

1

#### 名古屋大学 工学研究科

#### 山本 章夫



- 多群拡散方程式の導出
- □ 差分化
- □ 反復解法および加速法
- □ フィードバックと数値解法
- □ 数値解法と品質保証
- 🛛 まとめ



#### なぜ拡散方程式?

- 原子炉の炉心の核的な性質は、炉心内における中性子の挙動によって決まる。
- 中性子の挙動は、"Boltzmann輸送方程式"によって正確 に予測できる。
- では、なぜ拡散方程式ではなく、Boltzmann方程式を使わないのか?

 $\vec{\Omega} \cdot \nabla \phi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) + \Sigma_t(\vec{r}, E) \phi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) = Q(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$ 

## Boltzmann輸送方程式(1)

各項の物理的イメージは・・・ П



- □ Boltzmann輸送方程式の変数(未知数)は、
  - 位置(3つ)、飛行方向(2つ)、エネルギー(1つ)
  - の6変数。これを直接解くのは(数値計算でも)至難の業  $\vec{\Omega} \cdot \nabla \phi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) + \Sigma_t(\vec{r}, E) \phi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) = Q(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$ 
    - ここで、
    - $\vec{r}$ :位置
    - E:中性子のエネルギー
    - $\vec{\Omega}$ :中性子の飛行方向  $\phi(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$ :角度中性子束  $\Sigma_t(\vec{r}, E)$ :巨視的全断面積  $Q(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$ :中性子源



6

拡散近似は、中性子の飛行方向の取り扱いを簡単にするために行う



7

□ 中性子が飛んでいる方向とその強度を整理



□ 方向と強度の関係をLegendre 関数で展開



- □ なぜこんな面倒なことを?
- □ →角度の変数を少なくできる。拡散方程式は関数展開法 を用いて導くことができる。

- 国数展開した中性子束をBoltzmann輸送方程式に代入 すると、(かなり面倒な計算を経て)、以下の拡散方程式 が得られる。
- □ 中性子束の飛行方向Ωが式に入っていないので、解きやすい。
- $-D(\vec{r}, E)\nabla^2 \phi(\vec{r}, E) + \Sigma_t(\vec{r}, E) \phi(\vec{r}, E) = Q(\vec{r}, E)$  $\subset \subset \mathcal{T}$

$$D(\vec{r}, E) = \frac{1}{3\Sigma_t(\vec{r}, E)}$$



- エネルギー変数については、多群化に よって取り扱われる
- 本来、中性子のエネルギーは連続量 であるが、これを複数のグループに分 けるという近似を導入する





連続(数万群)







小教群(2群)

#### 多群断面積

- 各グループで使用する断面積は、グループ内の中性子 束のエネルギー分布で平均したものを使用する。
- グループ内の中性子束のエネルギー分布は、(炉心の一部を模擬した単純な体系で)あらかじめ求めておく。
- □ 例えば、巨視的吸収断面積の場合・・・

 $\Sigma_{a,g}(\vec{r}) = \left(\int_{E_g}^{E_{g-1}} \Sigma_a(\vec{r}, E) \phi(\vec{r}, E) dE\right) / \int_{E_g}^{E_{g-1}} \phi(\vec{r}, E) dE$ 



#### 多群拡散方程式

- □ 拡散近似・多群近似を使用すると、Boltzmann輸送方程 式を以下の形にすることができる。
- □ これがほとんどの炉心計算コードの基礎式になっている。
- 拡散方程式自体は、熱伝導など工学の他の分野でもよく 使われる。

$$\begin{split} &-\nabla \cdot D_g(\vec{r}) \nabla \phi_g(\vec{r}) + \Sigma_{a,g}(\vec{r}) \phi_g(\vec{r}) \\ &= \sum_{g' \neq g} \Sigma_{s,g' \rightarrow g}(\vec{r}) \phi_{g'}(\vec{r}) + \frac{\chi_g(\vec{r})}{k_{eff}} \sum_{g'} v \Sigma_{f,g'}(\vec{r}) \phi_{g'}(\vec{r}) \end{split}$$

