUO₂燃料の中性子エネルギースペクトル



中性子束の依存性(変数の種類)(1)

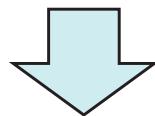
- まとめると、中性子束は以下の変数に依存性
 - ✓ 空間内の位置変数三つ(x, y, z)
 - ✓ エネルギー変数一つ(E)
 - ✓ 中性子の飛行方向の角度変数二つ(θ, φ)

$$\phi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) = \phi(x, y, z, E, \theta, \varphi)$$



中性子束の依存性(変数の種類)(2)

- このような多数の変数を一気に扱うことは、解析的な方法では不可能

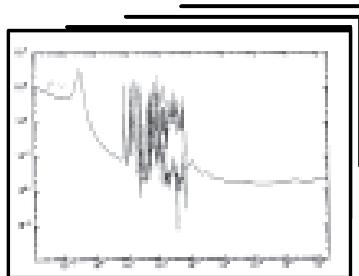
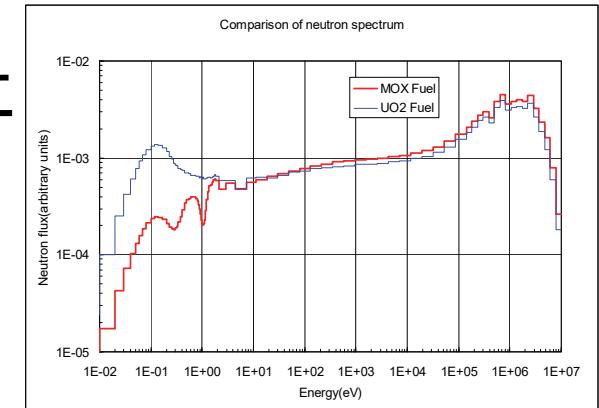


- 変数分離: 個別の方程式として扱う
- 離散化: 計算機に扱える形にする

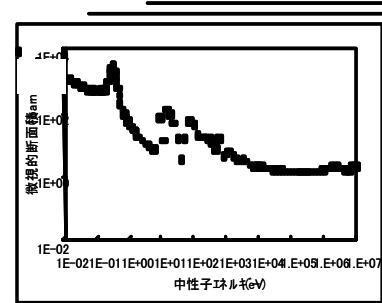
$$\phi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) = \phi(x, y, z, E, \theta, \varphi)$$

エネルギー依存性(1)

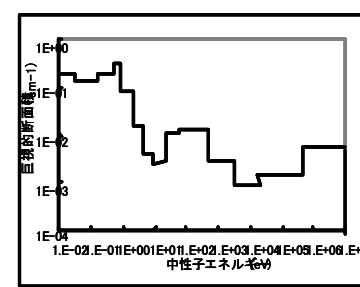
- エネルギー変数については、多群化によって取り扱われる
- 本来、中性子のエネルギーは連続量であるが、これを複数のグループに分けるという近似を導入する



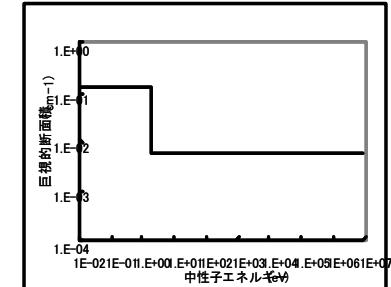
連續(数万群)



詳細群(100群)



多群(10数群)



少数组(2群)

エネルギー依存性(2)

- 多群化された微積分型Boltzmann方程式

$$\vec{\Omega} \cdot \nabla \phi_g(\vec{r}, \vec{\Omega}) + \sum_{t,g}(\vec{r}) \phi_g(\vec{r}, \vec{\Omega}) = Q_g(\vec{r}, \vec{\Omega})$$

- 群毎に異なった方程式(二群なら二つ)
- 方程式の数は増えたが、簡単になった

$$\vec{\Omega} \cdot \nabla \phi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) + \sum_t(\vec{r}, E) \phi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) = Q(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$$

空間依存性(1)

- もう一度方程式をみると‥

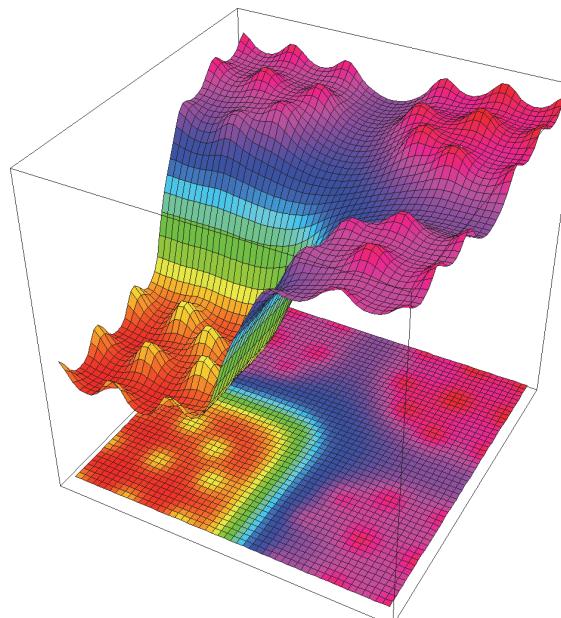
$$\vec{\Omega} \cdot \nabla \phi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) + \Sigma_t(\vec{r}, E) \phi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) = Q(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$$

微積分

$$\phi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) = \int_0^{\infty} Q(\vec{r} - s\vec{\Omega}, E, \vec{\Omega}) \exp\left(-\int_0^s \Sigma_t(\vec{r} - s'\vec{\Omega}, E) ds'\right) ds$$

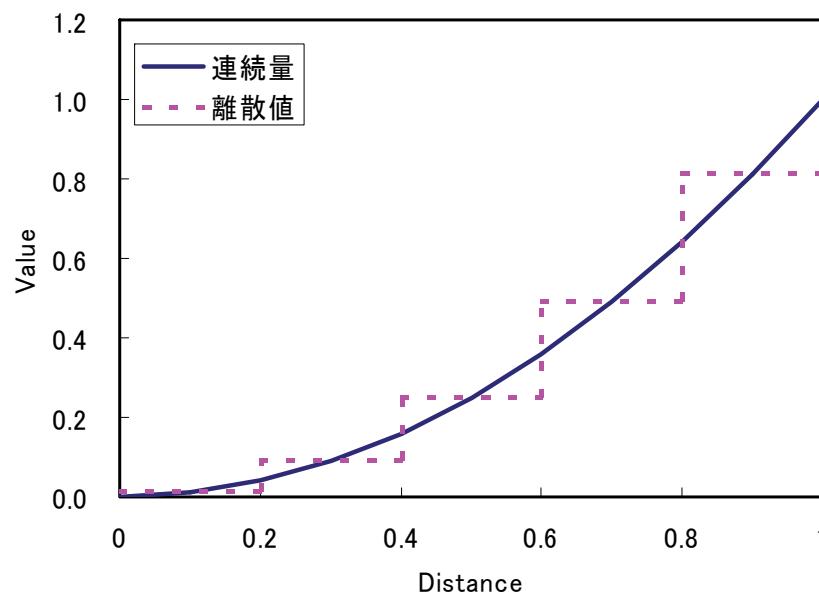
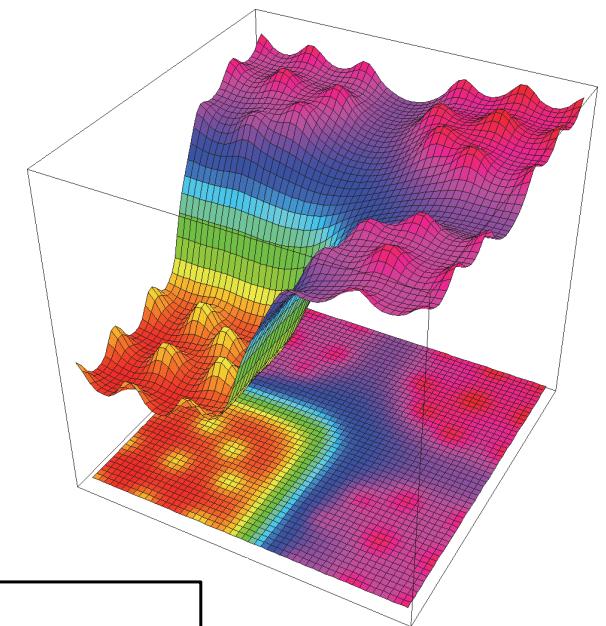
積分

- 上式にのみ空間の微分が存在‥どうやって扱うか



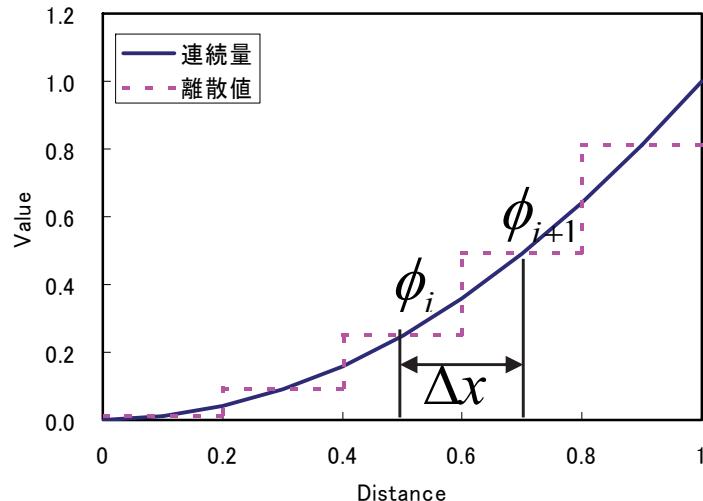
空間依存性(2)

- 一般的な条件において、微分を解析的に扱うのは困難
- 空間を細かい領域(メッシュ)に区分し、それぞれの領域内で中性子束を平坦とする
- このような取り扱いを「空間の離散化」と呼んでいる。



空間依存性(3)

