

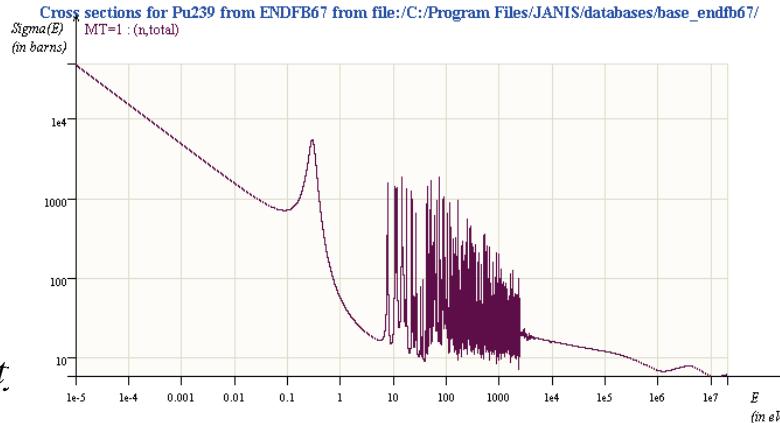
実効断面積と共鳴計算手法

参考資料:炉物理の研究第72号「共鳴計算は難しいか」

https://rpg.jaea.go.jp/else/rpd/annual_report/pdf72/No72-06.pdf

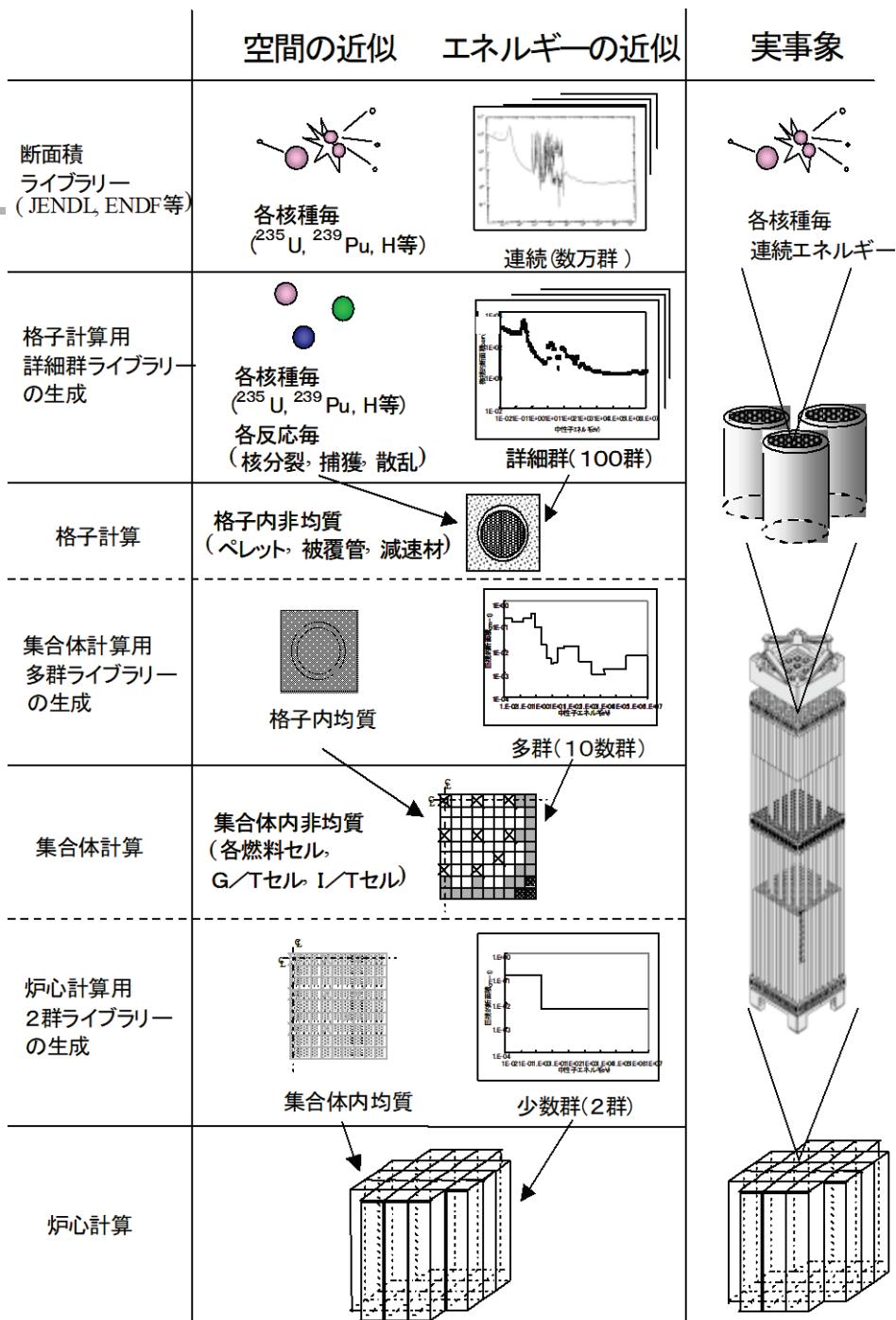
なぜ実効断面積が必要か(1)

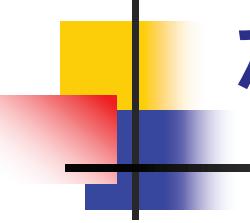
- 様々な核種の断面積は、実験(および理論計算による補間)により求められる。
- 断面積データは数万点にも及ぶエネルギー一点において与えられるのが一般的
- 炉心特性計算時に、このような断面積データのエネルギー変化を直接扱うのは非現実的(炉心体系において数万群の拡散/輸送計算が必要)



現在の炉心解析

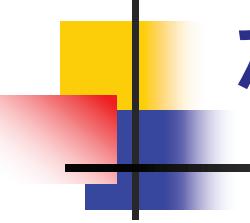
- 前述の問題を避けるため、現在の炉心解析では、空間およびエネルギーに関して近似を行っている。
- エネルギーに関しては、炉心内を飛んでいる中性子を数群(PWRでは2群、BWRでは3群)に分けて取り扱う。





なぜ実効断面積が必要か(2)

- 実験データとして与えられる断面積は数万群。一方、炉心計算では数群。この差を何とかして埋める必要がある。
- 具体的には、幾つか(多数)のエネルギー一群を平均する操作が必要となる。
- 実効断面積は、この平均操作の結果、得られるもので、現在の炉心解析で広く使用されている決定論的な方法では必ず使用される。
- しかし、イメージがつかみにくく、理論も一般的に複雑である。



なぜ実効断面積が必要か(3)

- エネルギーの平均化操作は、断面積の値が大きく、エネルギーに伴う値の変化が大きいところの取り扱いが重要である。
- 逆に、断面積のエネルギー変化が小さければ、平均化操作により、精度は悪化しない(例: 断面積が一定の場合)。
- 「断面積の値が大きく、変化が大きい」部分は共鳴であることから、実効断面積を求めるプロセスは、共鳴計算とも呼ばれる。