### 多群拡散方程式







#### 多群拡散方程式

- 多群拡散方程式は、エネルギー群ごとに1つの偏微分方 程式からなる。
- 従って、一般には連立の偏微分方程式を解かなければ ならない

1群目の中性子に 対する拡散方程式

$$-D_{1}(\vec{r})\nabla^{2}\phi_{1}(\vec{r}) + \Sigma_{a,1}(\vec{r})\phi_{1}(\vec{r})$$
  
=  $\Sigma_{s,2\to 1}\phi_{2}(\vec{r}) + \frac{\chi_{1}(\vec{r})}{k_{eff}} \left(v\Sigma_{f,1}(\vec{r})\phi_{1}(\vec{r}) + v\Sigma_{f,2}(\vec{r})\phi_{2}(\vec{r})\right)$ 

2群目の中性子に 対する拡散方程式 
$$\begin{split} &-D_{2}(\vec{r})\nabla^{2}\phi_{2}(\vec{r}) + \Sigma_{a,2}(\vec{r})\phi_{2}(\vec{r}) \\ &= \Sigma_{s,1\to 2}\phi_{1}(\vec{r}) + \frac{\chi_{2}(\vec{r})}{k_{eff}} \Big( v\Sigma_{f,1}(\vec{r})\phi_{1}(\vec{r}) + v\Sigma_{f,2}(\vec{r})\phi_{2}(\vec{r}) \Big) \end{split}$$



## 差分化の必要性(1)

□ もう一度拡散方程式をみると・・  $-D_{g}(\vec{r})\nabla^{2}\phi_{g}(\vec{r}) + \Sigma_{a,g}(\vec{r})\phi_{g}(\vec{r})$   $= \sum_{g' \neq g} \Sigma_{s,g' \rightarrow g}(\vec{r})\phi_{g'}(\vec{r}) + \frac{\chi_{g}(\vec{r})}{k_{eff}} \sum_{g'} v\Sigma_{f,g'}(\vec{r})\phi_{g'}(\vec{r})$ 

□ 空間の微分が存在・・・どうやって扱うか

- 計算機は四則演算しか扱えない・・・



## 差分化の必要性(2)

- □ 微分項の解析的な取り扱いは、単純な形状しか無理
- 従って、炉心のように複雑な形状において微分を解析的に扱うのは不可能



#### 差分化の必要性(3)

- 空間を細かい領域(メッシュ)に区分し、それぞれの領域内で中性子束を平坦とする
- □ このような取り扱いを「空間の離散化」と呼んでいる。



#### 差分化の必要性(4)

□ 微分項は、差分で取り扱う・・・差と商の形に変換



□ 差と商になるので計算機で扱える

#### 有限差分式の導出(1)

- 差分式導出には二階の微分方程式を直接使用しない。
   簡単のため、中性子源が与えられている以下の式から
   出発
    $\nabla \cdot \vec{J}(\vec{r}) + \Sigma_t(\vec{r}) \phi(\vec{r}) = Q_0(\vec{r})$   $\left( \vec{J}(\vec{r}) = -D \nabla \phi(\vec{r}) \right)$
- □ あるメッシュで体積積分し、中性子のバランスを計算

$$\sum_{n} S_{n} J_{Sn,i,j} + \Sigma_{t,i,j} \phi_{i,j} V_{i,j} = Q_{0,i,j} V_{i,j}$$
ここで、  
 $J_{Sn,i,j}$ : 領域(i, j)の表面Snにおける正味の中性子流  
 $S_{n}$ : 表面Snの面積  
なお、ガウスの発散定理を用いて、以下の変換を行っている。  
 $\int_{V} \nabla \cdot \vec{J}(\vec{r}) d\vec{r} = \int_{S} \vec{n} \cdot \vec{J}(\vec{r}) ds$ 

#### 有限差分式の導出(2)

中性子流を中性子束で表す П  $\vec{J}(\vec{r}) = -D\nabla\phi(\vec{r})$  差分近似を使用すると  $J_{x} = -D\frac{\partial\phi}{\partial r} \cong -D\frac{\phi_{i+1,j} - \phi_{i,j}}{\Delta r}$  $J_{y} = -D\frac{\partial\phi}{\partial v} \cong -D\frac{\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j}}{\Delta v}$ ここで、 Δx:x方向のメッシュ幅 Δy:y方向のメッシュ幅