- 微分項は、差分で取り扱う…差と商の形に変換



$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{\Delta x}$$

ここで、

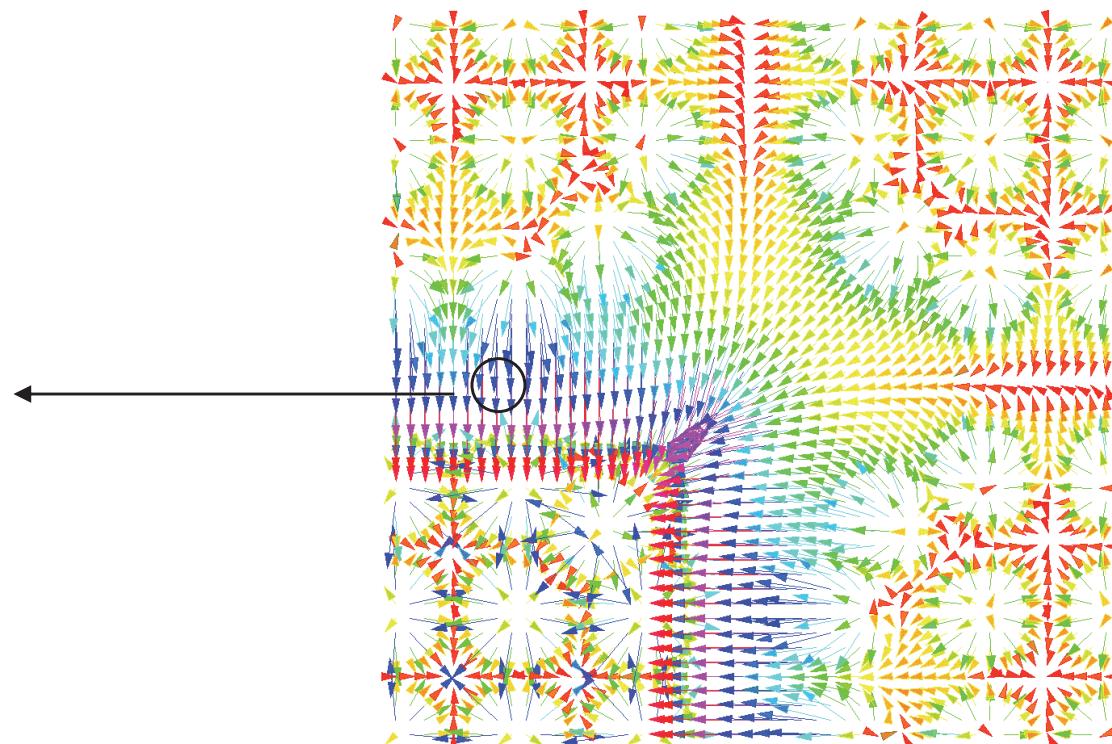
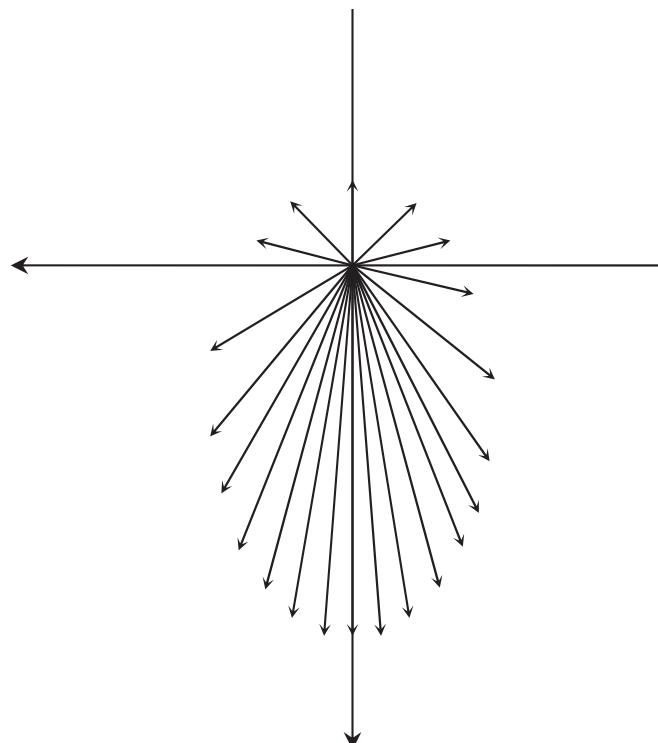
ϕ_{i+1}, ϕ_i : メッシュ $i+1, i$ における中性子束

Δx : メッシュ $i+1, i$ の間の距離

- 計算機に扱える形になる

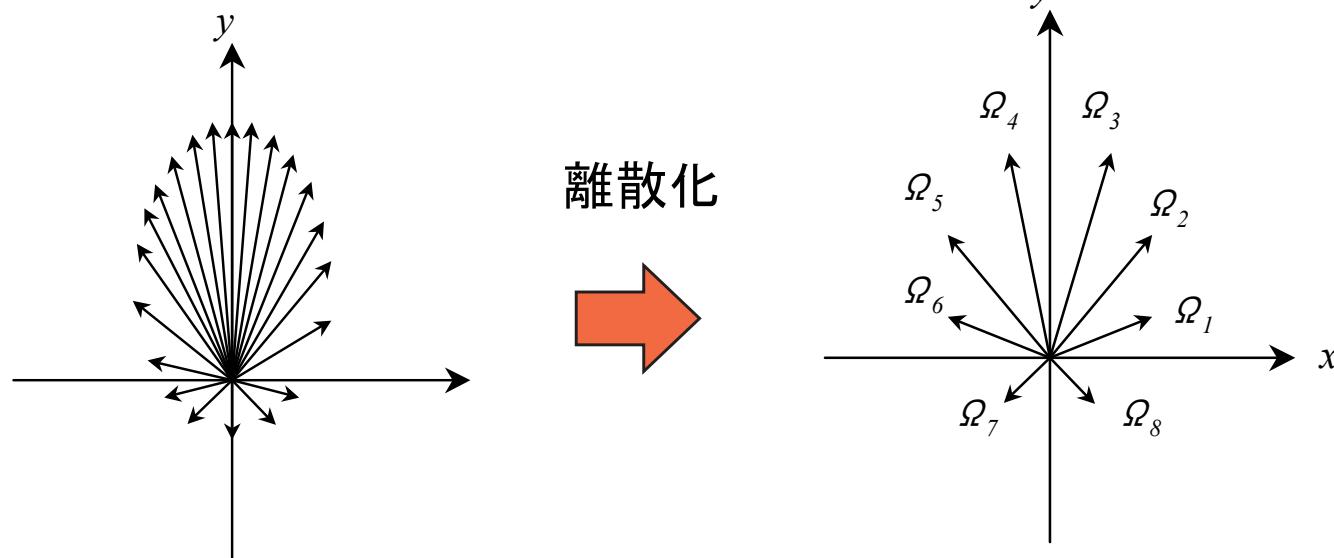
角度依存性(1)

- エネルギーと空間依存性は「離散化」で取り扱うことが出来た。では、角度依存性も同様に扱えるのか？



角度依存性(2)

- 答えは「離散化でも扱える」

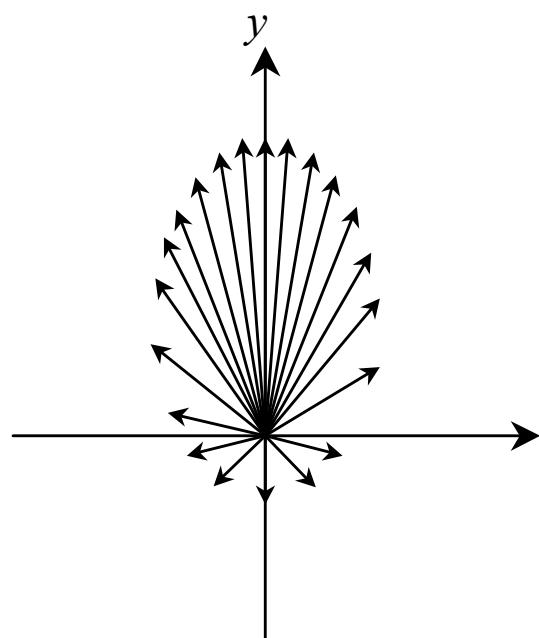


$$\vec{\Omega}_m \cdot \nabla \phi_m(\vec{r}, E) + \Sigma_t(\vec{r}, E) \phi_m(\vec{r}, E) = Q_m(\vec{r}, E)$$

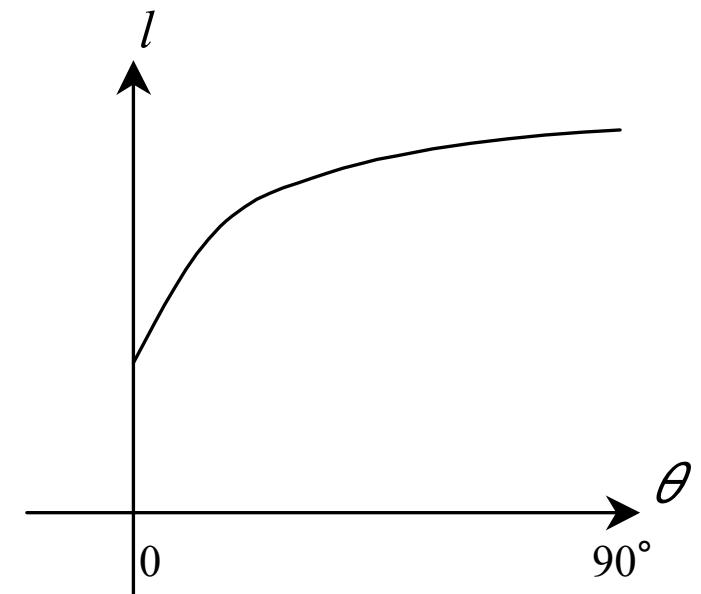
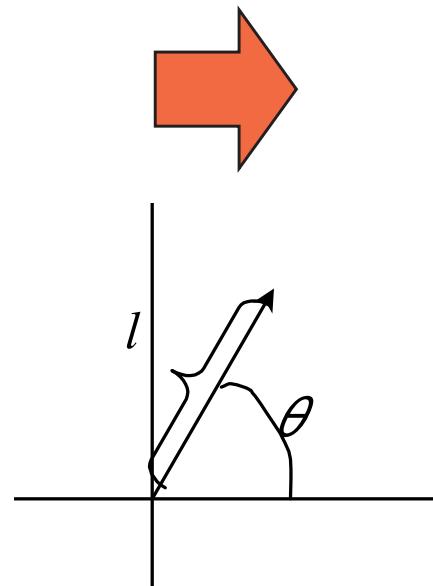
$$Q_m(\vec{r}, E) = \sum_{m'} w_{m'} \int_0^\infty \Sigma_{s, m' \rightarrow m}(\vec{r}, E' \rightarrow E) \phi_{m'}(\vec{r}, E') dE' + \chi(E) \sum_{m'} w_{m'} \int_0^\infty v \Sigma_f(\vec{r}, E') \phi_{m'}(\vec{r}, E') dE'$$

角度依存性(3)

- 関数による展開方法でも扱える

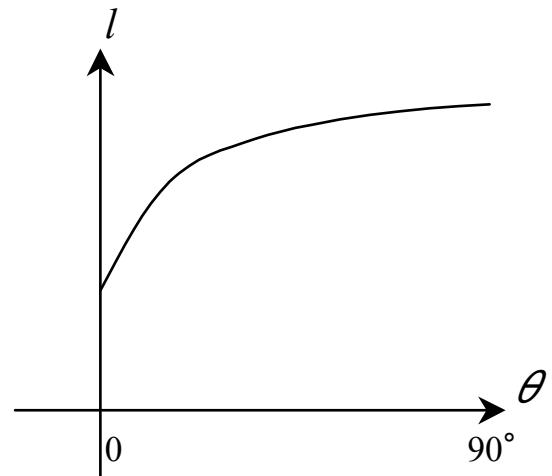


方向と、強度の関係で整理

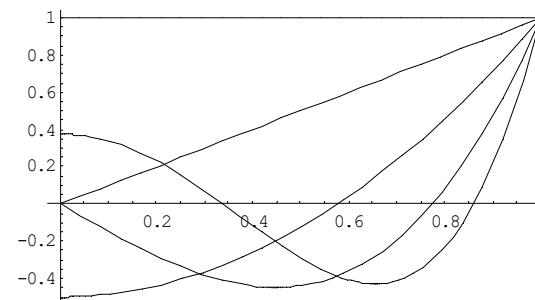


角度依存性(4)

