



中性子減速理論と超多群計算

- ・減速理論の基礎
- ・超多群計算の基礎

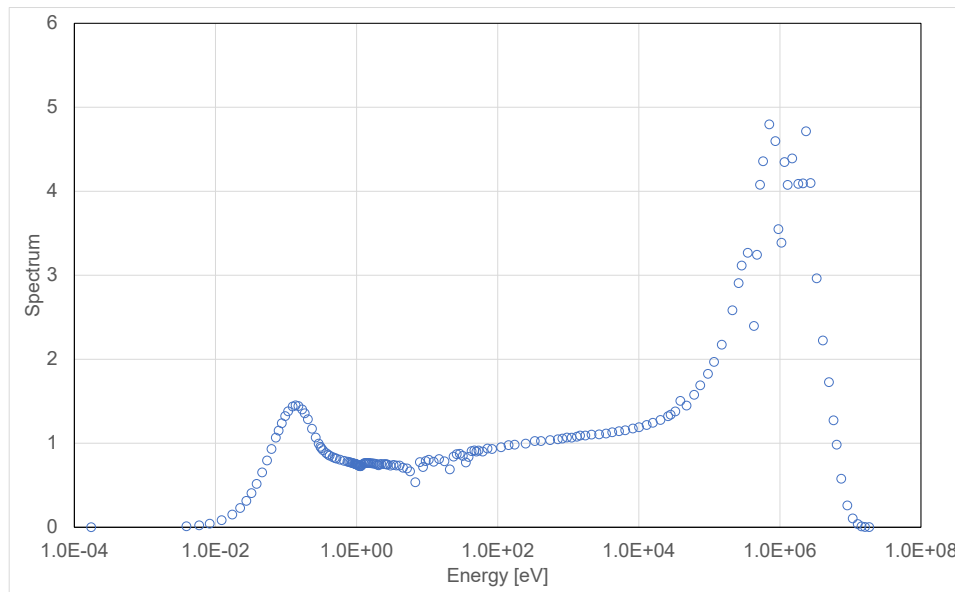


減速方程式を学ぶ必要性

- 原子炉内の中性子のエネルギースペクトル形成の基礎
- 実効断面積計算(共鳴計算)の基礎

熱中性子炉における中性子のエネルギー

- 核分裂による発生： $\sim 2\text{MeV}$
- 散乱による減速： 10^{-4}eV 程度まで
- 原子炉を構成する分子の熱運動による上方散乱： 1eV 以下程度で顕著となる