 $\frac{\partial \phi}{\partial \omega} \cong \frac{\phi_{i+1,j} - \phi_{i,j}}{\Delta \omega}$ 

#### 有限差分式の導出(3)

□ 差分近似を中性子バランス式に代入



あるメッシュの中性子束が、隣接メッシュの中性子束から求まる

 $\phi_{i,j} = a_{i,j}\phi_{i+1,j} + b_{i,j}\phi_{i-1,j} + c_{i,j}\phi_{i,j+1} + d_{i,j}\phi_{i,j-1} + q_{i,j}$ 

#### 有限差分式の導出(4)

- 有限差分式はメッシュ点ごと、エネルギー群ごとに与えられる。
- メッシュ点ごと、エネルギー群ごとの中性子束を未知数と 考えると、有限差分式を解くことは連立方程式を解くこと と同じである。

$$\phi_{i,j} = a_{i,j}\phi_{i+1,j} + b_{i,j}\phi_{i-1,j} + c_{i,j}\phi_{i,j+1} + d_{i,j}\phi_{i,j-1} + q_{i,j}$$

#### 有限差分式の導出(5)

$$\begin{aligned} \phi_{1,1} &= a_{1,1}\phi_{2,1} + c_{1,1}\phi_{1,2} + q_{1,1} \\ \phi_{2,1} &= a_{2,1}\phi_{3,1} + b_{2,1}\phi_{1,1} + c_{2,1}\phi_{2,2} + q_{2,1} \\ \phi_{3,1} &= b_{3,1}\phi_{2,1} + c_{3,1}\phi_{3,2} + q_{3,1} \\ \phi_{1,2} &= a_{1,2}\phi_{2,2} + c_{1,2}\phi_{1,3} + d_{1,2}\phi_{1,1} + q_{1,2} \\ \phi_{2,2} &= a_{2,2}\phi_{3,2} + b_{2,2}\phi_{1,2} + c_{2,2}\phi_{2,3} + d_{2,2}\phi_{2,1} + q_{2,2} \\ \phi_{3,2} &= b_{3,2}\phi_{2,2} + c_{3,2}\phi_{3,3} + d_{3,2}\phi_{3,1} + q_{3,2} \\ \phi_{1,3} &= a_{1,3}\phi_{2,3} + b_{2,3}\phi_{1,3} + d_{1,3}\phi_{1,2} + q_{1,3} \\ \phi_{2,3} &= b_{3,3}\phi_{2,3} + d_{3,3}\phi_{3,2} + q_{3,3} \end{aligned}$$

 $\vec{\mathbf{I}\phi} = \mathbf{A}\vec{\phi} + \vec{q}$ 

(1,3)	(2,3)	(3,3)
(1,2)	(2,2)	(3,2)
(1,1)	(2,1)	(3,1)



連立方程式は行列の形に書ける



■ 差分式を導くとき、炉心境界部分を特別扱いする必要がある。



$$\phi_{1,1} = a_{1,1}\phi_{2,1} + b_{1,1}\phi_{0,1} + c_{1,1}\phi_{1,2} + d_{1,1}\phi_{1,0} + q_{1,1}$$



#### □ 反射境界条件





#### □ 真空境界条件

- 炉心から漏れ出た中性子が戻ってこないとき
- 炉心最外周で使用する場合有り
- □ 周期境界条件
  - 炉心が周期性を持った配列となっているとき
  - マルチ集合体計算で使用する場合有り



- □ 回転対称境界条件
  - 炉心が回転対称性を持っているとき





- 境界条件をうまく使うことで、計算時間を減らすことが可能。
- 似たような境界条件の使用方法に注意する必要がある。
   (例:反射境界条件、回転対称境界条件)
- 境界条件の取り扱いは特殊処理のため、コードの作成 上最も難しい点の一つであり、バグの温床



#### なぜ反復解法?

- 拡散方程式は、空間メッシュによる差分化とエネルギー 多群化により、連立一次方程式の形に書ける。
- □ ならば、連立一次方程式をそのまま解けば?
- □ なぜ反復法を使う必要があるのか?