- 方向と強度の関係をLegendre関数で展開



を



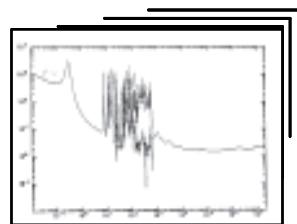
で展開

$$\phi(\vec{\Omega}) \approx \phi_0 P_0(\cos \theta) + \phi_1 P_1(\cos \theta) + \phi_2 P_2(\cos \theta) + \phi_3 P_3(\cos \theta) \dots$$

- なぜこんな面倒なことを？
- →角度に関する変数を少なくできる。また、拡散方程式は関数展開法の近似から導かれる。

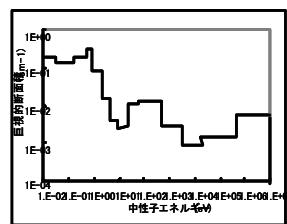
変数の取り扱い:まとめ

- エネルギー依存性:多群化
- 空間依存性:離散化(メッシュ)
- 角度依存性:離散化(代表角度)もしくは関数展開



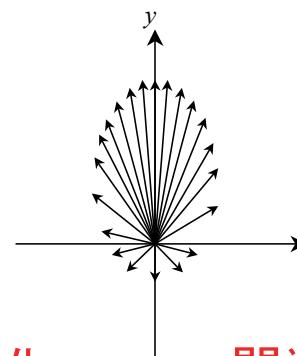
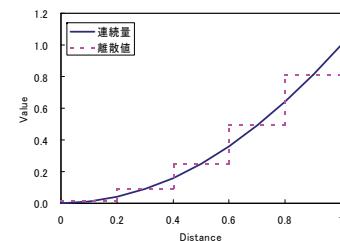
連続(数万群)

↓ 多群化



多群(10数群)

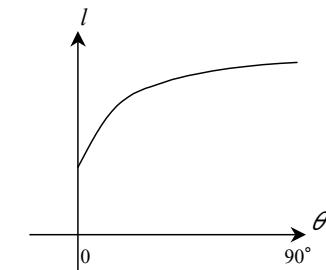
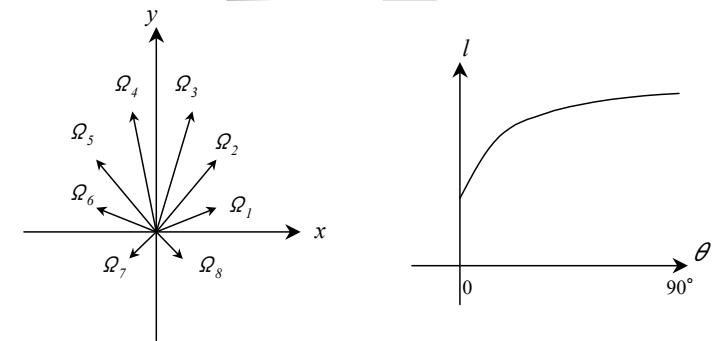
離散化



離散化



関数展開



決定論的解法と近似

決定論的解法と近似

- Boltzmann方程式の決定論的解法は様々なものが存在
- 全てについて網羅的に紹介することは困難
- 炉心核設計によく使われる手法について説明
- 直感的な手法から抽象的な手法の順
 - ✓ Characteristics法
 - ✓ Sn法
 - ✓ 衝突確率法
 - ✓ Pn法
 - ✓ 拡散法

決定論的手法の概要

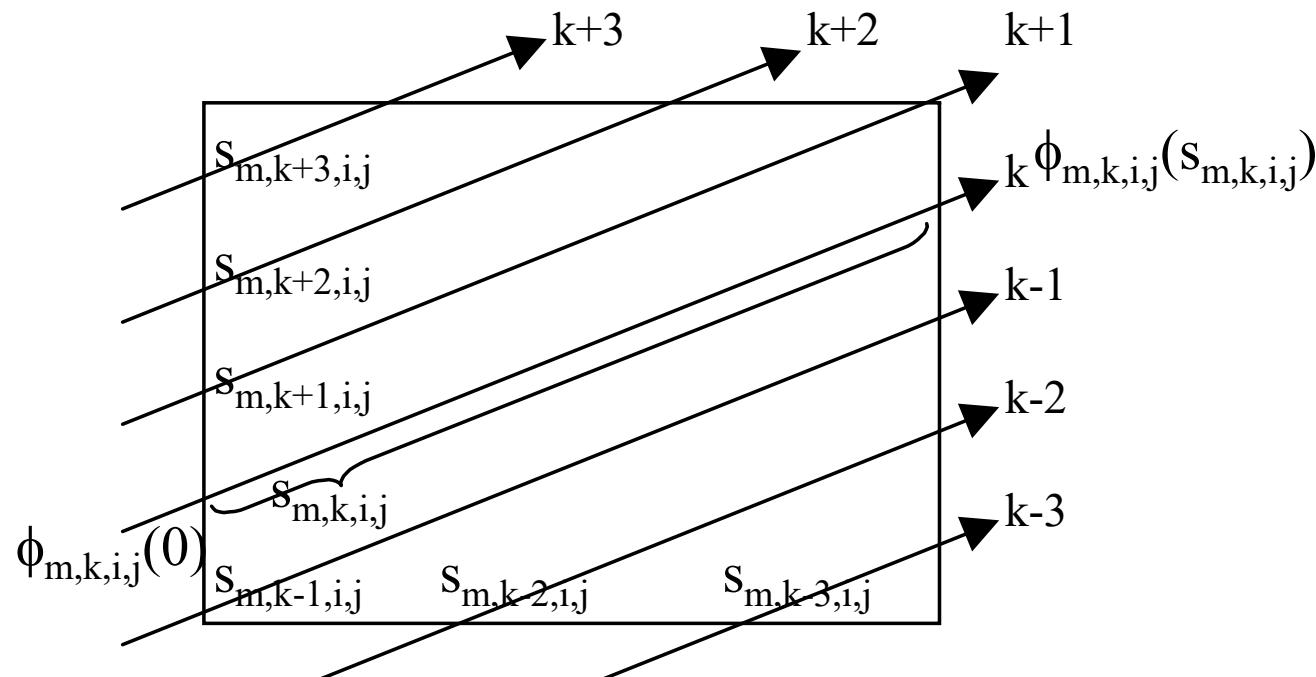
手法名	基本形	空間	エネルギー	角度	複雑形状の扱い ^{*)}	相互作用 ^{**)}	適用例 ^{***)}	備考
Characteristic s	積分****)	離散化 (メッシュ)	離散化 (多群化)	離散化	可	隣接メッシュ	セル、集合体、 (炉心)	最も近似が少ない。記憶容量大。
S _N	微積分	同上	同上	離散化	困難	隣接メッシュ	集合体、(炉心)	計算時間比較的短い。
衝突確率	積分	同上	同上	離散化	可	全メッシュ	セル、(集合体)	小さい体系を短時間・高精度で計算可能。ほとんどのセル計算で用いられる。大きい体系は困難。
CCCP	積分	同上	同上	離散化	可	隣接メッシュ+一部のメッシュ	集合体	計算時間と精度の両立をねらった手法。
透過確率	積分	同上	同上	離散化	可	隣接メッシュ	集合体	計算時間短い。
PN	微積分	同上	同上	関数展開	困難	隣接メッシュ	集合体、(炉心)	式が複雑。
単純化 PN	微積分	同上	同上	関数展開	困難	隣接メッシュ	集合体、炉心	計算時間短い。精度も比較的良好。
拡散	微積分	同上	同上	関数展開	困難	隣接メッシュ	集合体、炉心	計算時間短い。ほとんどの炉心計算で用いられる。

Characteristics法(1)

- Characteristics法は最も近似が少なく、また、その概念もわかりやすい。
- 提案されたのも古く、1960年代である。
- しかし、本方法は1990年代まであまり注目されることはない。
- これは、Characteristics法が大きなメモリ、そして長い計算時間を必要としたためである。
- しかし、計算機の急速な発達と収束加速計算の改良により、現在では集合体計算法における一つの主流になっている。
- また、炉心全体の幾何形状をそのまま取り扱う高精度計算への適用も進んでいる

Characteristics法(2)

- Characteristics法では、体系内をランダムに飛行している中性子をいくつかの代表的な方向に分け、それぞれ中性子が飛行している線(characteristics line)の上での中性子の消滅・生成を考える。



Characteristics法(3)

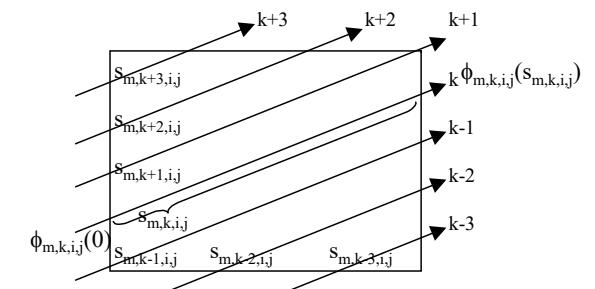
- メッシュ内に入ってくる中性子束と、でていく中性子束の関係を求める。

$$\vec{\Omega}_m \cdot \nabla \phi(\vec{r}, \vec{\Omega}_m) + \Sigma_t(\vec{r})\phi(\vec{r}, \vec{\Omega}_m) = Q(\vec{r}, \vec{\Omega}_m)$$

- メッシュ内で中性子源Qが一定とすると

$$\frac{d\phi_m}{ds} + \Sigma_t \phi_m = Q_m$$

- メッシュの入り口から出口まで積分

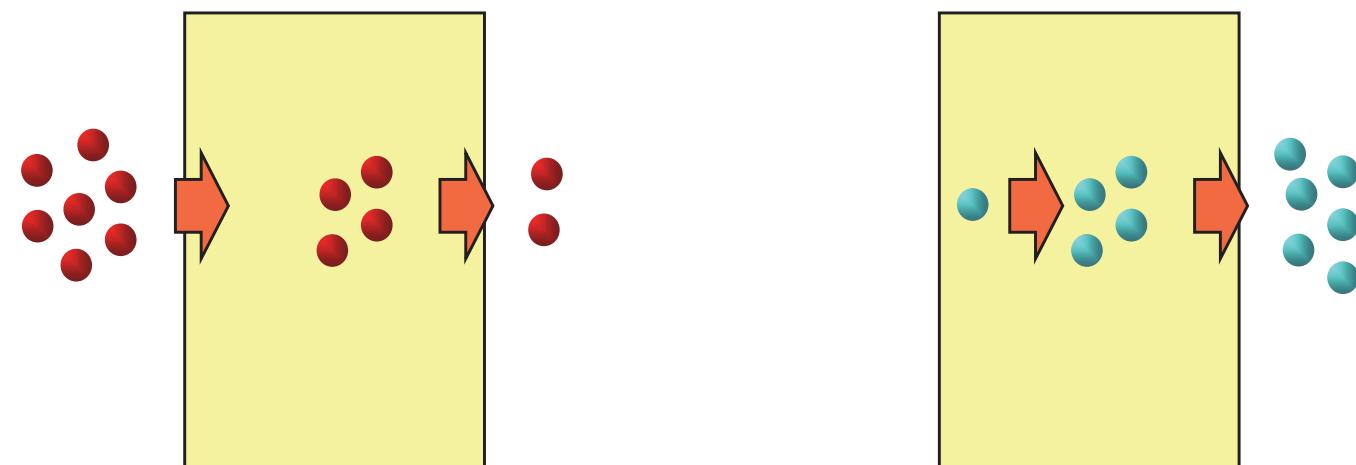
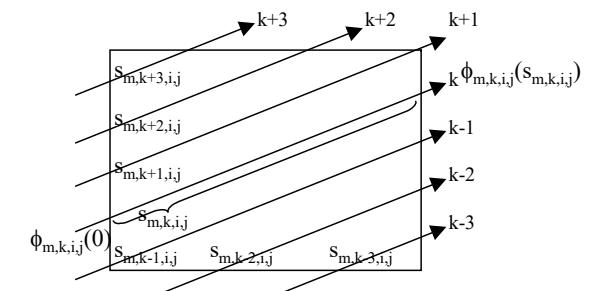


$$\phi(s_m) = \phi_m(0) \exp(-\sum_t s_m) + \frac{Q_m}{\Sigma_t} (1 - \exp(-\sum_t s_m))$$