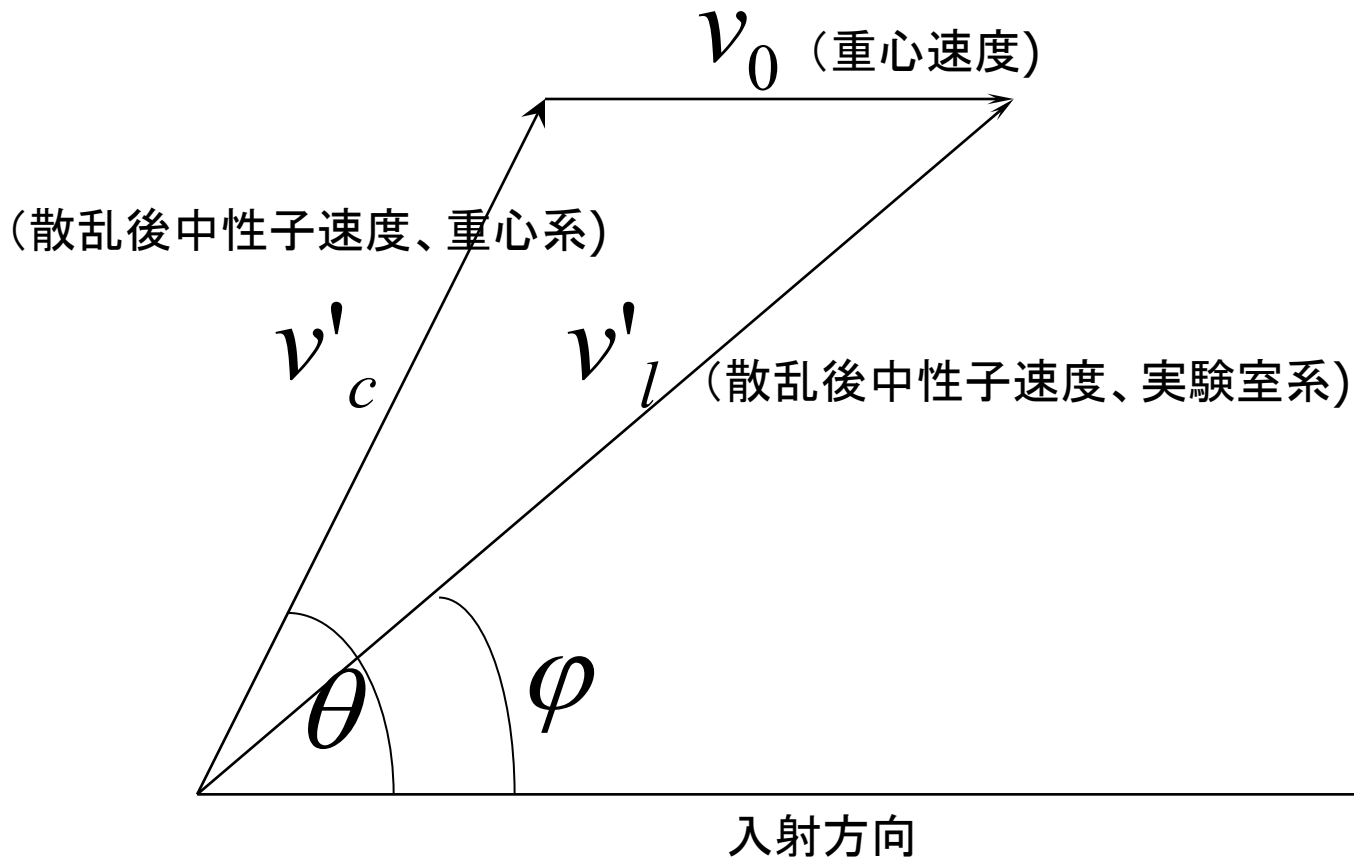




弾性散乱と非弾性散乱

- 非弾性散乱: 中性子が原子核と衝突し、一旦複合核を形成。その後、入射した中性子と(一般的に)別の中性子が複合核から放出される。エネルギーの一部は、原子核の励起に使用される(励起エネルギーは離散的)。重核で重要。100keV~1MeV以上の高エネルギー領域で重要。
- 弾性散乱: 中性子が原子核と衝突し、そのまま散乱される。全エネルギー領域で重要。力学の二体衝突問題と同じ扱いが可能。中性子の共鳴領域(数keV~1eV程度)で主要な減速の要因。
- 中性子減速理論では弾性散乱を主として取扱う。

弾性散乱におけるエネルギー損失



弾性散乱におけるエネルギー損失

- 余弦定理から

$$\begin{aligned}(v'_l)^2 &= v_c^2 + v_0^2 - 2v_c v_0 \cos(\pi - \theta) \\ &= v_c^2 + v_0^2 + 2v_c v_0 \cos \theta \\ (\because \text{重心系では } v'_c &= v_c)\end{aligned}$$

- 重心の位置を微分することにより(Lamarsh, 原子炉の初等理論, p.35)

$$v_c = \frac{Av_l}{A+1}$$

$$v_0 = \frac{v_l}{A+1}$$

弾性散乱におけるエネルギー損失

- これより

$$(v'_l)^2 = \left(\frac{Av_l}{A+1} \right)^2 + \left(\frac{v_l}{A+1} \right)^2 + 2 \frac{Av_l^2}{(A+1)^2} \cos \theta$$

$$(v'_l)^2 = \frac{v_l^2 (A^2 + 2A \cos \theta + 1)}{(A+1)^2}$$

- 運動エネルギーを使って上式を書き直す

$$E_l = \frac{1}{2} m v_l^2, E'_l = \frac{1}{2} m v_l'^2$$

弾性散乱におけるエネルギー損失

- 衝突前後のエネルギーの変化は

$$E'_l = E_l \left[\frac{A^2 + 2A \cos \theta + 1}{(A+1)^2} \right]$$

- 以下のパラメータを使用し、若干の変形をする

$$\alpha = \left(\frac{A-1}{A+1} \right)^2, 0 \leq \alpha \leq 1$$

$$\frac{1}{2}(1 + \alpha) = \frac{A^2 + 1}{(A+1)^2}, \quad \frac{1}{2}(1 - \alpha) = \frac{2A}{(A+1)^2}$$