$$\begin{aligned} \phi_{1,1} &= a_{1,1}\phi_{2,1} &+ c_{1,1}\phi_{1,2} &+ q_{1,1} \\ \phi_{2,1} &= a_{2,1}\phi_{3,1} + b_{2,1}\phi_{1,1} + c_{2,1}\phi_{2,2} &+ q_{2,1} \\ \phi_{3,1} &= b_{3,1}\phi_{2,1} + c_{3,1}\phi_{3,2} &+ q_{3,1} \\ \phi_{1,2} &= a_{1,2}\phi_{2,2} &+ c_{1,2}\phi_{1,3} &+ d_{1,2}\phi_{1,1} + q_{1,2} \\ \phi_{2,2} &= a_{2,2}\phi_{3,2} + b_{2,2}\phi_{1,2} + c_{2,2}\phi_{2,3} + d_{2,2}\phi_{2,1} + q_{2,2} \\ \phi_{3,2} &= b_{3,2}\phi_{2,2} + c_{3,2}\phi_{3,3} + d_{3,2}\phi_{3,1} + q_{3,2} \\ \phi_{1,3} &= a_{1,3}\phi_{2,3} &+ d_{1,3}\phi_{1,2} + q_{1,3} \\ \phi_{2,3} &= a_{2,3}\phi_{3,3} + b_{2,3}\phi_{1,3} &+ d_{2,3}\phi_{2,2} + q_{2,3} \\ \phi_{3,3} &= b_{3,3}\phi_{2,3} &+ d_{3,3}\phi_{3,2} + q_{3,3} \end{aligned}$$

#### なぜ反復解法?

- □ 一般の炉心解析で扱うメッシュ数と群数
  - 例:三次元、全炉心、PWR、2群
  - 未知数=集合体数x径方向分割x軸方向分割xエネルギー群数
  - -200x2x2x25x2=40,000
- つまり、4万元の連立一次方程式を解かなければならない。この行列の要素数は16億となるため、逆行列を直接計算することは困難。
- □ そのため、反復解法に頼らざるを得ない。

32

#### 差分化した拡散方程式の一般型

- さらに、一般の炉心解析では、中性子源は既知ではなく、 臨界計算を行う必要がある。
- □ この場合の差分式の一般型は以下の通り。



## 差分化した拡散方程式の一般型

差分化した方程式の一般型は、行列を用いると以下のように書ける。

$$\begin{aligned} A_{i,j,g}^{x-} \phi_{i-1,j,g} + A_{i,j,g}^{y-} \phi_{i,j-1,g} + A_{i,j,g}^{0} \phi_{i,j,g} + A_{i,j,g}^{x+} \phi_{i+1,j,g} + A_{i,j,g}^{y+} \phi_{i,j+1,g} \\ = \frac{1}{k_{eff}} \chi_{i,j,g} \sum_{g'=1}^{G} v \Sigma_{f,i,j,g'} \phi_{i,j,g'} + \sum_{\substack{g'=1\\g'\neq g}}^{G} \Sigma_{s0,i,j,g'\rightarrow g} \phi_{i,j,g'} \end{aligned}$$

$$\mathbf{A}\vec{\phi} = \frac{1}{k_{eff}}\mathbf{F}\vec{\phi}$$

#### 解くべき方程式

# 解くべき連立方程式は以下の通り。 A $\vec{\phi} = \frac{1}{k_{eff}}$ , F $\vec{\phi}$ 吸収・漏れを実効増倍率核分裂による中性子表す行列(固有値)発生を表す行列 しかし、よく見ると単なる連立方程式ではない・・・固有値と固有ベクトルを求める形となっている。 $k_{eff}\vec{\phi} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{F}\vec{\phi}$ へ $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{F}\vec{\phi} = k_{eff}\vec{\phi}$

実効増倍率が固有値に対応している。このことから、しばしば実効増倍率を固有値と呼ぶ。(ちなみに、臨界時の中性子束は、固有ベクトルに対応)