減速材と共に鳴核種による減速

- もっとも単純な場合として、減速材と共に鳴核種からなる均質体系の中性子スペクトルの変化を考察する。

$$\Sigma_t(E)\phi(E) = \int \Sigma_s(E')\phi(E')f(E' \rightarrow E)dE'$$

- 減速材の核種をm, 共鳴核種をrとし、弾性散乱による減速のみを考慮する。

$$\begin{aligned} & \left(N_m \sigma_{t,m}(E) + N_r \sigma_{t,r}(E) \right) \phi(E) \\ &= \int_E^{E/\alpha_m} N_m \sigma_{s,m}(E') \phi(E') \frac{1}{(1-\alpha_m)E'} dE' + \int_E^{E/\alpha_r} N_r \sigma_{s,r}(E') \phi(E') \frac{1}{(1-\alpha_r)E'} dE' \end{aligned}$$

減速材と共に鳴核種による減速

- 前ページの減速方程式を解くために、以下の仮定を行う。
 - 減速材核種については、断面積がエネルギーに依存せず、かつ全断面積=散乱断面積とする。
 - 共鳴核種の散乱断面積は一定値とする(ポテンシャル散乱断面積 $\sigma_{p,r}$)。
 - 中性子束が $1/E$ で近似できる。(これは、共鳴の幅が小さく、散乱項の積分においては、共鳴部分の中性子束のひずみを無視できるという仮定。Narrow Resonance, NR近似と呼ばれる)
- この仮定の下で減速方程式を解く。(右辺の積分は容易に行うことができる)

減速材と共に鳴核種による減速

- 中性子スペクトルは以下の式で与えられる。

$$\phi(E) = \frac{1}{E} \frac{N_m \sigma_{s,m} + N_r \sigma_{p,r}}{(N_m \sigma_{t,m} + N_r \sigma_{t,r}(E))}$$

- ここで、新たに以下のバックグラウンド断面積を定義する。これは、共鳴核種一個あたりの減速材核種の断面積になる。

$$\sigma_b = \frac{N_m}{N_r} \sigma_{s,m} = \frac{N_m}{N_r} \sigma_{t,m}$$

- バックグラウンド断面積を使用すると

$$\phi(E) = \frac{1}{E} \frac{\sigma_b + \sigma_{p,r}}{(\sigma_b + \sigma_{t,r}(E))}$$

減速材と共に鳴核種による減速

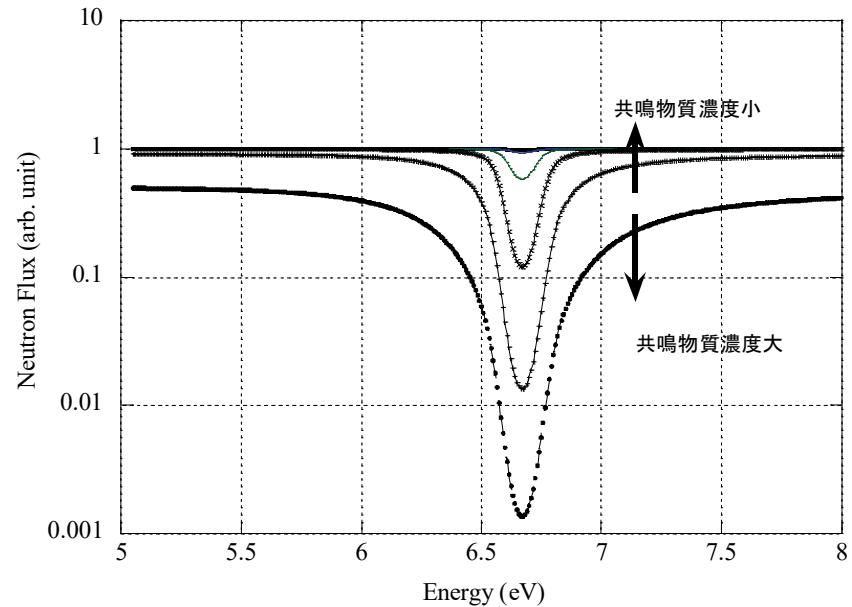
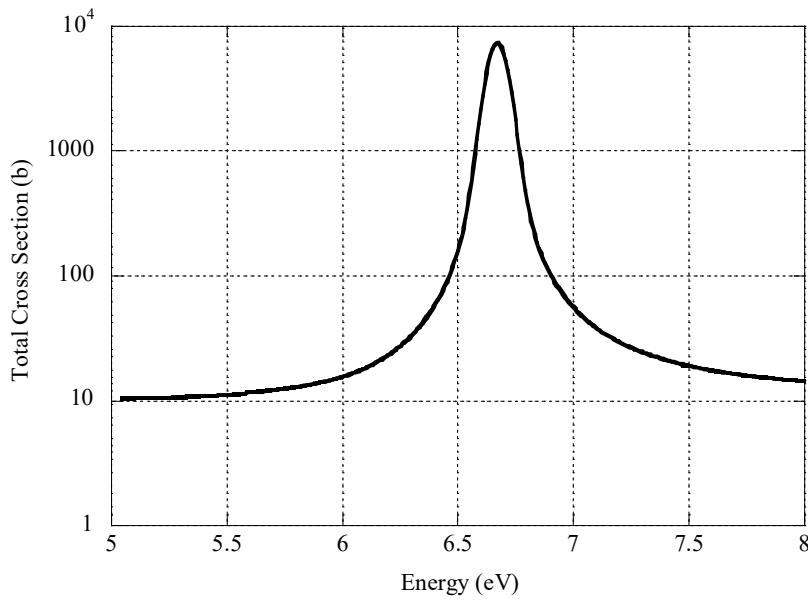
- 減速材がほとんどない場合は
 - 中性子スペクトルは共鳴物質の全断面積に反比例

$$\phi(E) = \frac{1}{E} \frac{\sigma_{p,r}}{\sigma_{t,r}(E)}$$

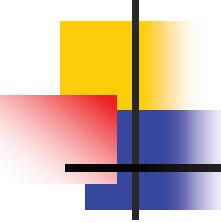
- 逆に、ほとんど吸収物質がない場合は
 - $1/E$ スペクトル
- 実際のスペクトルはこの中間的なものとなる。

減速材と共に鳴核種による減速

■ U238断面積と中性子束($\phi \times E$)



(C)宇根崎博信、「実効断面積計算手法の基礎」、第36回炉物理夏期セミナーテキスト



エネルギー区間内の平均断面積

- 注目しているエネルギー区間における「平均的な」断面積を求める考えを考へる。
- どのようにすれば、「妥当な」平均断面積が求められるのか？
- 基本的には、反応率を保存するように平均断面積を求める必要がある。つまり

$$\int_{E_g}^{E_{g-1}} \sigma(E) \phi(E) dE$$

を保存するように平均断面積を求める。

エネルギー区間内の平均断面積

- すなわち、

$$\bar{\sigma} \int_{E_g}^{E_{g-1}} \phi(E) dE = \int_{E_g}^{E_{g-1}} \sigma(E) \phi(E) dE$$

$$\bar{\sigma} = \frac{\int_{E_g}^{E_{g-1}} \sigma(E) \phi(E) dE}{\int_{E_g}^{E_{g-1}} \phi(E) dE}$$