Characteristics法(4)

■ 中性子バランス式の意味

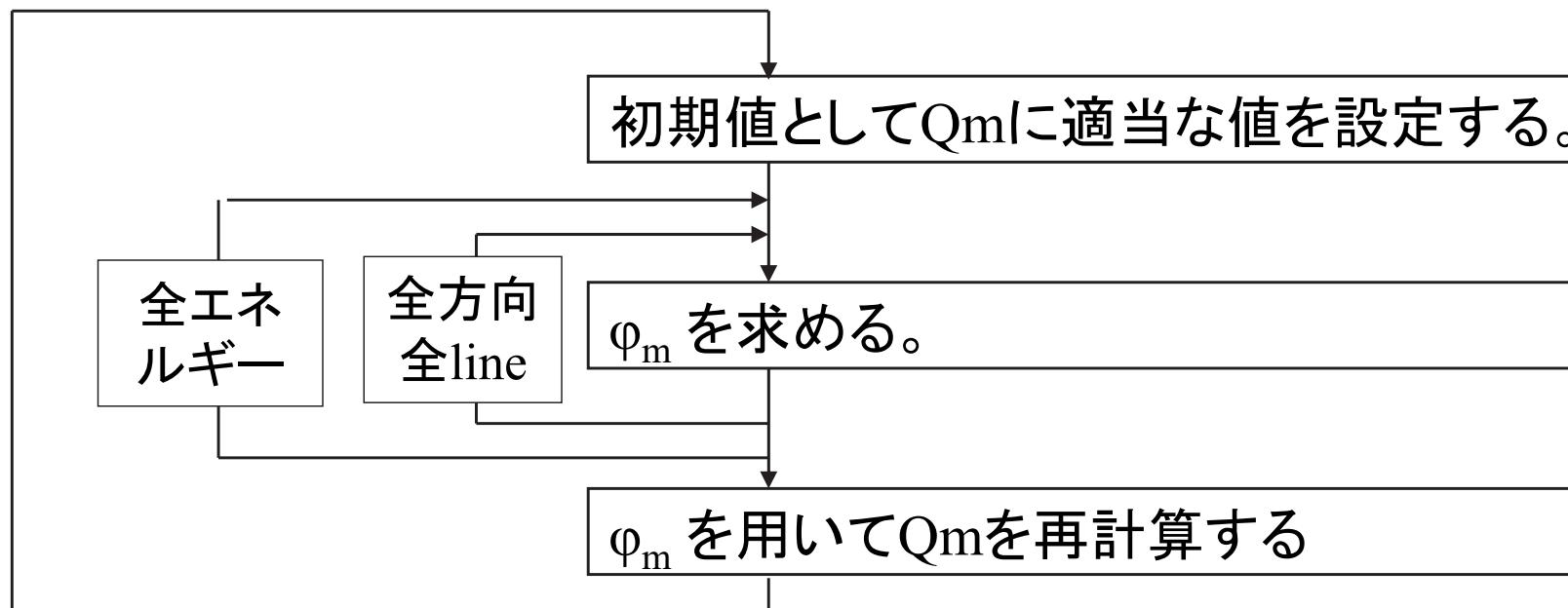
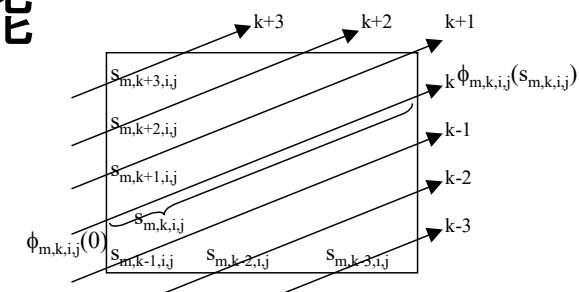
$$\phi(s_m) = \underbrace{\phi_m(0) \exp(-\sum_t s_m)}_{\text{入射中性子の減衰}} + \underbrace{\frac{Q_m}{\sum_t} \left(1 - \exp(-\sum_t s_m)\right)}_{\text{発生する中性子}}$$



Characteristics法(5)

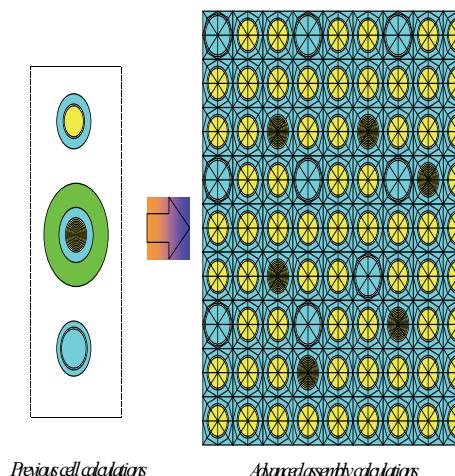
- 全てのエネルギー、全てのcharacteristics line、全ての方向について中性子バランス方程式を解くことで、体系内の中性子束分布を求めることが可能

$$\phi_m(s_m) = \phi_m(0) \exp(-\Sigma_t s_m) + \frac{Q_m}{\Sigma_t} (1 - \exp(-\Sigma_t s_m))$$



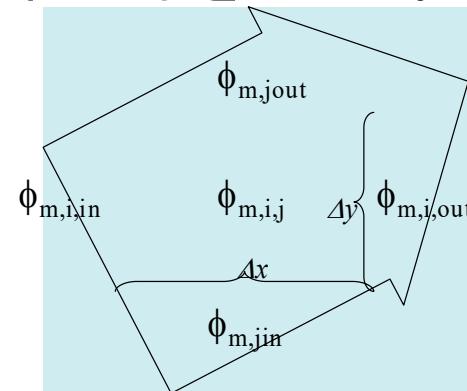
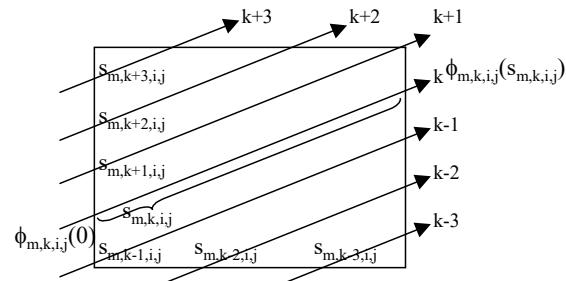
Characteristics法(6)

- 十分にメッシュを小さくし、中性子バランスを計算する軌跡の幅(間隔)と方向の分割を詳細にすれば、精度良く体系全体の中性子束分布を求めることができる。
- 中性子の軌跡の上で積分を行えばよいことから、例えば正方格子内に燃料棒が存在するといった、複雑な形状に対しても適用しやすい。
- そのため、集合体計算でCharacteristics法が主流の一つとなっている。



Sn法(1)

- Sn法では、中性子のある飛行方向について、メッシュに入った中性子と出て行く中性子の関係を求め、これから中性子のバランスを計算するものである。
- Characteristics法と異なる点は以下の通り
 - Characteristics法では、メッシュ内を通過する中性子の軌跡上で中性子のバランスを計算し、それらをメッシュで平均したが、Sn法では、個々のメッシュに対して中性子の出入りを計算
 - Characteristics法では中性子の軌跡上で解析的に積分を行って軌跡上の平均中性子束を求めるが、Snでは、流入・流出中性子束の重み付き平均で平均中性子束を与える。



Sn法(2)

- ある方向mについてのBoltzmann方程式

$$\vec{\Omega}_m \cdot \nabla \phi(\vec{r}, \vec{\Omega}_m) + \Sigma_t(\vec{r})\phi(\vec{r}, \vec{\Omega}_m) = Q(\vec{r}, \vec{\Omega}_m)$$

$$\vec{\Omega}_m = \mu_m \vec{e}_x + \eta_m \vec{e}_y + \xi_m \vec{e}_z$$

$$\nabla = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

ここで、

\vec{e}_d : d 方向の単位ベクトル

- 上の二つの式より、XY方向の二次元体系では

$$\left(\mu_m \frac{\partial}{\partial x} + \eta_m \frac{\partial}{\partial y} \right) \phi_m(\vec{r}) + \Sigma_t(\vec{r}) \phi_m(\vec{r}) = Q_m(\vec{r})$$

Sn法(3)

- 差分化して

$$\mu_m \frac{\phi_{m,i,out} - \phi_{m,i,in}}{\Delta x} + \eta_m \frac{\phi_{m,j,out} - \phi_{m,j,in}}{\Delta y} + \sum_{t,i,j} \phi_{m,i,j} = Q_{m,i,j}$$