#### 二つの反復:内部反復と外部反復

- □ 以下の固有値問題は、内部反復と外部反復を用いて解 くことができる。  $\mathbf{A}\vec{\phi} = \frac{1}{k_{eff}}\mathbf{F}\vec{\phi}$
- 内部反復により、中性子源分布が分かっていると仮定した場合の中性子束分布を求める。

$$\mathbf{A}\vec{\phi} = \frac{1}{k} \mathbf{F}\vec{\phi} = \mathbf{Q} \Rightarrow \vec{\phi} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{Q}$$

□ 外部反復により、中性子源分布を求める。

$$\vec{\phi}^{(n+1)} = \frac{1}{k_{eff}} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{F} \vec{\phi}^{(n)}$$


内部反復は、中性子源が既知とした場合の中性子束分布を求める際に使用される。

□ メッシュ(i,j)における中性子束は:

$$\phi_{i,j,g}^{(k+1)} = \frac{Q_{i,j,g} - A_{i,j,g}^{x-} \phi_{i-1,j,g}^{(k)} - A_{i,j,g}^{y-} \phi_{i,j-1,g}^{(k)} - A_{i,j,g}^{x+} \phi_{i+1,j,g}^{(k)} - A_{i,j,g}^{y+} \phi_{i,j+1,g}^{(k)}}{A_{i,j,g}^{0}}$$



□ 各メッシュ点において、中性子束の変化が十分小さくなるまで反復する  $\mathcal{E} = \left| \frac{\phi_{i,j,g}^{(k+1)} - \phi_{i,j,g}^{(k)}}{\phi_{i,j,g}^{(k)}} \right|$ 

◆ すると、次式を満たすような中性子束が得られる。これが 内部反復で求めたい解である。

$$\phi_{i,j,g} = \frac{Q_{i,j,g} - A_{i,j,g}^{x-} \phi_{i-1,j,g} - A_{i,j,g}^{y-} \phi_{i,j-1,g} - A_{i,j,g}^{x+} \phi_{i+1,j,g} - A_{i,j,g}^{y+} \phi_{i,j+1,g}}{A_{i,j,g}^{0}}$$



- 内部反復により、中性子源が与えられた場合の中性子 東分布を計算できる。
- しかし、炉心計算では、中性子源は与えられておらず、 また実効増倍率も計算する必要がある。
- おおざっぱに言うと、外部反復は中性子源分布を求める 計算である。(ついでに実効増倍率も)
- より厳密には、内部反復を繰り返し適用することで、固有 値と固有ベクトル、つまり実効増倍率と臨界時の中性子 東分布を求める計算である。

$$\vec{\phi}^{(n+1)} = \frac{1}{k_{eff}^{(n)}} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{F} \vec{\phi}^{(n)}$$



□ 行列の固有値と固有ベクトルは、ベクトルの要素数だけ ある。(典型的なPWR三次元計算の場合、約4万)

$$k_{eff}\vec{\phi} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{F}\vec{\phi}$$

- 炉心計算で求めたいのは、これらのうち最大の固有値と それに対する固有ベクトルである。
- 最大の固有値とそれに対する固有ベクトルを求めるために、べき乗法をもちいる。

□ 固有値・固有ベクトルは以下の式を満たす。

$$\lambda_k \vec{u}_k = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{F} \vec{u}_k$$

ここで、

- $\vec{u}_k: k$ 番目の固有ベクトル
- $\lambda_k: k$ 番目の固有値
- 中性子束の初期値を固有ベクトルを用いて以下のように 表す。

$$\vec{\phi}^{(0)} = \sum_{k} a_{k} \vec{u}_{k}$$
ここで、
$$a_{k} : 展開係数$$



□ 上式の関係を繰り返し適用すると:

$$\vec{\phi}^{(n)} = \sum_{k} \left(\frac{\lambda_k}{k_{eff}}\right)^n a_k \vec{u}_k$$

42

□ 反復回数が十分大きくなると、最終的に:

$$\vec{\phi}^{(n)} = \sum_{k} \left( \frac{\lambda_k}{k_{eff}} \right)^n a_k \vec{u}_k = \sum_{k} \left( \frac{\lambda_k}{\lambda_0} \right)^n a_k \vec{u}_k \approx a_0 \vec{u}_0 + a_1 \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_0} \right)^n \vec{u}_1$$