- これより、エネルギー区間で平均した断面積は、その区間内の中性子スペクトルに依存することがわかる。したがって、元の(平均前の)断面積が変化しなくとも、中性子スペクトルが変化することにより、実効断面積は変わる。

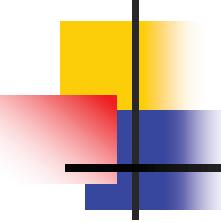
エネルギー区間内の平均断面積

- 減速材+共鳴物質に対する中性子スペクトルは

$$\phi(E) = \frac{1}{E} \frac{\sigma_b + \sigma_{p,r}}{(\sigma_b + \sigma_{t,r}(E))}$$

- スペクトルがバックグラウンド断面積 σ_b に依存している。より具体的には、共鳴における中性子束のひずみが N_m/N_r に依存している。

$$\sigma_b = \frac{N_m}{N_r} \sigma_{s,m} = \frac{N_m}{N_r} \sigma_{t,m}$$

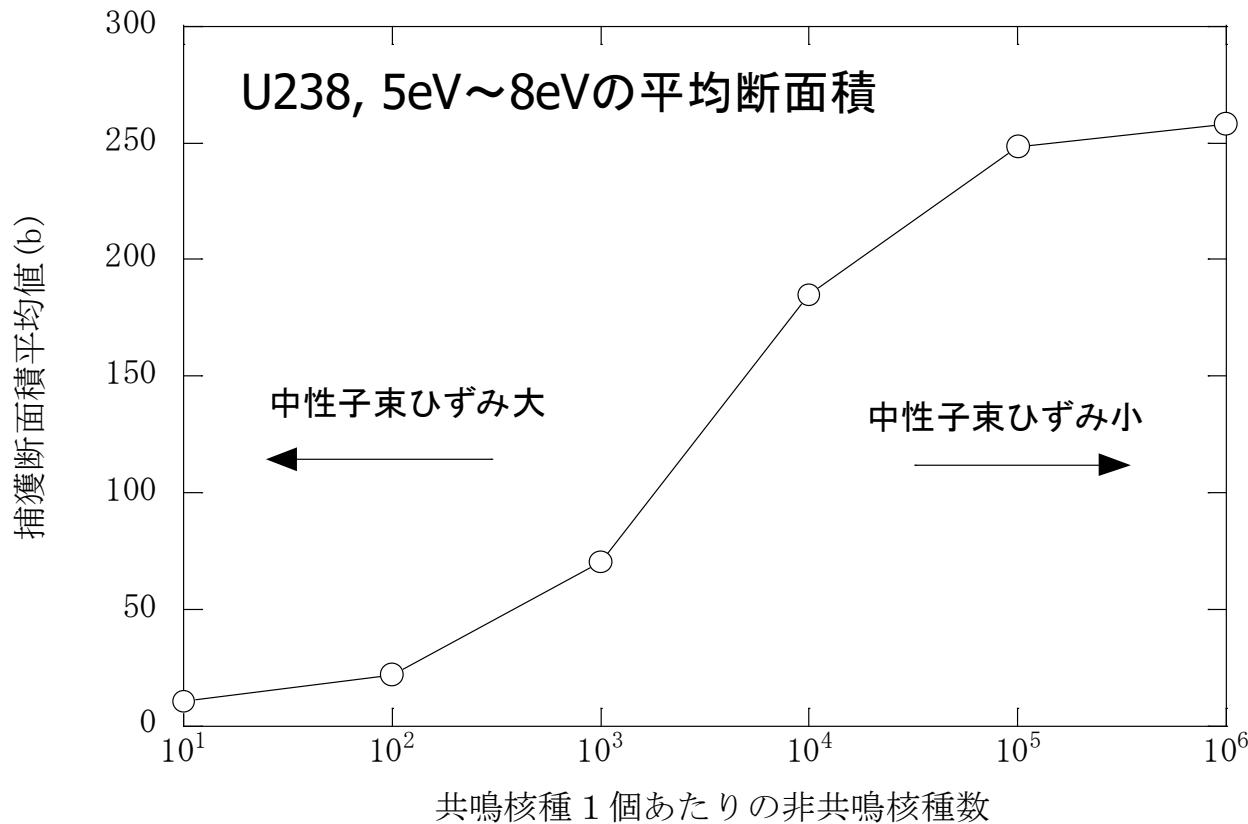


エネルギー区間内の平均断面積

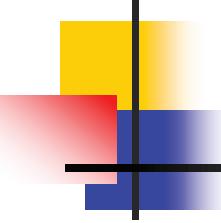
- 中性子束のひずみが大きいほど(バックグラウンド断面積が小さいほど、もしくは N_m/N_r が小さいほど)、平均断面積は小さくなる。逆に中性子束のひずみが小さいほど(バックグラウンド断面積が大きいほど、もしくは N_m/N_r が大きいほど)、平均断面積は大きくなる。
- この現象を自己遮蔽効果とよび、得られた平均断面積を「反応率を実効的に再現する断面積」という意味から、実効断面積と呼ぶ。
- 実効断面積はバックグラウンド断面積に依存することとなる。

エネルギー区間内の平均断面積

■ バックグラウンド断面積と実効断面積の関係

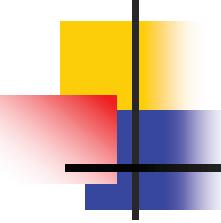


(C)宇根崎博信、「実効断面積計算手法の基礎」、第36回炉物理夏期セミナーテキスト



エネルギー区間内の平均断面積

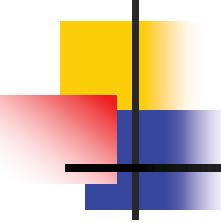
- バックグラウンド断面積が非常に大きい場合、中性子束にひずみは生じない→バックグラウンド断面積が大きくなると、実効断面積はある一定値に収束する。この値を無限希釈断面積と呼ぶ。
(バックグラウンド断面積が大きい→吸収物質が非常に薄い→無限に希釈されている)
- 実効断面積は、一般に無限希釈断面積より小さい。実効断面積と無限希釈断面積の比を自己遮蔽因子(f 因子、ボンダレンコ因子)と呼ぶ。



エネルギー区間内の平均断面積

■ ここまでまとめ

- あるエネルギー区間の平均断面積を求めるためには、中性子スペクトルを重みとして平均する。(反応率を保存する)
- 中性子スペクトルは、共鳴物質と減速材の密度(一般的には物質の組成)に依存する。従って、実効断面積は、物質の組成に依存して変化する。
- 実効断面積の計算に際しては、物質の組成の効果をバックグラウンド断面積により考慮する。