弾性散乱におけるエネルギー損失

- 以下の形となる

$$E'_l = \frac{1}{2} E_l [(1 + \alpha) + (1 - \alpha) \cos \theta]$$

- これより、散乱後の中性子エネルギー変化は

- 最大値

$$(E'_l)_{\max} = E_l, (\theta = 0)$$

- 最小値

$$(E'_l)_{\min} = \alpha E_l, (\theta = \pi)$$

弾性散乱におけるエネルギー損失

- これまでの導出で得られる重要な結論：弾性衝突後の中性子エネルギーの最小値は、パラメータ a によって決まる。また、このパラメータ a は、原子核の質量(amu)のみに依存する。

- 典型的な核種の a 値

水素 ($A=1$)	:0
重水素 ($A=2$)	:0.111
炭素 ($A=12$)	:0.716
酸素 ($A=16$)	:0.779
U238 ($A=238$)	:0.983

弾性散乱後のエネルギー分布

- 弾性散乱後の中性子のエネルギー分布は $E \sim \alpha E$ の間に入る。
- では、そのエネルギー範囲で、どのような分布になっているのか？
- 以下の式が出発点(以下の導出では、エネルギーは全て実験室系、角度は重心系)

$$E' = \frac{1}{2} E [(1 + \alpha) + (1 - \alpha) \cos \theta]$$



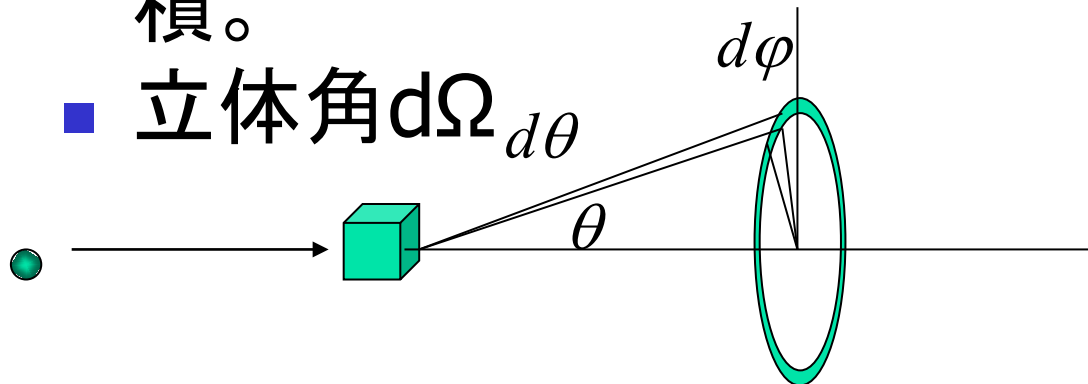
弾性散乱後のエネルギー分布

- エネルギーの確率分布関数を $P(E \rightarrow E')$ とする。散乱されて $E' \sim E' + dE$ のエネルギー範囲に入る中性子は角度 θ から $\theta + d\theta$ の方向に散乱された中性子。この範囲に中性子が散乱される確率を微分断面積 $\sigma_s(\theta)$ を使って求める。

弾性散乱後のエネルギー分布

- 微分断面積は、入射粒子の進行方向に対し放出粒子が角度 θ の方向に現れる断面積。

- 立体角 $d\Omega$ $d\theta$



$$d\Omega = 1 \times d\theta \times 1 \times \sin \theta \times d\phi = \sin \theta d\theta d\phi$$

- θ から $\theta+d\theta$ 、 $0 \leq \phi \leq 2\pi$ に入る確率

$$P(E \rightarrow E')(-dE') = \int_0^{2\pi} \int_0^{d\theta} \sigma_s(\theta) \sin \theta d\theta d\phi / \int_{4\pi} \sigma_s(\theta) d\Omega$$