真の解との差異は、最大の固有値と二番目に大きい固有値の比(ドミナンス比)によって決まる。



以上のことより、以下の反復計算を繰り返すことで最大 固有値とそれに対する固有ベクトル、つまり実効増倍率 と臨界状態の中性子束分布を計算することができる。

$$\vec{\phi}^{(n)} = \frac{1}{k_{eff}} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{F} \vec{\phi}^{(n-1)}$$

□ なお、反復計算中、 $\lambda_0$ (=k<sub>eff</sub>)は以下のように推定する。  $\lambda_0^{(n)} = \frac{|\mathbf{F}\vec{\phi}^{(n)}|}{|\mathbf{A}\vec{\phi}^{(n)}|} \frac{|\mathbf{F}\vec{\phi}^{(n)}|}{\left|\frac{1}{\lambda_0^{(n-1)}}\mathbf{F}\vec{\phi}^{(n-1)}\right|} = \frac{\sum_{i=1}^{Nx}\sum_{j=1}^{Ny}\sum_{g=1}^{G} v\Sigma_{f,i,j,g} \phi_{i,j,g}^{(n)} \Delta x_i \Delta y_j}{\frac{1}{\lambda_0^{(n-1)}}\sum_{i=1}^{Nx}\sum_{j=1}^{Ny}\sum_{g=1}^{G} v\Sigma_{f,i,j,g} \phi_{i,j,g}^{(n-1)} \Delta x_i \Delta y_j}$ 

# 内部反復と外部反復の組み合わせ





- 差分化した拡散方程式は、原理的には内部および外部 反復法を用いて解くことができる。
- しかし、商業炉のように大型体系では、単純な反復計算のみを用いることは困難
  - メッシュ数が多くなると、内部反復の収束が遅くなる
  - 体系が大型になると外部反復の収束が遅くなる
  - 実機の炉心設計では、繰り返し炉心計算を実行するため、計算時間は短いほど好ましい
- 内部および外部反復の収束を早めるための加速法が不可欠

### メッシュ数と内部反復回数

#### □ 二次元均質体系におけるメッシュ数と内部反復回数



47

体系の大きさと外部反復回数

#### 二次元均質体系における体系の大きさと外部反復回数



48

# 外挿を用いる加速

□ Successive Over Relaxation, SOR法

$$\phi^{(n)} = \phi^{(n-1)} + \omega(\phi^{*,(n)} - \phi^{(n-1)})$$



# 外挿を用いる加速



# 外挿を用いる加速

□ Chebyshev法

$$\phi^{(\infty)} = f(\phi^{(n)}, \phi^{(n-1)}, \phi^{(n-2)})$$



# その他の加速

#### □ Wielandt法

- 拡散方程式を以下のように変形することで外部反復の速度を大幅に改善する。近代ノード法を用いたコードでよく用いられる。 -  $D\nabla^2 \phi + \left(\Sigma_a - \frac{v\Sigma_f}{\lambda_e}\right) \phi = \left(\frac{1}{k_{eff}} - \frac{1}{\lambda_e}\right) v\Sigma_f \phi = \left(\frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda_e}\right) v\Sigma_f \phi$
- □ 粗メッシュ拡散加速法(Nonlinear反復法)
  - 詳細なメッシュにおける反復に加え、粗いメッシュおける反復を
     実施し、全体の中性子束分布の収束を加速する。



### その他の加速

□ 加速法の効果の一例(粗メッシュ拡散加速法)



M. Tatsumi, A. Yamamoto, J. Nucl. Sci. Technol., 40 376 (2003).

### 計算条件と収束性の関係

- 反復計算の収束性は以下のような計算条件に影響を受ける。
  - メッシュ数:多いほど収束が遅い
  - エネルギー群数:多いほど収束が遅い
  - 上方散乱:多いほど収束が遅い
  - ボイド領域:空気など真空に近い領域がある場合は、収束が極めて遅い。見かけ上収束していても真の解と全く異なる結果になっていることがあるので要注意。
  - 炉心のサイズ:大きいほど収束が遅い
  - 体系の核的結合度:小さいほど収束が遅い



# なぜフィードバックの取り扱いが必要?

- ここまでの議論においては、拡散方程式に与えられる断 面積は全て既知としてきた。
- □ しかし、実機の計算では、この前提が成り立たない・・・
- □ この複雑な問題、どこから手をつけるか?