空間に依存する平均断面積

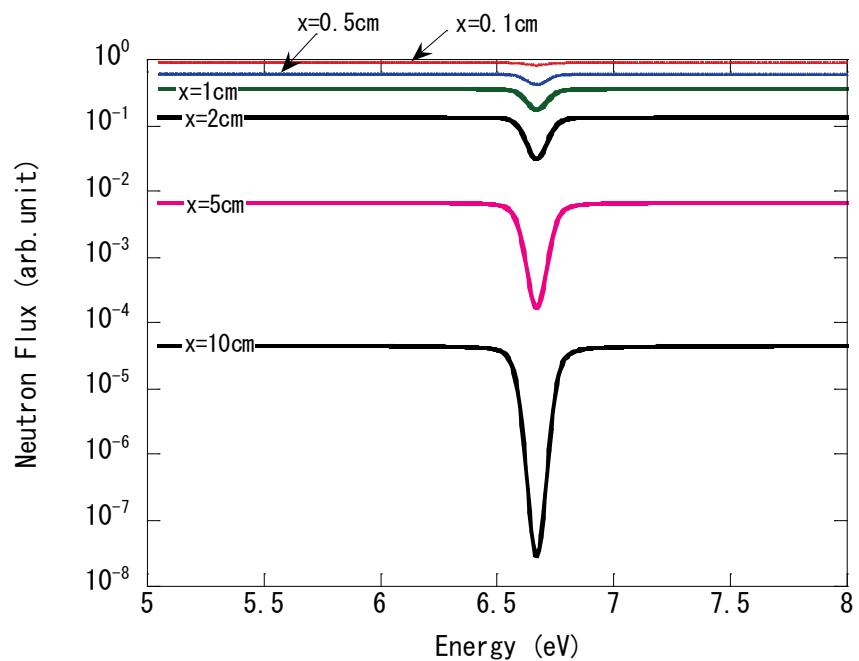
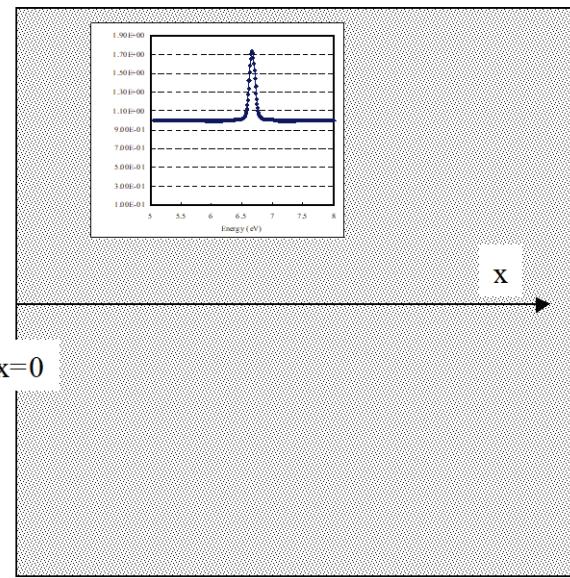
- ここまで無限均質体系における平均(実効)断面積について評価を行ってきた。
- 次に、中性子束が空間的に変化する場合を考察する。
- 一例として、U238と非共鳴物質の混合媒質に中性子が入射する場合を考える。(中性子は5eV～8eVで一様なエネルギー分布を持っている)
- 入射した中性子は以下の式に従って減衰

$$\phi(x, E) = \exp[-\Sigma_t(E)x]$$

空間に依存する平均断面積

■ 計算結果

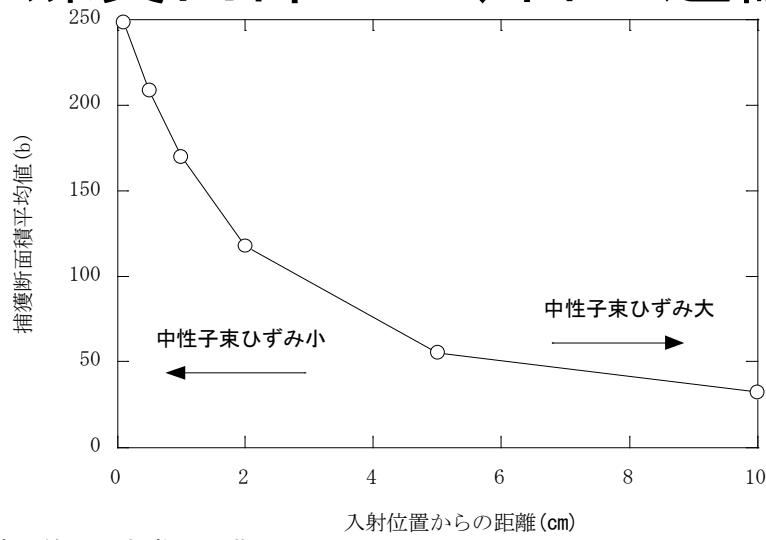
中性子束入射



(C)宇根崎博信、「実効断面積計算手法の基礎」、第36回炉物理夏期セミナーテキスト

空間に依存する平均断面積

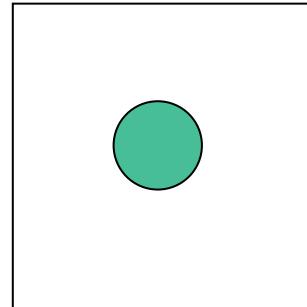
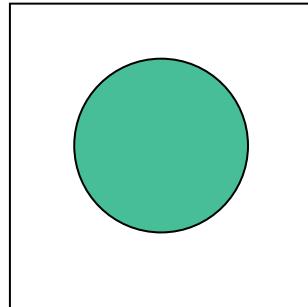
- 媒質の中に入るに従い、共鳴のピーク位置での中性子の落ち込みが大きくなる。
- この結果、このエネルギー範囲(5eV～8eV)における平均(実効)断面積は、位置に依存して変化する→媒質内部ほど、自己遮蔽効果が大きくなる。



(C)宇根崎博信、「実効断面積計算手法の基礎」、第36回炉物理夏期セミナーテキスト

空間に依存する平均断面積

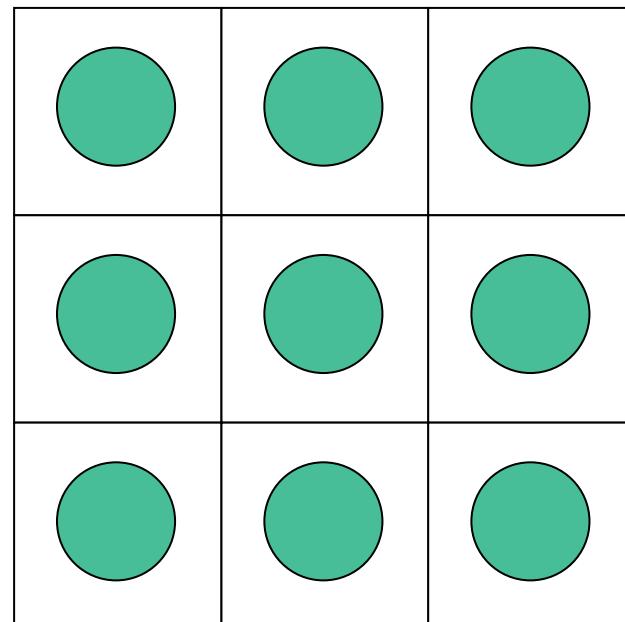
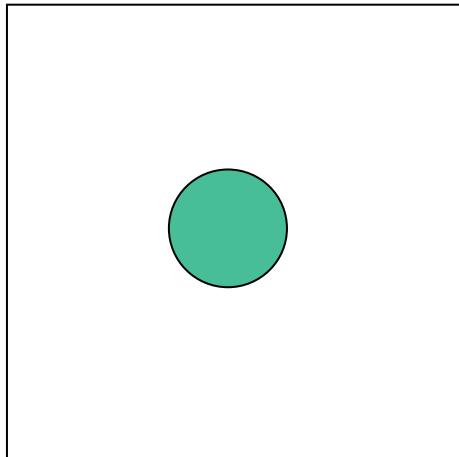
- このような状況は、原子炉における燃料ピン内部でも発生している。