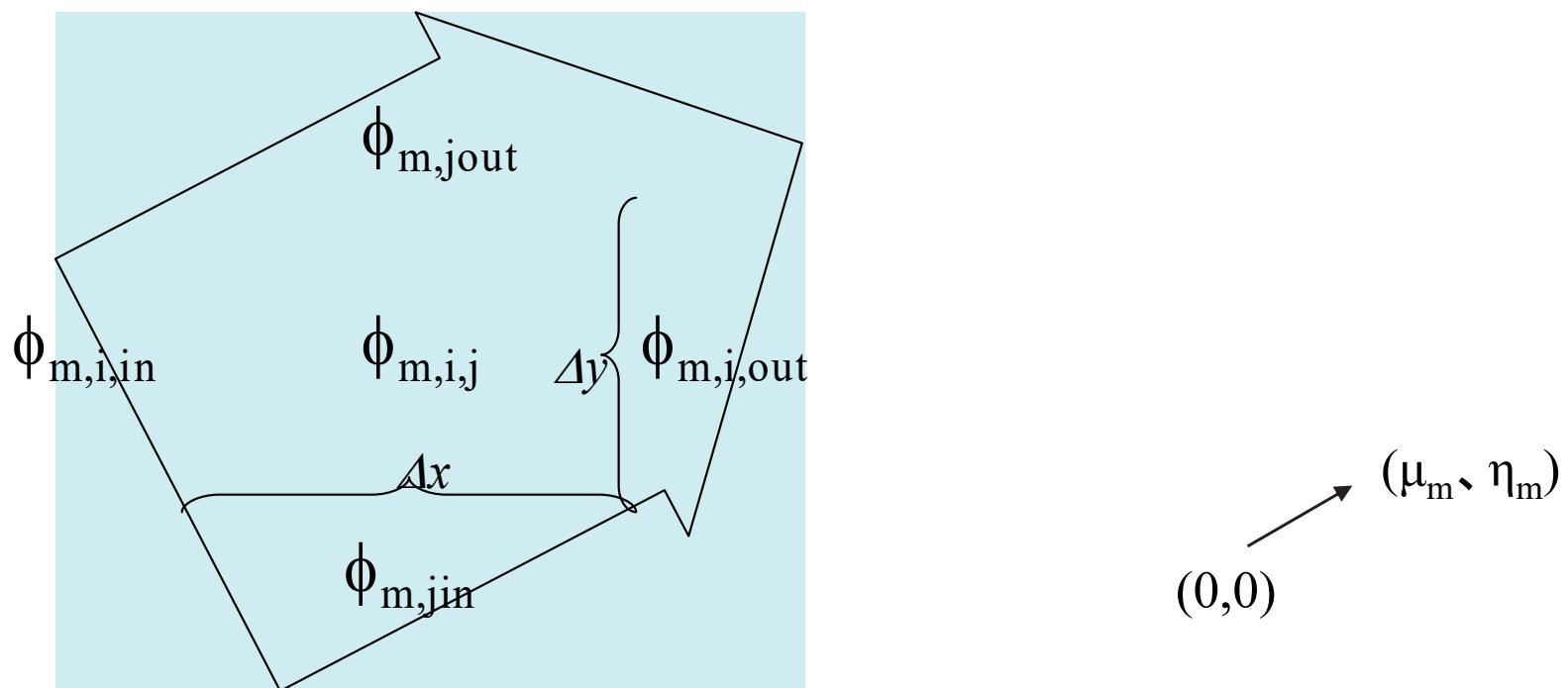
- メッシュの面積 $\Delta x \Delta y$ を両辺に乘じると

$$\mu_m \Delta y (\phi_{m,i,out} - \phi_{m,i,in}) + \eta_m \Delta x (\phi_{m,j,out} - \phi_{m,j,in}) + \sum_{t,i,j} \phi_{m,i,j} \Delta x \Delta y = Q_{m,i,j} \Delta x \Delta y$$

Sn法(4)

式の意味

$$\underbrace{\mu_m \Delta y (\phi_{m,i,out} - \phi_{m,i,in})}_{\begin{array}{l} \text{x面からの流出} \\ - \text{x面からの流入} \end{array}} + \underbrace{\eta_m \Delta x (\phi_{m,j,out} - \phi_{m,j,in})}_{\begin{array}{l} \text{y面からの流出} \\ - \text{y面からの流入} \end{array}} + \underbrace{\sum_{t,i,j} \phi_{m,i,j} \Delta x \Delta y}_{\begin{array}{l} \text{メッシュ内での} \\ \text{消滅} \end{array}} = \underbrace{Q_{m,i,j} \Delta x \Delta y}_{\begin{array}{l} \text{メッシュ内での} \\ \text{生成} \end{array}}$$



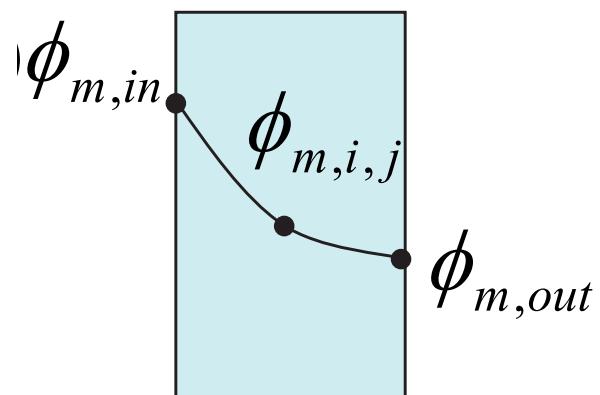
Sn法(5)

- 入射中性子束(2個)が既知としても、流出中性子束(2個)とメッシュ平均中性子束(1個)は未知

$$\mu_m \Delta y (\phi_{m,i,out} - \phi_{m,i,in}) + \eta_m \Delta x (\phi_{m,j,out} - \phi_{m,j,in}) + \sum_{t,i,j} \phi_{m,i,j} \Delta x \Delta y = Q_{m,i,j} \Delta x \Delta y$$

- 方程式が2個足らない……重み付き平均の導入

$$\phi_{m,i,j} = a\phi_{m,out} + (1-a)\phi_{m,in} \quad 0.5 \leq a \leq 1$$



Sn法(6)

- 重み付き平均式と中性子バランス式を使用することで、メッシュに入射する中性子束から流出する中性子束を求めることが出来る

$$\mu_m \Delta y (\phi_{m,i,out} - \phi_{m,i,in}) + \eta_m \Delta x (\phi_{m,j,out} - \phi_{m,j,in}) + \sum_{t,i,j} \phi_{m,i,j} \Delta x \Delta y = Q_{m,i,j} \Delta x \Delta y$$

$$\phi_{m,i,j} = a \phi_{m,i,out} + (1-a) \phi_{m,i,in}$$

$$\phi_{m,i,j} = a \phi_{m,j,out} + (1-a) \phi_{m,j,in}$$

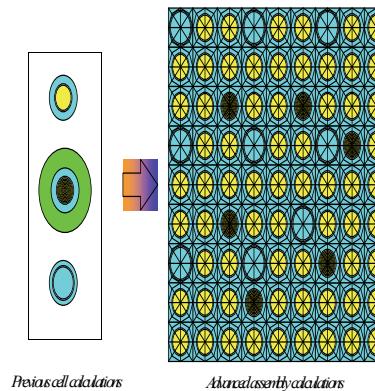
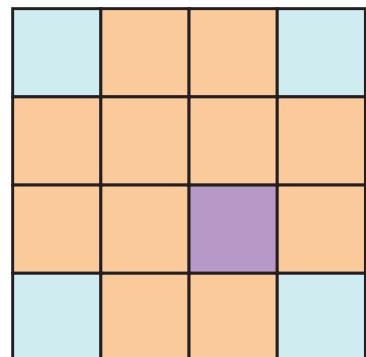
- 後はCharacteristics法と同じ処理

Sn法(7)

- 一般的には、 $a=1/2$ が用いられることが多い。 $a=1/2$ の重み付き平均は、「ダイヤモンド差分式」と呼ばれることがある。
- $a=1/2$ の場合、輸送方程式の解析解を全く用いていないため、精度が劣るようと思われるが、散乱の多い条件では、輸送方程式の解析解から得られる重みを用いるより精度はよい。
- これは、散乱が多い場合、角度中性子束の変化が指数関数的な減衰より直線的な減衰を示すためである。

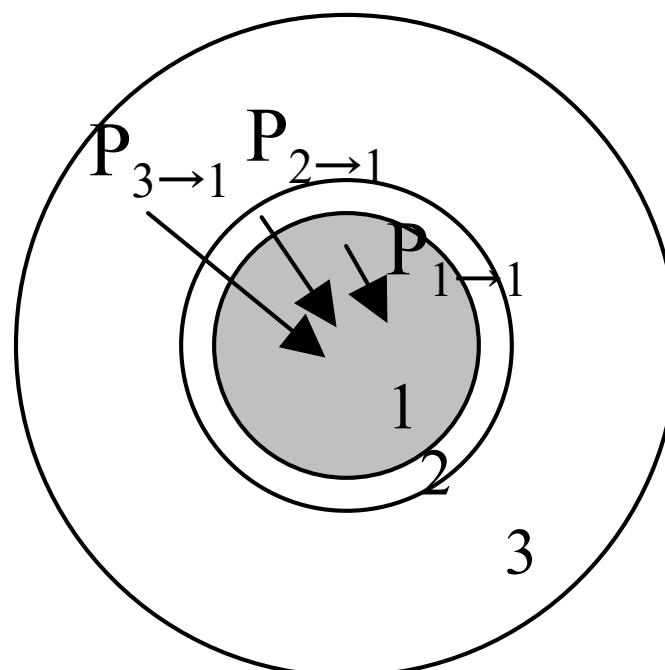
Sn法(8)

- Sn法はCharacteristics法に比べて使用するメモリ量が小さく、計算時間も短い
- 炉心核設計の初期から幅広く使用してきた。
- 複雑な形状に対してSn法を適用するには、流入/流出中性子束と平均中性子束の関係を表す際に工夫が必要



衝突確率法(1)

- 衝突確率法は、ある領域で発生した中性子が注目する領域でどの程度衝突するかを計算し、これを全ての領域について積算することで、注目する領域の中性子束を求める



衝突確率法(2)

- 中性子源を等方、断面積に角度依存性がないと近似し、積分型方程式を角度方向に積分する。

$$\int_{4\pi} \phi(\vec{r}, \vec{\Omega}) d\vec{\Omega} = \int_{4\pi} \int_0^\infty Q(\vec{r} - s\vec{\Omega}, \vec{\Omega}) \exp\left(-\int_0^s \Sigma_t(\vec{r} - s'\vec{\Omega}) ds'\right) ds d\vec{\Omega}$$

- その結果

$$\phi(\vec{r}) = \int Q(\vec{r}') p(\vec{r}' \rightarrow \vec{r}) d\vec{r}'$$

ここで、

$$\phi(\vec{r}) = \int_{4\pi} \phi(\vec{r}, \vec{\Omega}) d\vec{\Omega}$$

$$Q(\vec{r}, \vec{\Omega}) = \frac{1}{4\pi} Q(\vec{r})$$

$$p(\vec{r}' \rightarrow \vec{r}) = \frac{\exp\left(-\int_0^{|\vec{r}'|} \Sigma_t(s') ds'\right)}{4\pi s'^2}$$

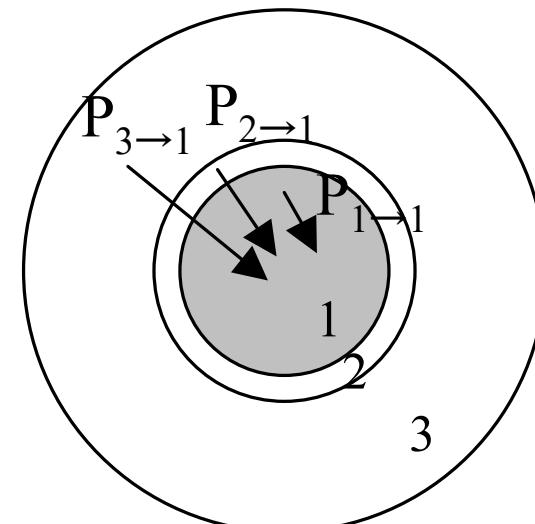
衝突確率法(3)