$$= 2\pi \sigma_s(\theta) \sin \theta d\theta / \sigma_s$$

$$\sigma_s \equiv \int_{4\pi} \sigma_s(\theta) d\Omega$$

弾性散乱後のエネルギー分布

- 以下の式を θ で微分する

$$E' = \frac{1}{2} E [(1 + \alpha) + (1 - \alpha) \cos \theta]$$

- これより

$$dE' = -\frac{1}{2} E (1 - \alpha) \sin \theta d\theta$$

- 前ページの式と組み合わせると

$$P(E \rightarrow E') = \frac{4\pi\sigma_s(\theta)}{E(1 - \alpha)\sigma_s}$$

弾性散乱後のエネルギー分布

- 以上の結果をまとめると

$$P(E \rightarrow E') = \frac{4\pi\sigma_s(\theta)}{E(1-\alpha)\sigma_s} \quad \alpha E < E' < E$$

$$P(E \rightarrow E') = 0 \quad E' < \alpha E, E < E'$$

- 特に、重心系で等方散乱の場合 $\sigma_s(\theta) = \frac{\sigma_s}{4\pi}$

$$P(E \rightarrow E') = \frac{1}{E(1-\alpha)} \quad \alpha E < E' < E$$

$$P(E \rightarrow E') = 0 \quad E' < \alpha E, E < E'$$

- 重心系・等方散乱の仮定は共鳴エネルギー領域で精度良く成り立つ→超多群計算で使用

弾性散乱後のエネルギー分布

- なお、 $P(E \rightarrow E')$ が確率分布関数であることは以下の式から確認できる。

$$\int_{\alpha E}^E P(E \rightarrow E') dE' = \frac{1}{E(1-\alpha)} \int_{\alpha E}^E dE' = 1$$

- 重心系で等方散乱を仮定できない場合、散乱角と散乱後のエネルギーは相互に依存する。つまり、 $P(E \rightarrow E')$ は散乱角依存となる。これは、高エネルギー領域(MeV領域)で重要となる(が、幸いにも共鳴エネルギー領域ではその影響は小さい)

弾性散乱による平均エネルギー損失

- 弾性散乱によって中性子が失う平均的なエネルギー量は(重心系で等方散乱の場合)

$$\int_{\alpha E}^E E' P(E \rightarrow E') dE' = E \frac{(1+\alpha)}{2}$$

- 初期エネルギーに対する割合は

$$E \frac{(1+\alpha)}{2} / E = \frac{(1+\alpha)}{2}$$

- たとえば、水素に対しては、平均して半分のエネルギーを失う。



水素中での中性子の減速

- もっとも取り扱いが単純な減速過程の解析として、水素による減速を取り扱う。
 - 水素の無限均質体系
 - エネルギー E_0 の中性子源(空間分布なし)
 - 中性子のエネルギー変化のみを考察する

水素中での中性子の減速

- エネルギー $E \sim E+dE$ の範囲の中性子のバランスを計算する。

- 中性子源から直接入ってくる中性子

$$S \frac{dE}{E_0}$$

- $E_0 \sim E$ までのエネルギーを持っている中性子

$$\int_E^{E_0} \Sigma_S(E') \phi(E') dE' \frac{dE}{E'}$$

- 合計して $E \sim E+dE$ に入ってくる中性子数は

$$S \frac{dE}{E_0} + \int_E^{E_0} \Sigma_S(E') \phi(E') dE' \frac{dE}{E'}$$

水素中での中性子の減速

- 入ってくる中性子数は散乱により出ていく中性子数と同じである(共鳴エネルギー領域で水素の吸収断面積は小さく無視できる)から

$$\Sigma_S(E)\phi(E)dE = S \frac{dE}{E_0} + \int_E^{E_0} \Sigma_S(E')\phi(E')dE' \frac{dE}{E'}$$

- 両辺をdEで割ると

$$\Sigma_S(E)\phi(E) = \frac{S}{E_0} + \int_E^{E_0} \frac{\Sigma_S(E')\phi(E')dE'}{E'}$$