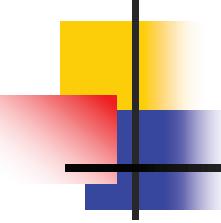


- 燃料ピン内を平均して考えると、共鳴ピーク位置での中性子束のひずみは、燃料領域にともなって大きくなる→燃料領域が大きいほど、自己遮蔽が大きくなる。

空間に依存する平均断面積

- 孤立した燃料ピンと格子状に配列された燃料ピンの自己遮蔽を比べると、格子状に配列された燃料ピンの方が自己遮蔽が大きくなる。
- また、ピン間の減速材の有無(密度)にも依存する。





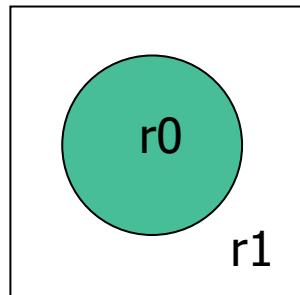
空間に依存する平均断面積

■ これまでのまとめ

- 平均(実効)断面積は空間位置に依存する
- 平均(実効)断面積は燃料の大きさに依存する
- 平均(実効)断面積は燃料の配列方法に依存する
- 平均(実効)断面積は燃料間の減速材の密度に依存する

燃料-減速材2領域非均質体系での減速

- ここでは、実際の原子炉の構造である燃料-減速材の二領域からなる非均質な体系についての減速を考察する。
- ここでの考察は、非均質体系における実効断面積計算の基礎となる。
- 以下では下図のような燃料領域(0)および減速材領域(1)からなる体系を考察する。



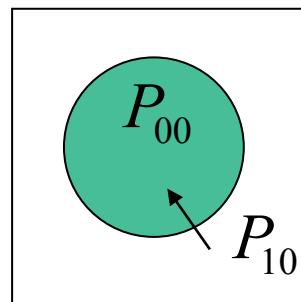
燃料-減速材2領域非均質体系での減速

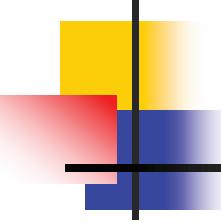
- 燃料領域内の中性子束は、燃料-減速材間の衝突確率を利用して以下のように書くことができる。

$$V_0 \Sigma_{t,0}(E) \phi_0(E) =$$

$$V_0 P_{00}(E) \int \Sigma_{S,0}(E') \phi_0(E') f_0(E' \rightarrow E) dE'$$

$$+ V_1 P_{10}(E) \int \Sigma_{S,1}(E') \phi_1(E') f_1(E' \rightarrow E) dE'$$





燃料-減速材2領域非均質体系での減速

- 以下の仮定を用いる。
 - 減速材領域の断面積は一定で、全断面積=散乱断面積
 - 減速は弾性散乱による
 - 減速項内の中性子束は $1/E$ で近似する。(NR近似)
 - 燃料領域の散乱断面積はエネルギーによらず一定
- また、以下の相反定理を用いる
 - 領域0から1へ移動する際の減衰と領域1から0へ移動する際の減衰が等しいという条件

$$V_1 \Sigma_{t,1}(E) P_{10}(E) = V_0 \Sigma_{t,0}(E) P_{01}(E)$$

燃料-減速材2領域非均質体系での減速

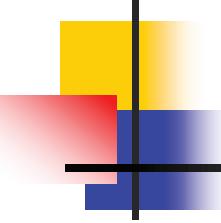
- その結果、以下のようになる。

$$V_0 \Sigma_{t,0}(E) \phi_0(E) = \left(P_{00}(E) V_0 \Sigma_{S,0} + (1 - P_{00}(E)) V_0 \Sigma_{t,0}(E) \right) \frac{1}{E}$$

- ここで、以下の関係を使用している。

$$P_{01}(E) = 1 - P_{00}(E)$$

- 以上の結果から、 P_{00} (燃料内の衝突確率)が計算できれば、燃料領域内の中性子スペクトルが計算できることとなる。
- しかし、一般的に P_{00} は燃料形状や組成に依存する量であり、正確に求めるためには数値計算が必要。解析的に求めることは困難。ではどうするか



燃料-減速材2領域非均質体系での減速

- Wignerは、 $P_{00}(E)$ を以下の有理関数で近似することを提案した(Wignerの有理式近似)。

$$P_{00}(E) = \frac{l\Sigma_{t,0}(E)}{l\Sigma_{t,0}(E) + 1}$$

- ここでは燃料領域の平均弦長で以下の式で求められる。

$$l = \frac{4V_0}{S_0}$$

燃料-減速材2領域非均質体系での減速

- 燃料領域が大きい場合は大きくなり、結果として $P_{00}(E)$ は 1 に、逆に燃料領域が小さい場合、 β は小さくなり、結果として $P_{00}(E)$ は 0 に近づく。
- これは、定性的な傾向にあっている。
- Wigner の有理式近似は以下のように書くこともできる。ここで $\Sigma_e (= 1/\beta)$ は脱出断面積と呼ばれる仮想的な断面積である。