- 体系をメッシュに分割すると

$$\phi_i = \sum_{i'} Q_{i'} p_{i' \rightarrow i} V_{i'}$$

ここで、

$V_{i'}$: 領域*i'*の体積

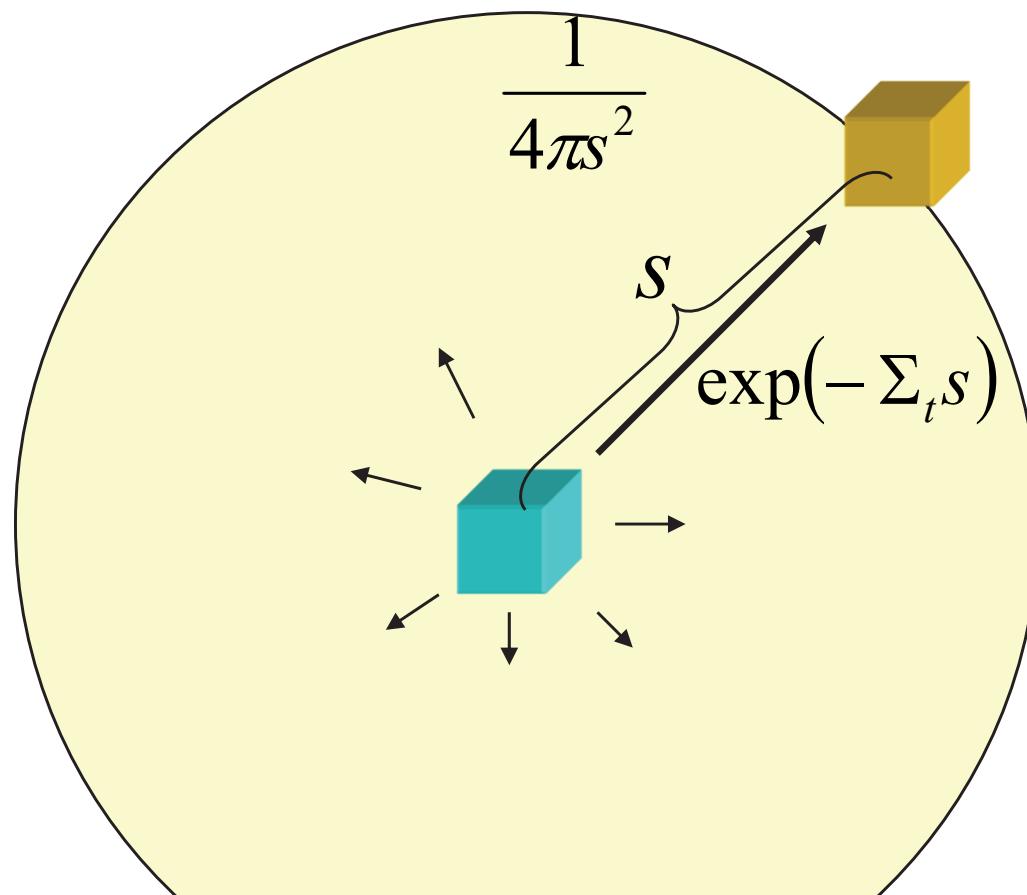


- 中性子源Qが既知の場合、衝突確率のpさえ求まれば、 ϕ を計算できる。

衝突確率法(4)

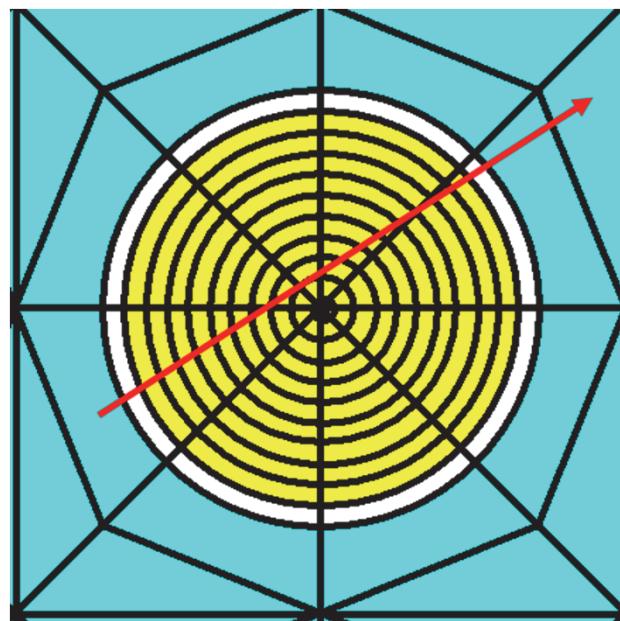
- p の計算: 均質な体系の場合

$$\frac{\exp(-\sum_t s)}{4\pi s^2}$$



衝突確率法(5)

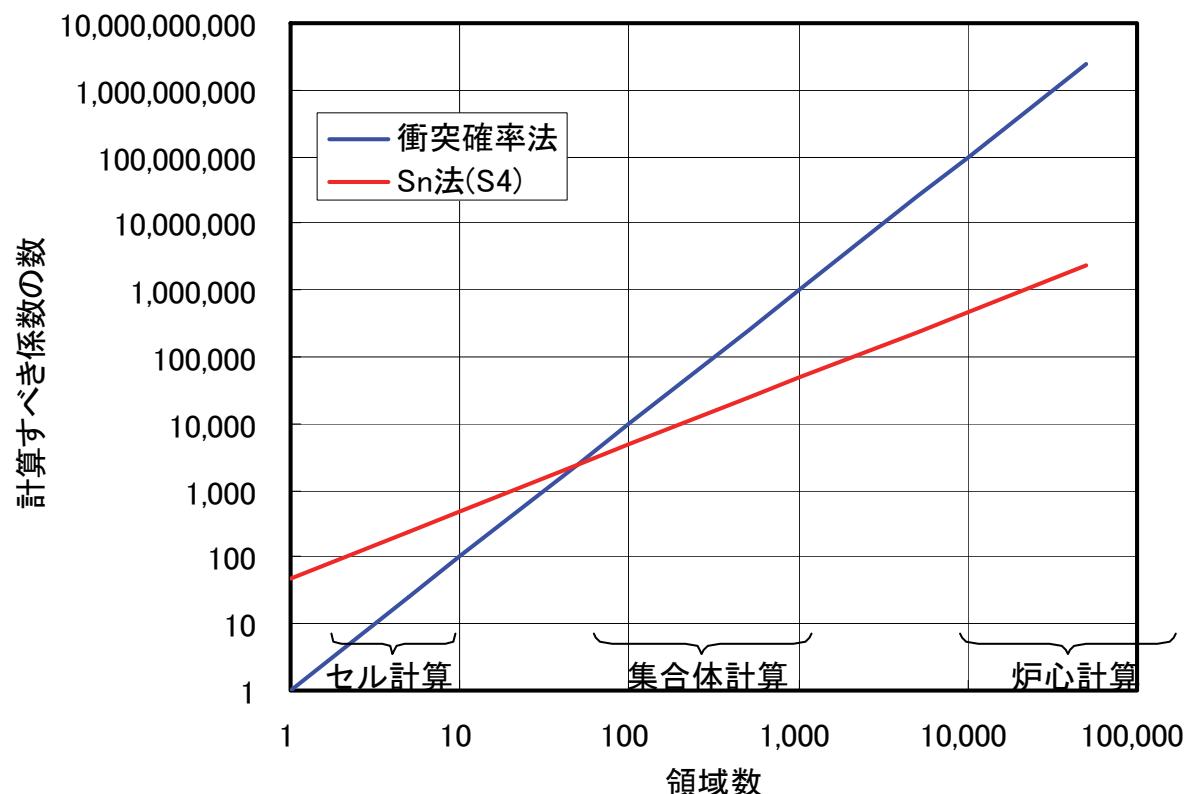
- pの計算: 非均質な体系の場合
 - Characteristics法と同じ考え方を用いて、対象とする体系に多数の直線を引き、その直線上の衝突確率を計算。その後、得られた衝突確率を数値積分して計算



$$\exp(-\sum_t S_t)$$

衝突確率法(6)

- 空間を積分して扱うため、中性子束が急激な変化を示す体系においても精度がよい
- しかし、大きい体系の場合、多数の衝突確率を求める必要がある。
- セル計算向き
- ただし、近年は集合体計算を Characteristics 法で実施するため、使われることは少ない



Pn法(1)

- 中性子束の角度分布をLegendre関数[Pn(x)]に基づく球面調和関数で展開して扱う手法

$$\phi(r, \Omega) = \frac{1}{4\pi} \sum_{l=0}^L (2l+1) \sum_{m=-l}^l \phi_{lm}(r) Y_{lm}(\Omega)$$

ここで

$Y_{lm}(\Omega)$: 球面調和関数

$$Y_{lm}(\Omega) = \left(\frac{(l-m)!}{(l+m)!} \right)^{1/2} (-1)^m P_{lm}(\cos\theta) e^{im\varphi}$$

- 未知数は展開次数に依存:P1近似なら二つ、P3近似なら四つ
- 一般型は極めて複雑で、実用的な炉心解析には不向き
- しかし、P1近似は拡散方程式のベースになるため重要

Pn法(2)

■ Pn方程式の一般型(r-z座標系)

$$\begin{aligned}
 & \sum_{m=1}^l' (\delta_+^m \frac{1}{\sum_{m'} \delta_-^{m'}}) \alpha_{2mn}^{11} + \delta_-^m \frac{1}{\sum_{m'} \delta_+^{m'}} \alpha_{2mn}^{12} + \delta_z^m \frac{1}{\sum_{m'} \delta_z^{m'}} \alpha_{2mn}^{13} f_{em}^e - \sum_{m=1}^l \alpha_{2mn}^{11} f_{em}^e = -S_{2mn}^e \\
 & - \sum_{m=1}^l' (\delta_+^m \frac{1}{\sum_{m'} \delta_-^{m'}}) (\alpha_{2mn}^{21} f_{e, m-2}^e + \alpha_{2mn}^{22} f_{e, m+2}^e) \frac{\alpha_{2mn} \beta_{2mn}}{(2l-1)(2l+1)} \\
 & - \sum_{m=1}^l' (\delta_+^m \frac{1}{\sum_{m'} \delta_-^{m'}}) (\alpha_{2mn}^{23} f_{e, m}^e) \alpha_{2mn}^{24} = \frac{\alpha_{2mn} \beta_{2mn}}{(2l-1)(2l+1)} \\
 & - \sum_{m=1}^l' (\delta_+^m \frac{1}{\sum_{m'} \delta_-^{m'}}) (\alpha_{2mn}^{42} f_{e, m}^e) \alpha_{2mn}^{43} = \frac{\gamma_{2mn} \gamma_{2mn}}{(2l-1)(2l+1)} \\
 & - \sum_{m=1}^l' (\delta_+^m \frac{1}{\sum_{m'} \delta_-^{m'}}) (\alpha_{2mn}^{51} f_{e, m-2}^e + \alpha_{2mn}^{52} f_{e, m+2}^e) = \frac{\beta_{2mn} \gamma_{2mn}}{(2l-1)(2l+1)} \\
 & - \sum_{m=1}^l' (\delta_z^m \frac{1}{\sum_{m'} \delta_z^{m'}}) (\alpha_{2mn}^{62} f_{e, m}^e) \alpha_{2mn}^{63} = \frac{\beta_{2mn} \gamma_{2mn}}{(2l-1)(2l+1)} \quad (2-72) \\
 & - \sum_{m=1}^l' (\delta_z^m \frac{1}{\sum_{m'} \delta_z^{m'}}) (\alpha_{2mn}^{71} f_{e, m-1}^e + \alpha_{2mn}^{72} f_{e, m+1}^e) = -\frac{\alpha_{2mn} \gamma_{2mn}}{(2l-1)(2l+1)} \\
 & - \sum_{m=1}^l' (\delta_z^m \frac{1}{\sum_{m'} \delta_z^{m'}}) (\alpha_{2mn}^{81} f_{e, m-1}^e + \alpha_{2mn}^{82} f_{e, m+1}^e) = -\frac{\alpha_{2mn} \gamma_{2mn}}{(2l-1)(2l+1)} \\
 & - \sum_{m=1}^l' (\delta_z^m \frac{1}{\sum_{m'} \delta_z^{m'}}) (\alpha_{2mn}^{91} f_{e, m-1}^e + \alpha_{2mn}^{92} f_{e, m+1}^e) = -\frac{\alpha_{2mn} \gamma_{2mn}}{(2l-1)(2l+1)} \\
 & - \sum_{m=1}^l' (\delta_z^m \frac{1}{\sum_{m'} \delta_z^{m'}}) (\alpha_{2mn}^{101} f_{e, m-1}^e + \alpha_{2mn}^{102} f_{e, m+1}^e) = \quad (l=0, 2, 4, \dots, l-1; -l \leq m \leq l) \\
 & \text{但し } \delta_r^m = \left(\frac{2}{\pi r} + \frac{m+1}{r}\right) \quad \delta_z^m = \left(\frac{2}{\pi r} - \frac{m-1}{r}\right) \quad \delta_z = \frac{2}{\pi z}
 \end{aligned}$$

