

# 近代ノード法

---

- ・近代ノード法の基礎式
- ・近代ノード法の反復法
- ・近代ノード法の結合係数計算



# 近代ノード法とは

- ノード(メッシュ)内の中性子束空間分布を関数 (sin, exp, 多項式)で展開
  - 有限差分法に比べ、メッシュ誤差が非常に小さい
- 隣接ノード間の結合係数(相互作用)を拡散方程式に基づき解析的に導出
  - 経験的な調整パラメータが不要
- 横方向の中性子漏れを(多項式などの形で)考慮
  - 計算精度の向上
- 燃料棒出力再構成
  - 粗メッシュ計算で詳細メッシュ計算並みの炉心特性解析結果を得ることができる



# 近代ノード法を学ぶ必要性

## ■ BWR

- BWRは軸方向にボイド分布が存在するため、開発当初から三次元計算が必須であった。
- しかし、開発当初(30-40年前)は計算機的能力が不十分であり、集合体内を均質化した上で有限差分法や修正一群法に基づく(簡易な)三次元計算が行われていた。
- 近年、計算機能力が向上したことで、計算精度の高い近代ノード法が利用されるようになった。
- また、近代ノード法を用いることで、集合体内の燃料棒出力分布も精度良く求めることができるようになった→最大線出力密度などの精度向上



# 近代ノード法を学ぶ必要性

## ■ PWR

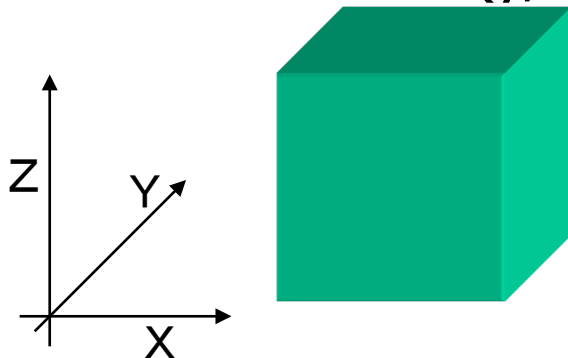
- PWRは、軸方向の減速材密度の変化が少ないため、炉心を径方向の二次元および軸方向の一次元に分けて計算する手法が一般的であった(一・二次元合成法)。この際、径方向については、各燃料棒を直接解析で考慮する「詳細メッシュ」炉心計算が行われていた。
- 近年の炉心構成の複雑化や高燃焼度化に伴い、予測精度の観点から三次元計算が強く求められるようになってきた。
- この結果、燃料棒出力を再構成することもできる近代ノード法が使用されるようになった。

# 近代ノード法の基礎式

- 三次元・多群の拡散方程式

$$\begin{aligned} -D_g \left( \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2} \right) \phi_g(x, y, z) + \Sigma_{r,g} \phi_g(x, y, z) &= \frac{\chi_g}{k} \sum_{g'} \nu \Sigma_{f,g'} \phi_{g'}(x, y, z) \\ &+ \sum_{g' \neq g} \Sigma_{s,g' \rightarrow g} \phi_{g'}(x, y, z) \\ &+ ES_g(x, y, z) \end{aligned}$$

- このままでは、解析的に計算を進めることができないため、ノードの横方向(y, z)について積分を行う。



# 近代ノード法の基礎式

## ■ (y, z)方向への横方向積分

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta y \Delta z} \int_{-\Delta z/2}^{\Delta z/2} \int_{-\Delta y/2}^{\Delta y/2} -D_g \left( \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2} \right) \phi_g(x, y, z) dy dz \\ & + \frac{1}{\Delta y \Delta z} \int_{-\Delta z/2}^{\Delta z/2} \int_{-\Delta y/2}^{\Delta y/2} \Sigma_{r,g} \phi_g(x, y, z) dy dz \\ & = \frac{\chi_g}{k} \frac{1}{\Delta y \Delta z} \int_{-\Delta z/2}^{\Delta z/2} \int_{-\Delta y/2}^{\Delta y/2} \sum_{g'} \nu \Sigma_{f,g'} \phi_{g'}(x, y, z) dy dz \\ & + \frac{1}{\Delta y \Delta z} \int_{-\Delta z/2}^{\Delta z/2} \int_{-\Delta y/2}^{\Delta y/2} \sum_{g'} \Sigma_{s,g' \rightarrow g} \phi_{g'}(x, y, z) dy dz \\ & + \frac{1}{\Delta y \Delta z} \int_{-\Delta z/2}^{\Delta z/2} \int_{-\Delta y/2}^{\Delta y/2} ES_g(x, y, z) dy dz \end{aligned}$$

# 近代ノード法の基礎式

## ■ 第一項

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta y \Delta z} \int_{-\Delta z/2}^{\Delta z/2} \int_{-\Delta y/2}^{\Delta y/2} -D_g \left( \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2} \right) \phi_g(x, y, z) dy dz \\ &= \frac{1}{\Delta y \Delta z} \int_{-\Delta z/2}^{\Delta z/2} \int_{-\Delta y/2}^{\Delta y/2} -D_g \frac{d^2}{dx^2} \phi_g(x, y, z) dy dz \\ &+ \frac{1}{\Delta y \Delta z} \int_{-\Delta z/2}^{\Delta z/2} \int_{-\Delta y/2}^{\Delta y/2} -D_g \frac{d^2}{dy^2} \phi_g(x, y, z) dy dz \\ &+ \frac{1}{\Delta y \Delta z} \int_{-\Delta z/2}^{\Delta z/2} \int_{-\Delta y/2}^{\Delta y/2} -D_g \frac{d^2}{dz^2} \phi_g(x, y, z) dy dz \end{aligned}$$