水素中での中性子の減速

- 両辺をEで微分すると

$$\frac{d}{dE} [\Sigma_s(E)\phi(E)] = -\frac{\Sigma_s(E)\phi(E)}{E}$$

- 一般解は

$$\Sigma_s(E)\phi(E) = \frac{C}{E}$$

- E_0 における中性子のバランスから

$$C = S$$

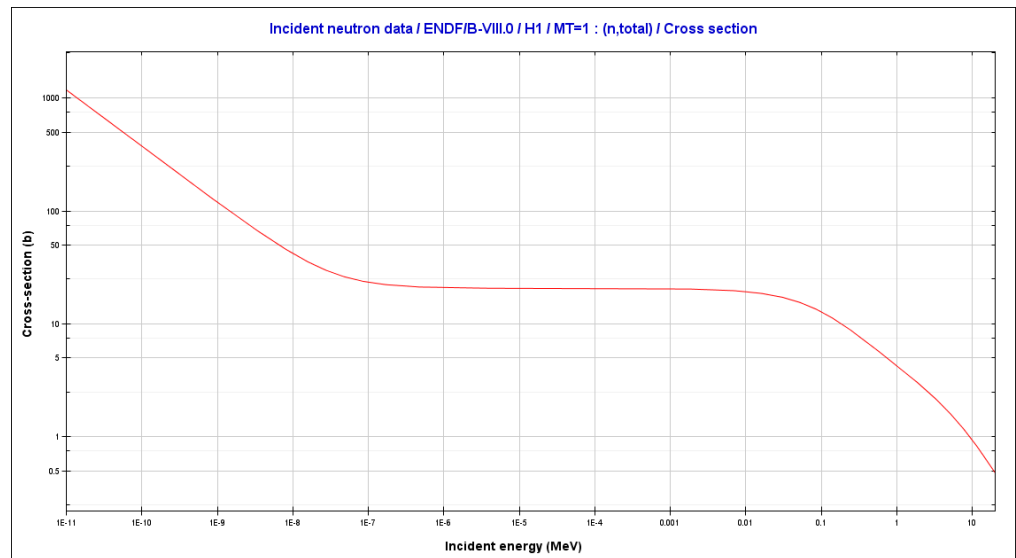
- 結局

$$\phi(E) = \frac{S}{\Sigma_s(E)E}$$

水素中での中性子の減速

- 共鳴エネルギー領域では、水素の断面積はほぼ一定(約20barn)であることから、共鳴エネルギー領域において、中性子のエネルギースペクトルは $1/E$ に比例する。(1/Eスペクトル)

$$\phi(E) \propto \frac{1}{E}$$





レサジー(Lethargy)

- 水素媒質中の中性子束は、 $1/E$ に比例する。すなわち、核分裂エネルギー領域(1MeV)と熱エネルギー領域(1eV)では、単位エネルギーあたりの中性子束は 10^6 倍も異なる値となる。
- そこで、レサジーという変数を新たに定義する。(後で述べるが)単位レサジーあたりの中性子束は、水素媒質中ではほぼ一定値になる。

レサジー(Lethargy)

- レサジーの定義

$$u = \ln \frac{E_0}{E}$$

ここで、 E_0 は体系内のもっとも高いエネルギー(例えば軽水炉の解析では20MeVなど)とする。従って、レサジーは常に正の値である。

- 上式をEで微分すると

$$du = -\frac{dE}{E}$$

- これより[m→kmなどの単位換算と同じ考え方]

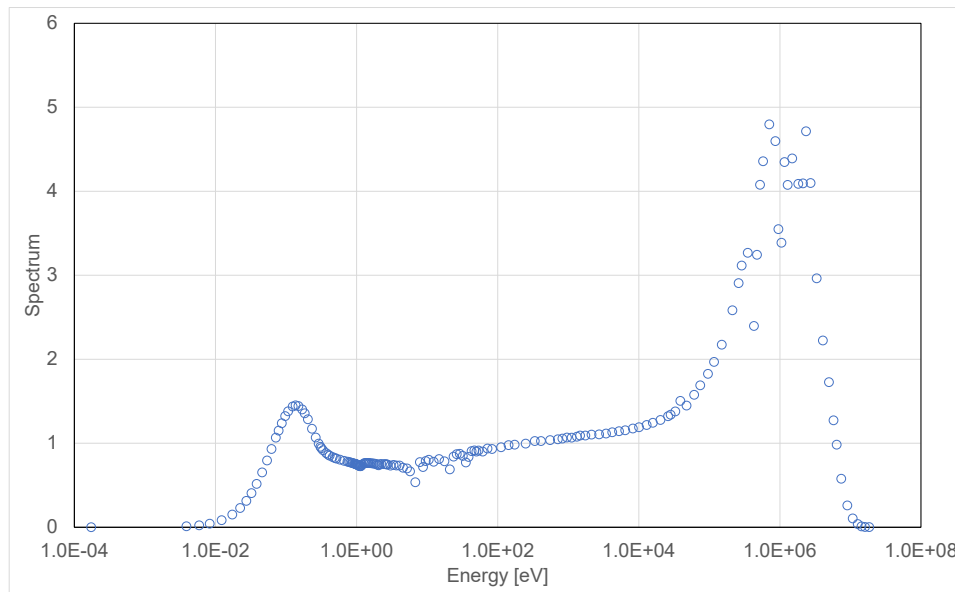
$$\phi(u) = -\phi(E) \frac{dE}{du} = E\phi(E)$$