### 核的フィードバック

#### □ Xe, Sm蓄積の効果

- 核分裂で発生するfission product(FP)のうち、短半減期のものは、
   短時間でその原子数密度が平衡状態に達する。
- 運転状態の炉心解析を行う際には、Xe, Smの濃度を出力レベ ル(中性子束レベル)に応じた平衡状態になっていると仮定する ことが多い。

中性子  
吸収 Xe136  
Te135 → I135 → Xe135 → Cs135 · · · ·  
$$\uparrow$$
  $\beta$ -崩壊  $\beta$ -һ

$$X_{\infty} = \frac{\lambda_{I}I_{\infty} + \gamma_{X}\Sigma_{f}\phi}{\lambda_{X} + \sigma_{c,X}\phi} = \frac{(\gamma_{I} + \gamma_{X})\Sigma_{f}\phi}{\lambda_{X} + \sigma_{c,X}\phi}$$

核的フィードバック

- □ ドップラー効果
  - 燃料の温度が上がると、燃料の原子の熱運動が激しくなる。そのため、共鳴部分の断面積の変化が見かけ上、よりなだらかになる。

### 核的フィードバック

#### □ ほう素濃度

一加圧水型軽水炉(PWR)は、炉心の反応度をほう素濃度の変化によって調整する。そのため、PWRの解析では、炉心の余剰反応度を反応度制御に必要なほう素濃度として算出することが一般的である。



# 熱水力的フィードバック

#### □ 冷却材ボイド率

- BWRでは、バンドルごとのボイド分布を精 度良く評価する必要がある。

#### □ 冷却材温度

- – 運転時に加えて冷温時の解析も必要とな <sup>20</sup>
   るため、室温から高温(~300°C)程度の範
   <sub>20</sub>
   囲をカバーする必要がある。
- 運転時、炉心内の冷却材温度分布を精度<sup>1</sup>
   良く評価する必要有り。



60

### フィードバックを考慮した反復計算

- フィードバック計算ごとに炉心 計算用の核定数を作成するの は効率が悪い。
- そこで、あらかじめ想定しうる範 囲内で様々な炉心状態の核定 数を作成し、テーブル化してお く。
  - テーブル化の方法、範囲などに多くのノウハウが必要。
- 解析の際には、フィードバックを 取り扱う反復計算を追加する。



### フィードバック考慮時の収束性

- 拡散方程式を一般的な内部・外部反復法を用いて解く場合、収束の早い/遅いはあるものの、その収束性は担保されている。
- フィードバック反復を付け加えると、内部・外部反復の反 復行列自体が計算中に変化する、いわゆる非線形反復 と呼ばれるものとなり、必ずしも収束性が保証されなくなる・・・計算が発散する可能性有り

### フィードバック考慮時の収束性

#### □ Xe濃度のフィードバック計算

- → ある集合体のXe原子数密度の初期値が真の値より小さい
  - Xeによる反応度低下が小さくなる
  - 当該燃料における中性子束は真の値より高めに評価される
  - 次の反復では、Xe原子数密度が大きくなる
  - その結果当該集合体の反応度低下量が大きくなる
  - 中性子束が低めに評価される
  - \_ Xe原子数密度が小さくなる

#### いつまでたっても収束しない(振動する)

# フィードバック考慮時の収束性

- Xe濃度の評価に限らず、減速材温度フィードバックなどでも同じようなことが生じる場合がある。
- □ 収束しない場合、Successive Under Relaxationを使用

 $X^{(n)} = X^{(n-1)} + \omega(X^{*,(n)} - X^{(n-1)})$ X : Xe 濃度など $<math>0 < \omega < 1$ 

# 数値解法と品質保証

# 数値解法の落とし穴と品質保証

- 拡散方程式を数値的に解く計算コードは多数存在する

   CITATION, DIFF-3D, BOLD-VENTURE, MOSRA-LIGHTなど
- □ これらのコードを利用すると、簡便に数値計算が可能
- 中身(の計算方法)が分からなければ、ブラックボックスとしてコードを使用しがち・・・