2.0

$$\begin{aligned}
 \alpha_{2mn}^{11} &= \frac{\alpha_{2mn} \alpha_{2mn}}{(2l-1)(2l+1)} & \alpha_{2mn}^{11} &= \frac{\beta_{2mn} \beta_{2mn}}{(2l-1)(2l+1)} \\
 \alpha_{2mn}^{12} &= \frac{\beta_{2mn} \beta_{2mn}}{(2l-1)(2l+1)} & \alpha_{2mn}^{13} &= \frac{\delta_{2mn} \delta_{2mn}}{(2l-1)(2l+1)} \\
 \alpha_{2mn}^{24} &= \frac{\gamma_{2mn} \gamma_{2mn}}{(2l-1)(2l+1)} & \alpha_{2mn}^{13} &= \frac{\gamma_{2mn} \gamma_{2mn}}{(2l-1)(2l+1)} \\
 \alpha_{2mn}^{21} &= -\frac{\alpha_{2mn} \beta_{2mn}}{(2l-1)(2l+1)} & \alpha_{2mn}^{21} &= -\frac{\beta_{2mn} \alpha_{2mn}}{(2l-1)(2l+1)} \\
 \alpha_{2mn}^{22} &= \frac{\alpha_{2mn} \beta_{2mn}}{(2l-1)(2l+1)} & \alpha_{2mn}^{22} &= \frac{\beta_{2mn} \beta_{2mn}}{(2l-1)(2l+1)} \\
 \alpha_{2mn}^{33} &= -\frac{\alpha_{2mn} \beta_{2mn}}{(2l-1)(2l+1)} & \alpha_{2mn}^{33} &= -\frac{\beta_{2mn} \alpha_{2mn}}{(2l-1)(2l+1)} \\
 \alpha_{2mn}^{42} &= -\frac{\beta_{2mn} \alpha_{2mn}}{(2l-1)(2l+1)} & \alpha_{2mn}^{42} &= -\frac{\alpha_{2mn} \beta_{2mn}}{(2l-1)(2l+1)} \\
 \alpha_{2mn}^{51} &= -\frac{\alpha_{2mn} \alpha_{2mn}}{(2l-1)(2l+1)} & \alpha_{2mn}^{51} &= -\frac{\delta_{2mn} \delta_{2mn}}{(2l-1)(2l+1)} \\
 \alpha_{2mn}^{52} &= \frac{\beta_{2mn} \beta_{2mn}}{(2l-1)(2l+1)} & \alpha_{2mn}^{52} &= \frac{\delta_{2mn} \delta_{2mn}}{(2l-1)(2l+1)} \\
 \alpha_{2mn}^{62} &= \frac{\gamma_{2mn} \gamma_{2mn}}{(2l-1)(2l+1)} & \alpha_{2mn}^{62} &= \frac{\gamma_{2mn} \gamma_{2mn}}{(2l-1)(2l+1)} \\
 \alpha_{2mn}^{71} &= -\frac{\alpha_{2mn} \gamma_{2mn}}{(2l-1)(2l+1)} & \alpha_{2mn}^{71} &= \frac{\beta_{2mn} \gamma_{2mn}}{(2l-1)(2l+1)} \\
 \alpha_{2mn}^{72} &= -\frac{\beta_{2mn} \gamma_{2mn}}{(2l-1)(2l+1)} & \alpha_{2mn}^{72} &= \frac{\beta_{2mn} \gamma_{2mn}}{(2l-1)(2l+1)} \\
 \alpha_{2mn}^{81} &= \frac{\beta_{2mn} \gamma_{2mn}}{(2l-1)(2l+1)} & \alpha_{2mn}^{81} &= -\frac{\alpha_{2mn} \gamma_{2mn}}{(2l-1)(2l+1)} \\
 \alpha_{2mn}^{82} &= \frac{\beta_{2mn} \gamma_{2mn}}{(2l-1)(2l+1)} & \alpha_{2mn}^{82} &= -\frac{\beta_{2mn} \gamma_{2mn}}{(2l-1)(2l+1)} \\
 \alpha_{2mn}^{91} &= \frac{\beta_{2mn} \gamma_{2mn}}{(2l-1)(2l+1)} & \alpha_{2mn}^{91} &= -\frac{\alpha_{2mn} \gamma_{2mn}}{(2l-1)(2l+1)} \\
 \alpha_{2mn}^{92} &= -\frac{\beta_{2mn} \gamma_{2mn}}{(2l-1)(2l+1)} & \alpha_{2mn}^{92} &= \frac{\beta_{2mn} \gamma_{2mn}}{(2l-1)(2l+1)} \\
 \alpha_{2mn}^{101} &= -\frac{\alpha_{2mn} \gamma_{2mn}}{(2l-1)(2l+1)} & \alpha_{2mn}^{101} &= \frac{\beta_{2mn} \gamma_{2mn}}{(2l-1)(2l+1)}
 \end{aligned}$$

拡散法(1)

- 拡散理論は、軽水炉の開発初期から現在まで30年近く
炉心計算に用いられてきており、十分な精度で持つて炉
心の挙動を評価できるという実績が積まれている
- この意味から、拡散法はBoltzmann方程式の決定論的
解法の中で、Characteristics法と並び、最もよく利用され
ている

拡散法(2)

- 中性子束の展開:Pn近似の第2項まで

$$\phi(\vec{r}, \vec{\Omega}) = \frac{1}{4\pi} (\phi(\vec{r}) + 3\vec{\Omega} \cdot \vec{J}(r))$$

ここで

$\phi(\vec{r})$: 全中性子束

$J(r)$: 正味の中性子流

$$\phi(r, \Omega) = \frac{1}{4\pi} \sum_{l=0}^L (2l+1) \sum_{m=-l}^l \phi_{lm}(r) Y_{lm}(\Omega)$$

- 微積分型Boltzmann方程式に代入し、P0, P1ルジャンドル多項式を乗じて全立体角で積分

$$\nabla \cdot \vec{J}(\vec{r}) + \Sigma_t(\vec{r})\phi(\vec{r}) = Q_0(\vec{r})$$

$$\nabla \phi(\vec{r}) + 3\Sigma_t(\vec{r})\vec{J}(\vec{r}) = \vec{Q}_1(\vec{r})$$

ここで、

$Q_0(\vec{r})$: 等方散乱、核分裂などによって生じる中性子源

$\vec{Q}_1(\vec{r})$: 非等方散乱によって生じる中性子源

拡散法(3)

- P1方程式において、散乱が等方であると仮定すると(Q_1 を無視すると)、下の式になる。

$$\vec{J}(\vec{r}) = -\frac{1}{3\Sigma_t(\vec{r})} \nabla \phi(\vec{r})$$

- 上式はFickの法則と呼ばれる。上式を用いて、次の拡散方程式を得ることが出来る。

$$-\nabla \cdot \frac{1}{3\Sigma_t(\vec{r})} \nabla \phi(\vec{r}) + \Sigma_t(\vec{r})\phi(\vec{r}) = Q_0(\vec{r})$$

漏洩項

吸収項

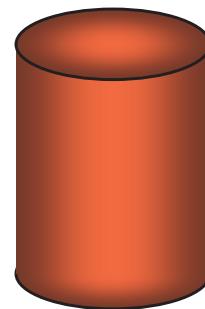
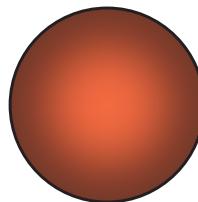
発生項

拡散法(4)

- 拡散方程式を解くためには・・

$$-\nabla \cdot \frac{1}{3\Sigma_t(\vec{r})} \nabla \phi(\vec{r}) + \Sigma_t(\vec{r})\phi(\vec{r}) = Q_0(\vec{r})$$

- 微分項の解析的な取り扱いは、単純な形状のみ可能



$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d}{dr}$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr}$$

$$\nabla^2 = \frac{d}{dr} \frac{d}{dr}$$

拡散法(5)

- 数値計算: 二階の微分方程式を直接使用しない。以下の式からスタート

$$\nabla \cdot \vec{J}(\vec{r}) + \sum_t(\vec{r})\phi(\vec{r}) = Q_0(\vec{r})$$

- あるメッシュで体積積分し、中性子のバランスを計算

$$\sum_n S_n J_{Sn,i,j} + \sum_{t,i,j} \phi_{i,j} V_{i,j} = Q_{0,i,j} V_{i,j}$$

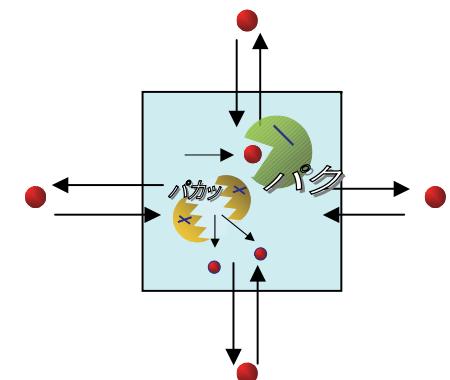
ここで、

$J_{Sn,i,j}$: 領域(i, j)の表面Snにおける正味の中性子流

S_n : 表面Snの面積

なお、ガウスの発散定理を用いて、以下の変換を行っている。

$$\int_V \nabla \cdot \vec{J}(\vec{r}) d\vec{r} = \int_S \vec{n} \cdot \vec{J}(\vec{r}) ds$$



拡散法(6)