レサジー(Lethargy)

- 水素媒質中では

$$\phi(u) = E\phi(E) \propto C \text{ (一定値)}$$

- つまり、単位レサジーあたりの中性子束は一定値となる。



レサジー(Lethargy)

- 一回の衝突あたりのレサジー平均増加量

$$\Delta\bar{u} = \xi = \int_{\alpha E}^E \ln\left(\frac{E}{E'}\right) P(E \rightarrow E') dE'$$

- 重心系に関して等方散乱の場合

$$\xi = \frac{1}{E(1-\alpha)} \int_{\alpha E}^E \ln\left(\frac{E}{E'}\right) dE' = 1 + \frac{\alpha}{1-\alpha} \ln \alpha$$

$$\xi = 1 - \frac{(A-1)^2}{2A} \ln\left(\frac{A+1}{A-1}\right)$$

$$\xi \cong \frac{2}{A + \frac{2}{3}} \quad \text{Aが大きい場合}$$



A>1の場合の中性子の減速

- A>1の場合、中性子は衝突によってエネルギーを完全に失うことはない。
- この条件により、重心系で等方散乱を仮定しても、減速方程式を解析的に解くことは極めて難しくなる。
- 実際の動力炉では、水素のみならず、酸素や重核種なども減速に寄与している→数値解析(超多群計算の利用)



超多群スペクトル計算

- 共鳴エネルギー領域の詳細な中性子エネルギー分布を求めるため、超多群計算が利用される。
- 超多群計算では、共鳴領域(1keV~1eV)を数万点のエネルギー一点に分割し、減速方程式を数値的に解く。
- 得られた詳細な中性子エネルギースペクトルを用いて、共鳴領域の平均断面積を求める(実効断面積)
- 動力炉の解析では、集合体計算(格子計算)の群定数(100群程度)を準備する際に用いられる。



超多群スペクトル計算

- 一般的に以下の仮定を用いる。
 - 弾性散乱のみを考慮(共鳴エネルギー領域では、非弾性散乱の効果は小さい。特に軽水炉の解析では)
 - 重心系で等方散乱(共鳴エネルギー領域では非等方散乱の効果は小さい)
 - 各群のエネルギー幅は十分小さく、群内の中性子束および断面積のエネルギー変化は無視できる。
 - 下方散乱のみを考慮する。(共鳴領域は1eV程度までであり、上方散乱の効果は小さい)
 - 自群散乱は無視する。

超多群スペクトル計算

■ 基礎式

$$\Sigma_{t,g} \phi_g = S_g^{fission} + \sum_{g'=1}^{g-1} \sum_k (N_k \sigma_{S,k,g'}) \phi_{g'} \frac{dE_g}{(1-\alpha_k)E_{g'}}$$

ここで、中性子束は、エネルギー積分された値。
kは異なる核種を示す。



超多群スペクトル計算

■ 計算の準備

- 全断面積: NJOYコードなどで計算しておく
- 核分裂中性子源: 代表的な核分裂性核種(例: ^{235}U などの核分裂スペクトル)から計算する
- 微視的散乱断面積: NJOYコードなどで弾性散乱断面積の値を計算しておく。
- α : 原子量から計算可能
- 原子数密度: 入力値

超多群スペクトル計算

- 計算手順

- 1群の中性子スペクトルを計算

$$\Sigma_{t,1}\phi_1 = S_1^{fission}$$

- 2群の中性子スペクトルを計算

$$\Sigma_{t,2}\phi_2 = S_2^{fission} + \sum_k (N_k \sigma_{S,k,1}) \phi_1 \frac{dE_2}{(1-\alpha_k)E_1}$$