$$P_{00}(E) = \frac{\Sigma_{t,0}(E)}{\Sigma_{t,0}(E) + \Sigma_e}$$

燃料-減速材2領域非均質体系での減速

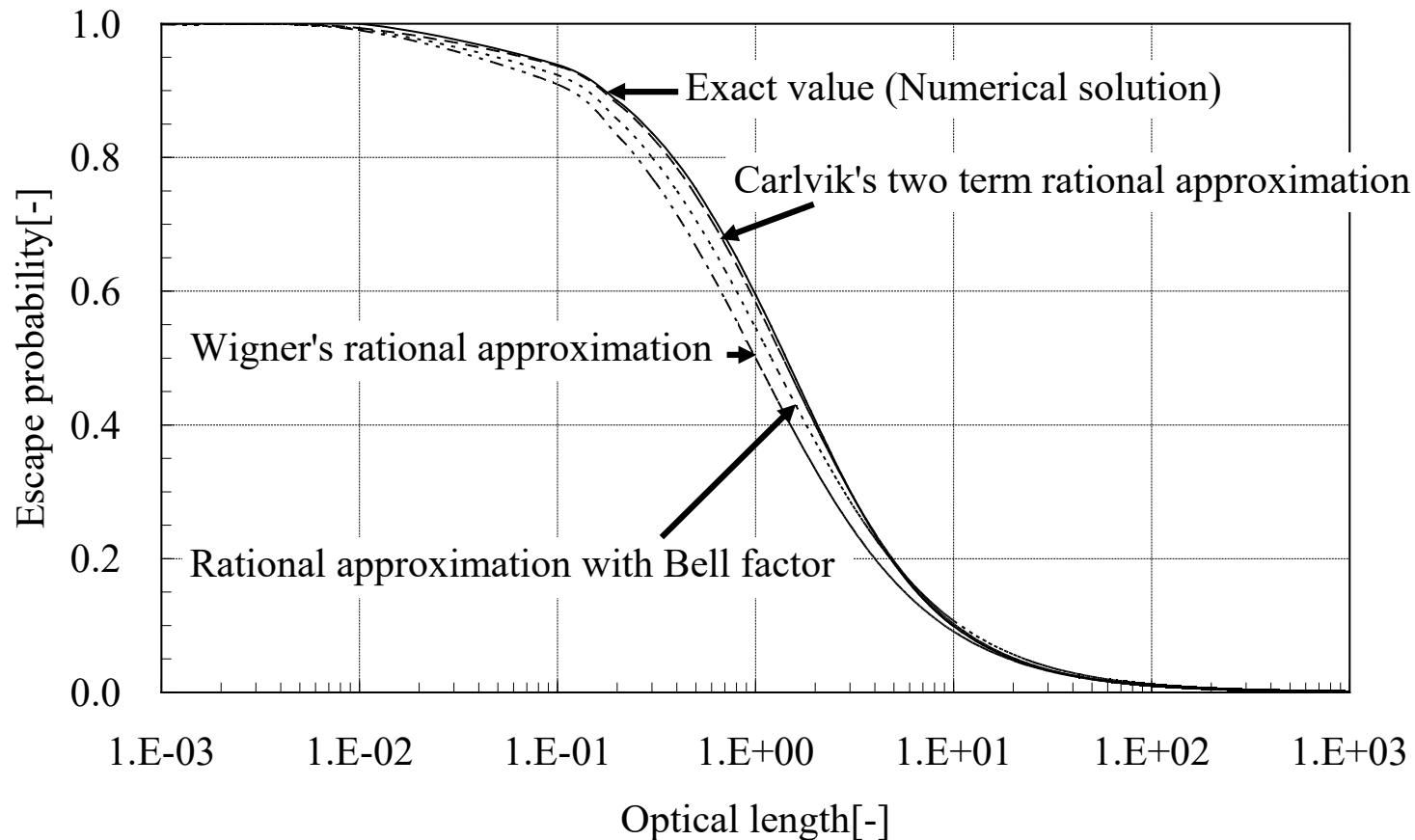
- 燃料領域における中性子スペクトルの計算精度はWignerの有理式近似の精度に大きく依存する。
- 軽水炉(ピン状燃料)においては、Wignerの有理式近似そのものではなく、その改良版が用いられている。
 - Wignerの有理式近似+Bell(もしくはLevine)因子

$$P_{00}(E) = \frac{\Sigma_{t,0}(E)}{\Sigma_{t,0}(E) + a\Sigma_e}$$

- Carlvikの二項有理式近似

$$P_{00}(E) = \frac{b_1\Sigma_{t,0}(E)}{\Sigma_{t,0}(E) + a_1\Sigma_e} + \frac{b_2\Sigma_{t,0}(E)}{\Sigma_{t,0}(E) + a_2\Sigma_e}$$

脱出確率の精度



D. G. Cacuci ed., *Handbook of Nuclear Engineering, Chap.9, Lattice Physics Computations*, Springer, 2010, ISBN:978-0387981307.

燃料-減速材2領域非均質体系での減速

- $P_{00}(E)$ に有理式近似(Bell因子)を適用すると

$$V_0 \Sigma_{t,0}(E) \phi_0(E) = \left(\frac{\Sigma_{s,0} + a \Sigma_e}{\Sigma_{t,0}(E) + a \Sigma_e} V_0 \Sigma_{t,0}(E) \right) \frac{1}{E}$$

- 以下のようになる

$$\phi_0(E) = \left(\frac{\Sigma_{s,0} + a \Sigma_e}{\Sigma_{t,0}(E) + a \Sigma_e} \right) \frac{1}{E}$$

- 均質体系の場合と同じように考えると

$$\Sigma_{t,0}(E) = N_r \sigma_{t,r}(E) + N_m \sigma_{t,m} = N_r (\sigma_{t,r}(E) + \sigma_b)$$

$$\Sigma_{s,0} = N_r \sigma_{p,r} + N_m \sigma_{t,m} = N_r (\sigma_{p,r} + \sigma_b)$$

燃料-減速材2領域非均質体系での減速

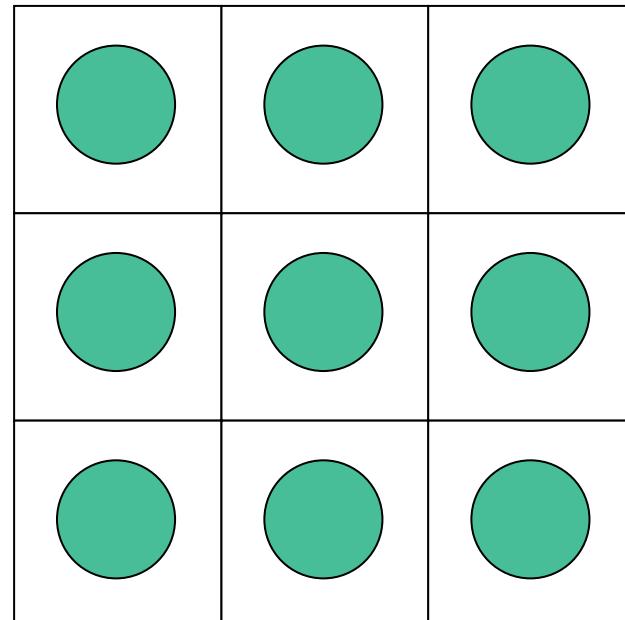
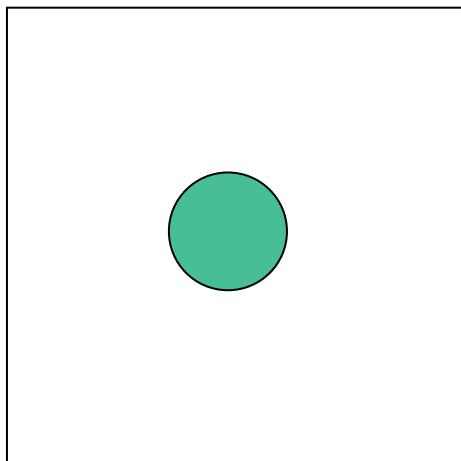
- $P_{00}(E)$ に改良有理式近似(Bell因子)を適用すると

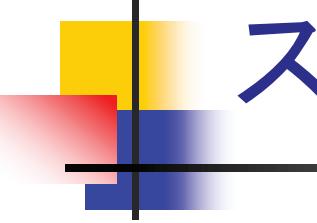
$$\phi_0(E) = \left(\frac{\sigma_{p,r} + \sigma_b + a\Sigma_e / N_r}{\sigma_{t,r}(E) + \sigma_b + a\Sigma_e / N_r} \right) \frac{1}{E}$$

- 上式の形は、均質体系におけるものと類似している。(→等価原理) 逆に言うと、均質体系の中性子スペクトルと式の形が類似になるように有理式近似を導入している。

スペクトルに対する格子の影響

- 実際の原子炉では、燃料棒は格子状に配列されている。この結果、孤立系とは中性子スペクトルが異なっている。
- この効果を考慮するため、 $P_{00}(E)$ を補正する。