- 中性子流を中性子束で表す

$$\vec{J}(\vec{r}) = -\frac{1}{3\Sigma_t(\vec{r})} \nabla \phi(\vec{r})$$

- 二次元で差分近似を使用すると

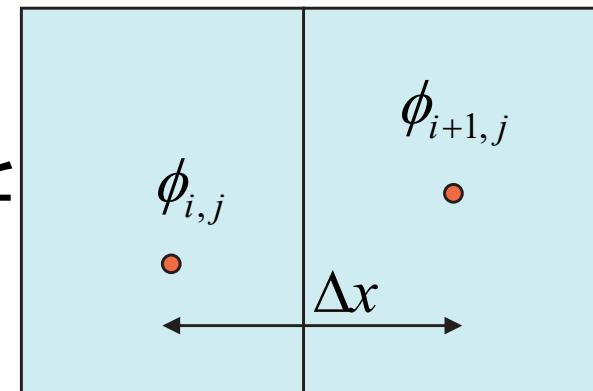
$$J_x = -\frac{1}{3\Sigma_t} \frac{\partial \phi}{\partial x} \cong -\frac{1}{3\Sigma_t} \frac{\phi_{i+1,j} - \phi_{i,j}}{\Delta x}$$

$$J_y = -\frac{1}{3\Sigma_t} \frac{\partial \phi}{\partial y} \cong -\frac{1}{3\Sigma_t} \frac{\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j}}{\Delta y}$$

ここで、

Δx : x方向のメッシュ幅

Δy : y方向のメッシュ幅



$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \cong \frac{\phi_{i+1,j} - \phi_{i,j}}{\Delta x}$$

拡散法(7)

- 差分近似を中性子バランス式に代入

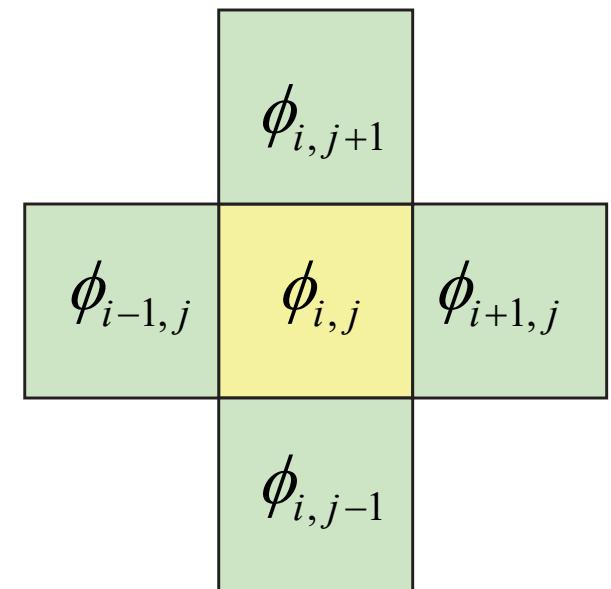
$$\sum_n S_n J_{Sn,i,j} + \Sigma_{t,i,j} \phi_{i,j} V_{i,j} = Q_{0,i,j} V_{i,j}$$

$$J_x \cong -\frac{1}{3\Sigma_t} \frac{\phi_{i+1,j} - \phi_{i,j}}{\Delta x}$$

$$J_y \cong -\frac{1}{3\Sigma_t} \frac{\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j}}{\Delta y}$$

- $\phi_{i,j}$ について解く。
- あるメッシュの中性子束が、隣接メッシュの中性子束から求まる

$$\phi_{i,j} = a_{i,j} \phi_{i+1,j} + b_{i,j} \phi_{i-1,j} + c_{i,j} \phi_{i,j+1} + d_{i,j} \phi_{i,j-1} + q_{i,j}$$



拡散法(8)

- 拡散法に使われている近似

- ✓ 中性子束の角度分布を球面調和関数で展開する際、第3項以降を無視
- ✓ 中性子源が等方であると仮定

$$\phi(\vec{r}, \vec{\Omega}) = \frac{1}{4\pi} (\phi(\vec{r}) + 3\vec{\Omega} \cdot \vec{J}(\vec{r}))$$

$$\nabla \phi(\vec{r}) + 3\Sigma_t(\vec{r}) \vec{J}(\vec{r}) = \vec{Q}_1(\vec{r})$$

- この二つの近似を用いていることから、拡散法は中性子束の角度分布に大きな偏りが存在する場合、例えば強吸収体の近くでは精度が悪化する
- そのため、拡散法でこのようなケースを取り扱う場合には、角度依存に対してより高度な手法(Characteristics法など)の結果を再現するように断面積を補正することが行われる。これを輸送-拡散補正と呼ぶ

計算時間と精度

計算精度と計算時間(1)

- Boltzmann方程式の様々な決定論的解法には特徴がある。
 - ✓ 精度は高いが、大きなメモリや長い計算時間を要する方法
 - ✓ 計算時間は短く、メモリ量も少なくて済むが、精度が若干落ちる方法
- 計算時間が短く、精度も高い普遍的な決定論的解法は(今のところ)存在しない。

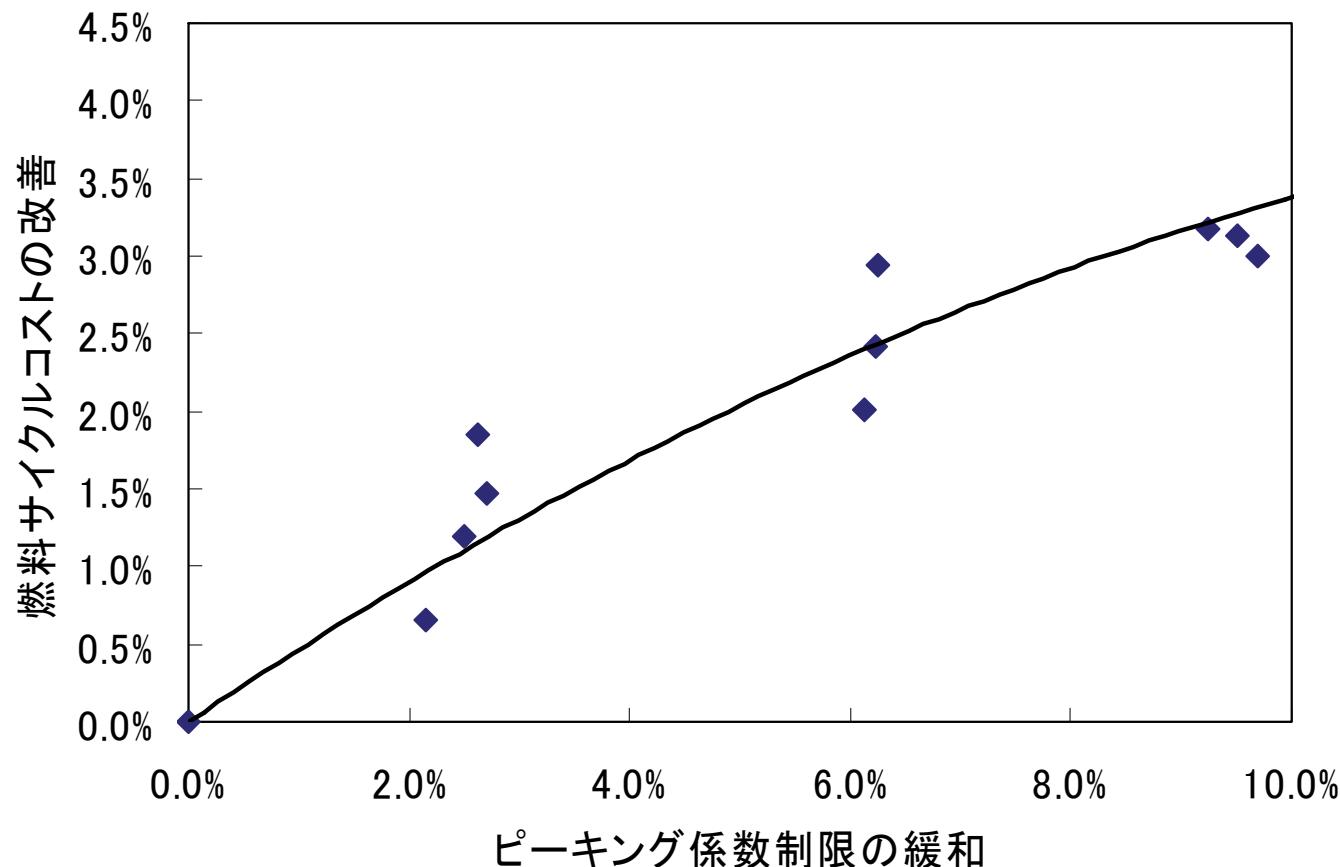
計算精度と計算時間(2)

- (Q3) Boltzmann方程式に対する種々の解法は、それぞれどのような問題に適しているか？
- (A3) 中性子束の空間依存性や角度依存性の扱いの違いによって、Boltzmann方程式の決定論的解法には様々なバリエーションが存在
 - ✓ Characteristics法：集合体～炉心など比較的大きな体系向き。集合体計算ではデファクトスタンダード。今後、さらに活用される領域は増えると見込まれる。
 - ✓ Sn法：炉心解析分野では今後使われることはなさそう。遮蔽計算などの用途向けで使用されると思われる。
 - ✓ 衝突確率法：炉心解析分野では、今後使われる機会は減少すると思われる。Kind of extinction
 - ✓ Pn近似法：これを簡略化した単純化Pn法が拡散計算の高精度版として使用されている。Pn近似自体はコードの実装が複雑なため、実用に適さずと思われる。
 - ✓ 拡散法：炉心など大きな体系向き。漏れが小さく、中性子束の勾配が小さい体系に対しては十分な精度で解を求めることが出来る。必要メモリ量・計算時間は最も短い。

今後の研究

今後の研究(1) 牛丼と炉物理の等価性

- これまでに様々な決定論的解法が開発されてきたのは、「安い(簡単)、旨い(精度がいい)、早い」手法に対するニーズが常に存在したから。



今後の研究(2) ハードとソフトの等価性

- ムーアの法則

まとめ

まとめ

- 炉心核設計とBoltzmann方程式の関係
- Boltzmann方程式の二つの基本形
 - ✓ 微積分型と積分型
- Boltzmann方程式を解くための糸口
 - ✓ エネルギー、空間、角度変数の扱い
- Boltzmann方程式の解法
 - ✓ Characteristics, S_n , 衝突確率、拡散
- 計算精度と計算時間
- 今後の研究

もっと勉強したい方へ

- J. J. Duderstadt, L. J. Hamilton, “原子炉の理論と解析”(成田、藤田訳), 現代工学社 (1980).
- 竹田敏一、”原子炉物理”, 大阪大学、(1985).
- 小林啓介、”原子炉物理”, コロナ社, (1996).
- R.J.J. Stammle, M.J. Abbate, “Methods of Steady State Reactor Physics in Nuclear Design,” Academic Press, (1983).
- D.Knott, “A Lattice-Physics Code for Modelling the Detailed Depletion of Gadolinia Isotopes from BWR fuel Designs,” Ph.D. Thesis, Perdue University, (1991).
- Handbook of Nuclear Engineering, Elsevier (2010).