# 数値解法の落とし穴と品質保証

- □ 中身が分かっていても、注意すべきことは多い。
- 計算コードは、入力データに応じた計算結果を出力する。 これは、入力データが正しければ結果も正しいと言うことではない。

# 誤差の種類

- □ 拡散近似
- □ 多群近似
- □ メッシュ誤差
- □ 体系の近似
- □ 収束条件
- □ 断面積の誤差



- □ 拡散方程式は、厳密なBoltzmann輸送方程式の近似で あり、中性子の飛行方向を大幅に簡略化している。
- □ 拡散近似が問題となる場合
  - 炉心外周部(PWRのバッフル板)
  - 制御棒近辺
  - 真空に近い領域
  - 小型の炉心
- 今までに類似の体系で拡散計算の精度が確認されていない場合は、輸送計算コードなどにより、拡散近似の妥当性確認が望ましい



取り扱う体系内で、中性子エネルギーが大きく異なる領 域がある場合、それらの境界付近で多群近似に基づく誤 差が生じる可能性がある。

- 例えば、MOX-UO2隣接体系など







- 有限差分近似を用いる場合、メッシュ分割の荒さに起因 する誤差が生じる
- □ メッシュ分割に起因する誤差は、メッシュ面積に比例する
- 新しい体系の解析を行う際は、メッシュ誤差を把握することが重要



- 拡散方程式では微分項を取り扱うため、通常の差分法では球・円柱・直方体など基本的な幾何形状のみを解析可能
- 複雑な形状の炉心を解析する場合には幾何形状の近似が必要。



M. Tatsumi, A. Yamamoto, J. Nucl. Sci. Technol., 40 376 (2003).


- 内部・外部反復計算時の収束判定条件の設定は、計算 精度および計算時間の観点から重要である。
  - 収束判定条件を厳しく(小さく)とると、得られた結果の信頼性は 高くなる。しかし、計算時間は長くなる。
  - 一方、判定条件を緩く(大きく)すると、計算時間は短くなるが、完全に収束しきった解にならず、信頼性に欠ける結果になる可能性がある。
- 一般的には、収束判定条件を一桁変更(例えば、10<sup>-4</sup>を 10<sup>-5</sup>に変更)し、計算結果に優位な差がなければその収 束判定条件は問題ないといえる。



- 反復計算を単精度(real\*4, float)で行っている場合、収束 判定基準を相対値で10<sup>-6</sup>より小さくすると収束解が得ら れない可能性がある。
  - 単精度計算では有効数字の桁数が6桁程度しかないため
  - 収束判定基準をより厳しくしたい場合には、倍精度計算が必要
- 内部・外部反復のように反復計算が多重ループになっている場合、外部のループにおける収束判定基準を内部のループのそれより厳しくしてはならない。
  - 外部反復の収束は、内部反復の収束に依存するため、最悪の
    場合には反復計算に振動現象が見られ、いつまでたっても計算
    が終了しないこととなる。

## 計算結果のチェック

- 拡散方程式の数値解法の結果をチェックするためには、 これまでに述べてきたような注意点に加えて、以下の点 に注目する必要がある。
  - 計算された実効増倍率は妥当か
  - 計算された中性子束分布の形は妥当か
  - 計算された中性子束(出力分布)に物理的でない非対称性、ゆが みなどはないか。
  - 計算体系表面からの中性子の漏れ量は妥当か
  - 収束過程で不自然な振動などは見られないか
  - 計算は収束しているか。収束回数の上限に達して計算終了して いるなどということはないか
  - 計算された炉心特性(フィードバックパラメータ)は、定数作成時に考慮した条件に包絡されているか

## 計算結果のチェック

- これまでに述べてきた観点から拡散方程式の数値計算
  結果をチェックするにはある程度の経験が必要。
- □ 経験を積むためには多様な計算を行う必要がある。





- 拡散方程式の導出
- □ 差分化
- □ 反復法
- □ フィードバック効果の取り扱い
- □ 数値計算と品質保証