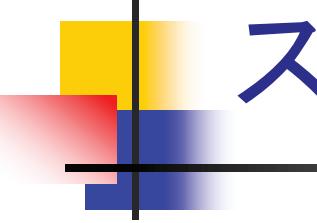


スペクトルに対する格子の影響

- 補正された $P_{00}(E)$ はWignerの有理式近似の場合、以下のようになる。ここで、CはDancoff係数と呼ばれる。孤立系に対してはDancoff係数は0である。(完全に燃料が詰まった体系では1)

$$P_{00}(E) = \frac{\Sigma_{t,0}(E)}{\Sigma_{t,0}(E) + (1 - C)\Sigma_e}$$

- Dancoff係数の物理的な意味は
 - 燃料から脱出した中性子が次の衝突を燃料で行う確率
 - 従って、この確率だけ脱出断面積を減らす。



スペクトルに対する格子の影響

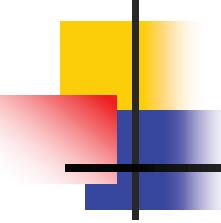
- Bell因子を含む改良有理式近似に対しては

$$P_{00}(E) = \frac{\Sigma_{t,0}(E)}{\Sigma_{t,0}(E) + \frac{(1-C)}{1-C+aC} a\Sigma_e}$$

- となり、中性子束は

$$\phi_0(E) = \left(\frac{\sigma_{p,r} + \sigma_b + \frac{1-C}{1-C+aC} a\Sigma_e / N_r}{\sigma_{t,r}(E) + \sigma_b + \frac{1-C}{1-C+aC} a\Sigma_e / N_r} \right) \frac{1}{E}$$

- SRACでは、上式が用いられている。



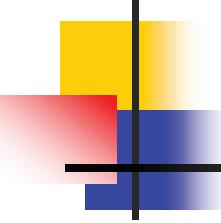
均質系と非均質系の等価性

- 孤立した燃料ピンに対する中性子束

$$\phi_0(E) = \frac{1}{E} \left(\frac{\sigma_{p,r} + \sigma_b + a\Sigma_e / N_r}{\sigma_{t,r}(E) + \sigma_b + a\Sigma_e / N_r} \right)$$

- 均質体系における中性子束

$$\phi(E) = \frac{1}{E} \frac{\sigma_{p,r} + \sigma_b}{(\sigma_{t,r}(E) + \sigma_b)}$$

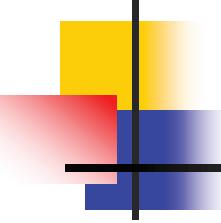


均質系と非均質系の等価原理

- 非均質系と均質系、両者の違いは

$$\sigma_b \Leftrightarrow \sigma_b + a \Sigma_e / N_r$$

- つまり、バックグラウンド断面積の定義を変更するだけで非均質系・均質系どちらの中性子束も表すことができる。これを等価原理と呼ぶ
- 同じ組成を持つ場合、非均質系では、均質系よりバックグラウンド断面積が大きくなる。非均質系では、減速材領域からの中性子の入射のため、非共鳴物質(減速材)が増えるのと同じ効果があることによる。

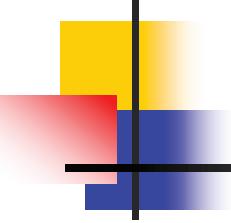


均質系と非均質系の等価原理

- 孤立系と格子系を比較すると

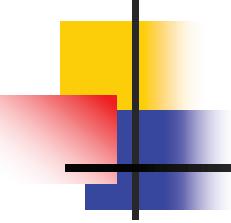
$$\sigma_b + a\Sigma_e / N_r \Leftrightarrow \sigma_b + \frac{1-C}{1-C+aC} a\Sigma_e / N_r$$

- 格子系の方がバックグラウンド断面積が小さくなる。これは、他の燃料棒により、減速材からの中性子の入射がある程度遮られるためである。



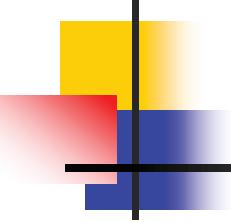
等価原理の重要性

- 実効断面積は、燃料ピンの組成、減速材密度、燃料棒半径・ピッチなど多数のパラメータに依存する。
- そのため、何の工夫もなければ、実効断面積は、これらのパラメータに応じてあらかじめ作成しておく必要がある。
- しかし、等価原理を使用することにより、均質体系における実効断面積のテーブルを用意しておけば、全ての非均質体系の実効断面積を算出することが可能となる。



等価原理の重要性

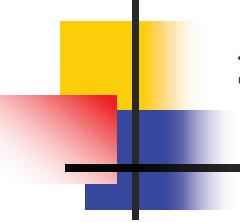
- 実際、現在の主要な格子計算コードでは、均質体系において、実効断面積をバックグラウンド断面積の関数としてテーブル化したものを「断面積ライブラリ」として用いている。
- そして、均質体系で計算された「断面積ライブラリ」から全ての非均質体系の実効断面積を(等価原理により)計算している。
- これは、「幾何形状」を「燃料組成」という別の概念に置き換えることで可能となったものである。(そしてこれがわかりにくい点でもある)



等価原理の危険性

- 等価原理はこのように非常に有用なものであるが、
 - 燃料領域内の衝突確率
 - 燃料・減速材の減速

などについて近似を用いていることから、もともとかなりの誤差を内包していると考えた方がよい。



等価原理を用いた実効断面積計算手順

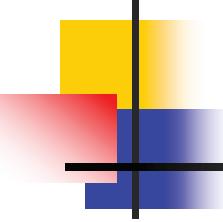
- バックグラウンド断面積の関数として実効断面積を準備する(NJOYコード)
- ペレットを無限均質体系と考えたときのバックグラウンド断面積を計算する

$$\sigma_b = \frac{\sum_{k \neq r} N_k \sigma_{p,k}}{N_r}$$

- Dancoff係数を評価する(主として衝突確率法から計算を行う。単純な体系については、解析的な式が与えられている場合もある)

等価原理を用いた実効断面積計算手順

- ペレットの平均弦長を計算する。円筒の場合
$$l = 2r, r : \text{radius(cm)}$$
- 以下の式で非均質系のバックグラウンド断面積を計算する
$$\sigma_b + \frac{1-C}{1-C+aC} a \Sigma_e / N_r$$
$$\Sigma_e = 1/l$$
$$a = 1.2 \sim 1.4$$
- バックグラウンド断面積-実効断面積の表(各データライブラリ)から内挿する。
- 各共鳴核種について上記の手順を繰り返す。



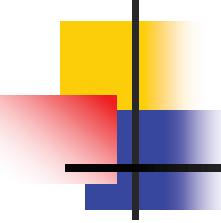
NR, WR, IR近似

- 減速項の計算の際、中性子スペクトルを $1/E$ と仮定した。これがNR近似である。

$$\int_E^{E/\alpha} \Sigma_S(E') \phi(E') \frac{1}{(1-\alpha)E'} dE' = \Sigma_p \int_E^{E/\alpha} \frac{1}{E'} \frac{1}{(1-\alpha)E'} dE' = \frac{\Sigma_p}{E}$$