- 以下同様
- なお、Kierらが提案した漸化式を用いることで、計算を大幅に高速化できる。(Handbook of Nuclear Engineering, Chap.9参照)

超多群スペクトル計算

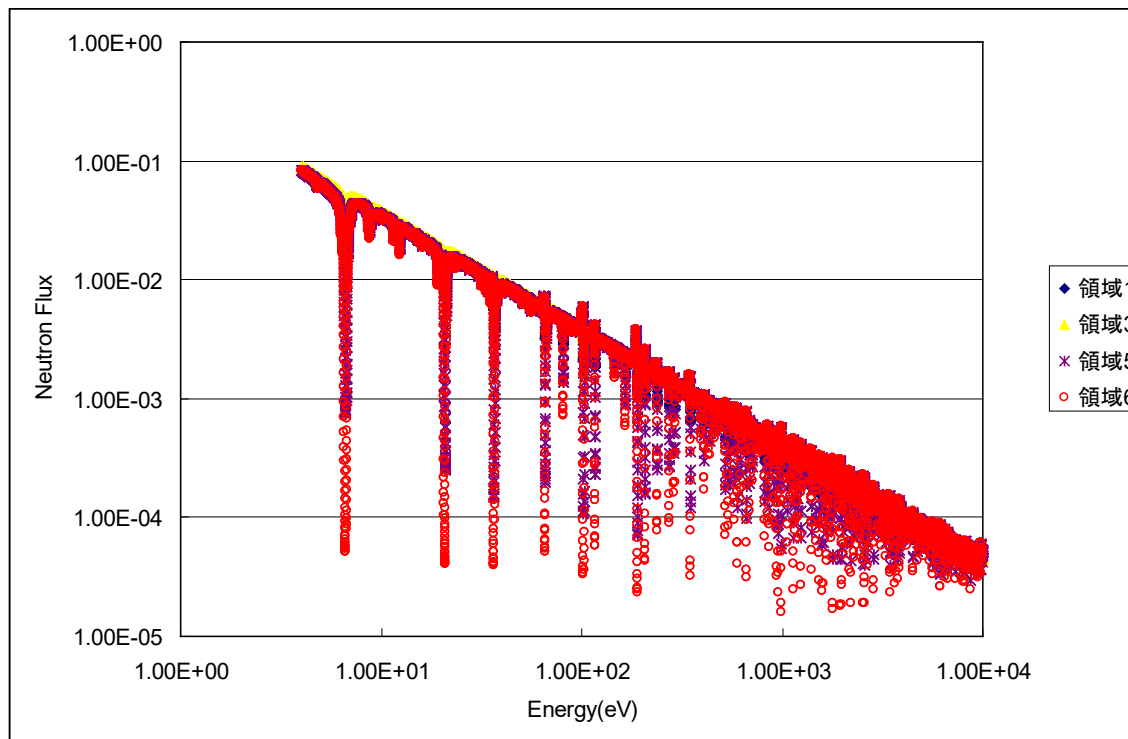
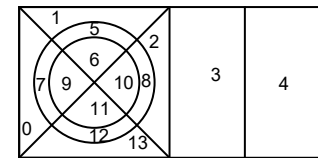
- 空間依存性のある場合は、以下の値を固定中性子源として、各群において中性子の空間分布を計算する

$$S_g^{fission} + \sum_{g'=1}^{g-1} \sum_k (N_k \sigma_{S,k,g'}) \phi_{g'} \frac{dE_g}{(1-\alpha_k)E_{g'}}$$

- 空間分布は、拡散・輸送理論どちらを用いても良いが、精度と計算時間の観点から衝突確率法が用いられる場合が多い。
- 衝突確率法を用いる場合、群ごとに衝突確率を計算するのは時間がかかるので、代表的な断面積に対して衝突確率をあらかじめ計算しておき、それを内挿することで計算時間の短縮を図る。