- Wide Resonance(WR)近似では、共鳴の幅が広く、積分範囲の散乱断面積と中性子束はエネルギー E における値と等しいとする。

$$\begin{aligned} \int_E^{E/\alpha} \Sigma_S(E') \phi(E') \frac{1}{(1-\alpha)E'} dE' &= \Sigma_S(E) \phi(E) \int_E^{E/\alpha} \frac{1}{(1-\alpha)E'} dE' \\ &= \Sigma_S(E) \phi(E) \end{aligned}$$

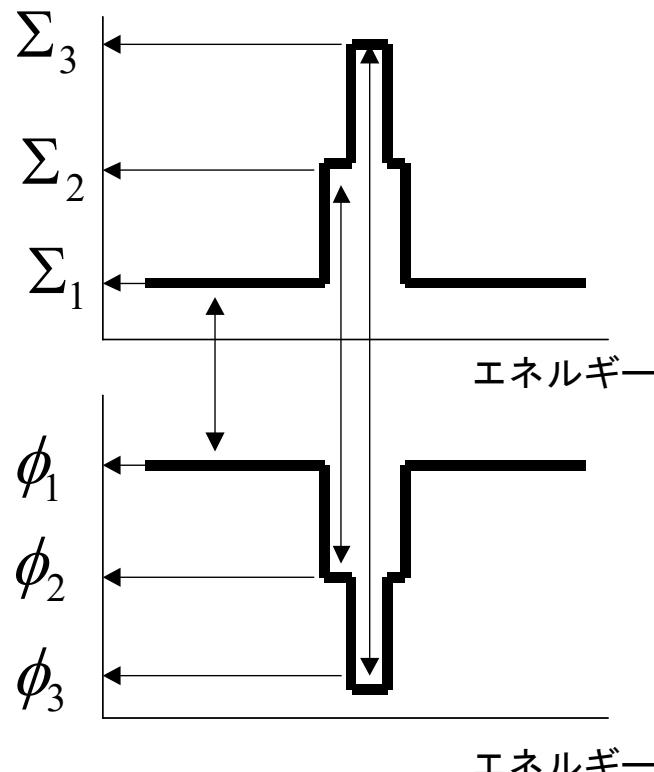
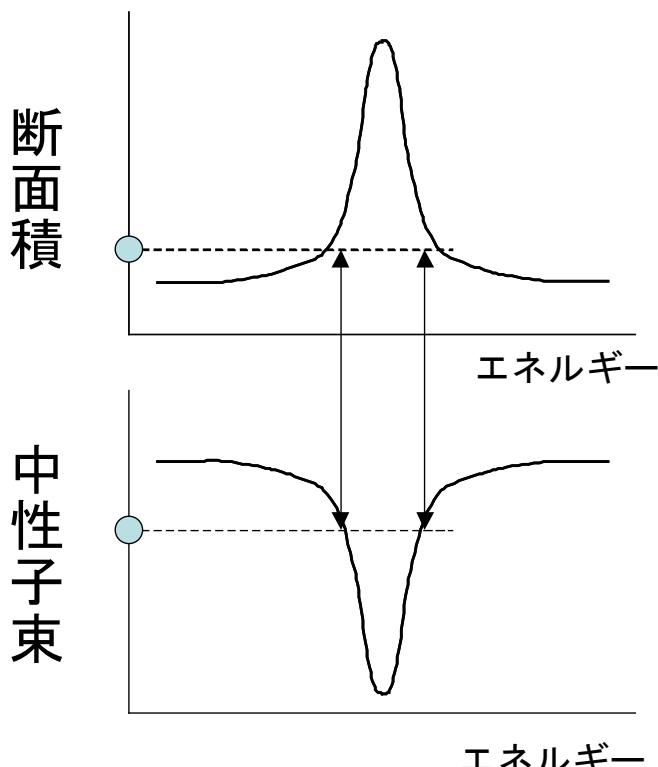


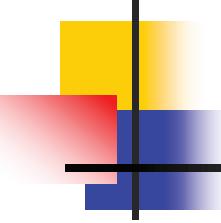
NR, WR, IR近似

- NR, WR近似は共鳴の幅を「非常に狭い」、「非常に広い」とした(両極端な)近似である。
- これに対し、IR近似は、内挿パラメータ λ を導入し、NRとWR近似の内挿で実効断面積を求めることで計算精度を向上させるものである。
- 内挿パラメータ λ は、数値計算により、等価原理の実効断面積が超多群計算の結果を再現するように決められる。

サブグループ法

- 共鳴部分の断面積と中性子束を以下の様にグループ分けする。





サブグループ法

- さらに、注目するエネルギー群内の中性子束や反応率の積分値を以下のように求める。

$$\int \phi(E) dE = \sum_i w_i \phi(\Sigma_{t,i})$$

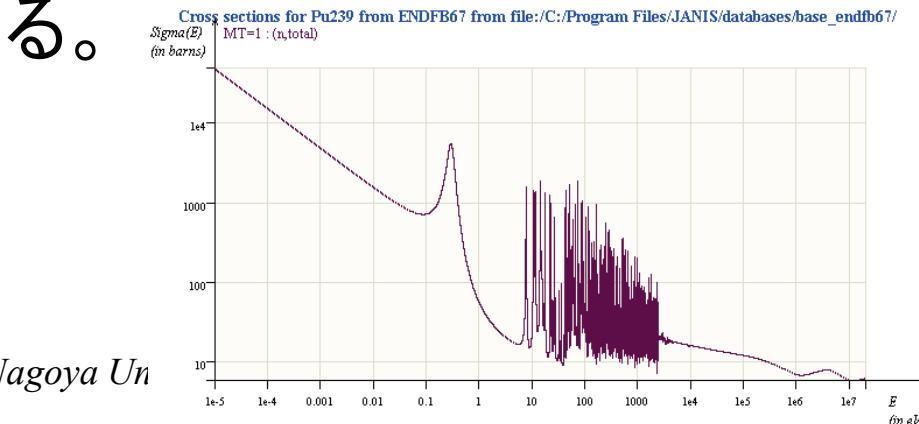
$$\int \Sigma_t(E) \phi(E) dE = \sum_i w_i \Sigma_{t,i} \phi(\Sigma_{t,i})$$

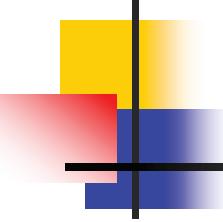
- 実効断面積は

$$\Sigma_t = \frac{\sum_i w_i \Sigma_{t,i} \phi(\Sigma_{t,i})}{\sum_i w_i \phi(\Sigma_{t,i})}$$

サブグループ法

- サブグループ法は、中性子束や反応率の積分をエネルギーではなく断面積で離散化する方式。
- 中性子束のエネルギー依存性に比べ、中性子束の断面積依存性ははるかにスムース。(基本的には、中性子束は $1/E/\Sigma_t$ の関数)
- 従って、断面積で離散化することにより、遙かに少ない分割数で計算精度を向上することができる。





まとめ

- 実効断面積の計算手法
 - 均質体系における中性子スペクトル
 - 均質体系における実効断面積の計算方法
 - 非均質体系における中性子スペクトル
 - 非均質体系と均質体系の等価原理
 - 非均質体系における実効断面積の計算方法
 - NR, WR, IR近似
 - サブグループ法