超多群スペクトル計算

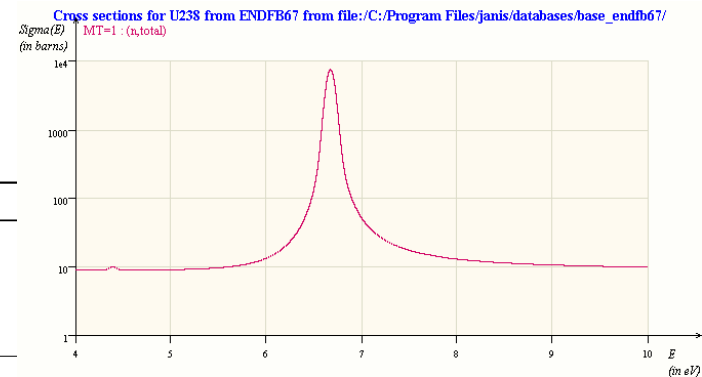
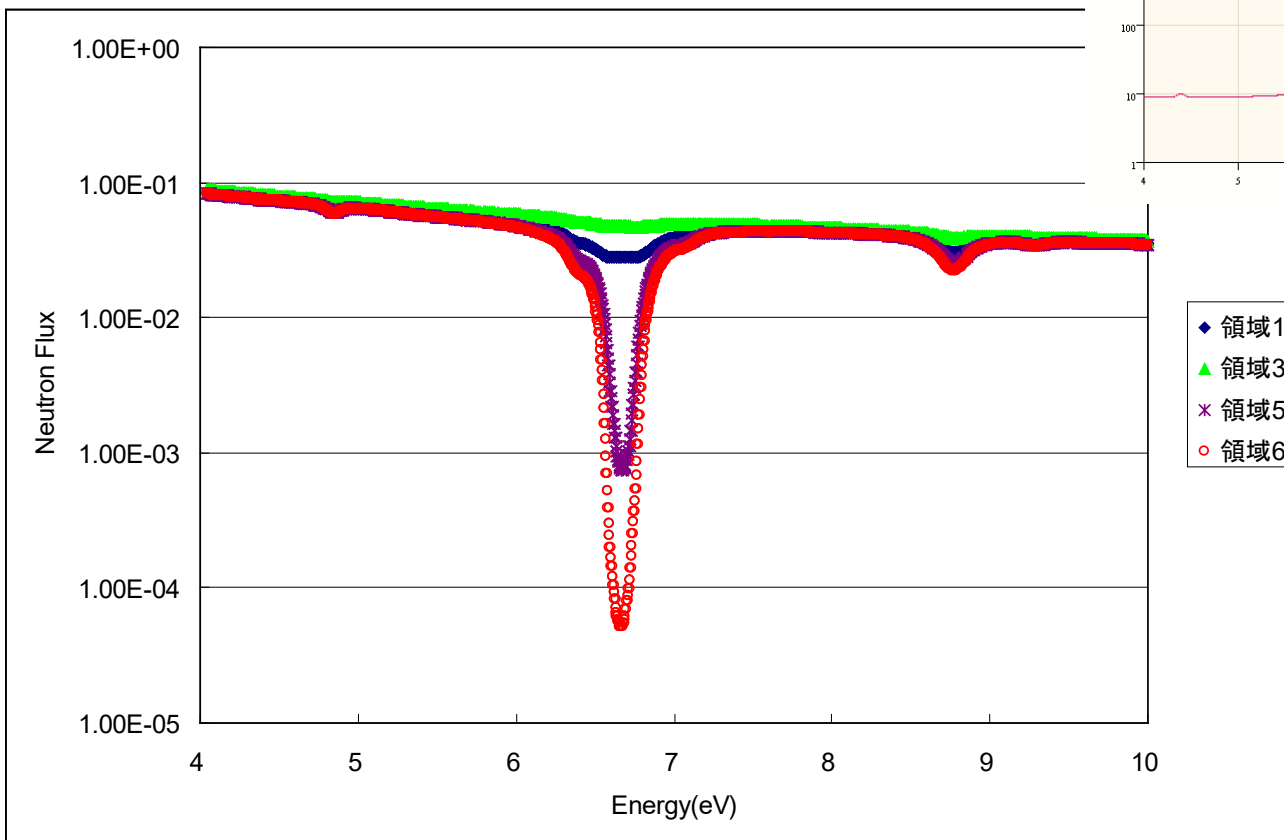
- PWRガイドシムブル隣接体系における計算例
(MOCを用いた超多群計算)



PWR, 5wt%UO₂燃料

超多群スペクトル計算

■ 計算例(1eV~10eV拡大)





まとめ

- 中性子減速理論
 - 減速理論の基礎
 - 水素中における中性子の減速
 - レサジー
- 中性子超多群計算