# 近代ノード法の基礎式

- 第一項(続き)

$$\begin{aligned} &= -D_g \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{1}{\Delta y \Delta z} \int_{-\Delta z/2}^{\Delta z/2} \int_{-\Delta y/2}^{\Delta y/2} \phi_g(x, y, z) dy dz \right) \\ &+ \frac{1}{\Delta y \Delta z} \left[ \int_{-\Delta z/2}^{\Delta z/2} \left( -D_g \frac{d}{dy} \phi_g(x, y, z) \right) dz \right]_{-\Delta y/2}^{\Delta y/2} \\ &+ \frac{1}{\Delta y \Delta z} \left[ \int_{-\Delta y/2}^{\Delta y/2} \left( -D_g \frac{d}{dz} \phi_g(x, y, z) \right) dy \right]_{-\Delta z/2}^{\Delta z/2} \end{aligned}$$



# 近代ノード法の基礎式

## ■ 第一項(続き)

$$= -D_g \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{1}{\Delta y \Delta z} \int_{-\Delta z/2}^{\Delta z/2} \int_{-\Delta y/2}^{\Delta y/2} \phi_g(x, y, z) dy dz \right) \\ + \frac{1}{\Delta y} \left( J_{y+,g}(x) - J_{y-,g}(x) \right) + \frac{1}{\Delta z} \left( J_{z+,g}(x) - J_{z-,g}(x) \right)$$

以下の関係を使用

$$\frac{1}{\Delta z} \int_{-\Delta z/2}^{\Delta z/2} \left( -D_g \frac{d}{dy} \phi_g(x, y, z) \right) dz = J_{y,g}(x)$$

$$\frac{1}{\Delta y} \int_{-\Delta y/2}^{\Delta y/2} \left( -D_g \frac{d}{dz} \phi_g(x, y, z) \right) dy = J_{z,g}(x)$$



# 近代ノード法の基礎式

## ■ 第一項(続き)

$J_{y+}(x)$  ノードのy+表面での正味中性子流を示し、z方向に関しては平均量。

$J_{y-}(x)$  ノードのy-表面での正味中性子流を示し、z方向に関しては平均量。

$J_{z+}(x)$  ノードのz+表面での正味中性子流を示し、y方向に関しては平均量。

$J_{z-}(x)$  ノードのz-表面での正味中性子流を示し、y方向に関しては平均量。

# 近代ノード法の基礎式

## ■ まとめると

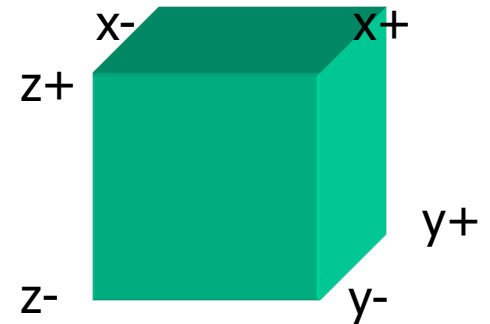
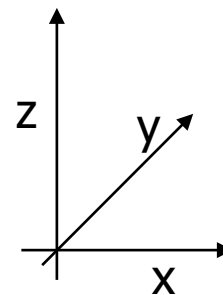
$$\begin{aligned} -D_g \frac{d^2}{dx^2} \Phi_{x,g}(x) + \Sigma_{r,g} \Phi_{x,g}(x) &= \frac{\lambda_g}{k} \sum_{g'} \nu \Sigma_{f,g'} \Phi_{x,g'}(x) \\ + \sum_{g' \neq g} \Sigma_{s,g' \rightarrow g} \Phi_{x,g'}(x) + ES_{x,g}(x) \\ - \frac{1}{\Delta y} (J_{y+,g}(x) - J_{y-,g}(x)) - \frac{1}{\Delta z} (J_{z+,g}(x) - J_{z-,g}(x)) \end{aligned}$$

y, z方向に平均された中性子束

$$\Phi_{x,g}(x) = \frac{1}{\Delta y \Delta z} \int_{-\Delta y/2}^{\Delta y/2} \int_{-\Delta z/2}^{\Delta z/2} \phi_g(x, y, z) dy dz$$

y, z方向に平均された中性子源

$$ES_{x,g}(x) = \frac{1}{\Delta y \Delta z} \int_{-\Delta y/2}^{\Delta y/2} \int_{-\Delta z/2}^{\Delta z/2} ES_g(x, y, z) dy dz$$



# 近代ノード法の基礎式

- これまでの結果を以下のようにまとめる。

- x方向

$$-D_g \frac{d^2}{dx^2} \Phi_{x,g}(x) + \Sigma_{r,g} \Phi_{x,g}(x) = Q_{x,g}(x) - L_{x,g}(x)$$

$$\Phi_{x,g}(x) = \frac{1}{\Delta y \Delta z} \int_{-\Delta y/2}^{\Delta z/2} \int_{-\Delta y/2}^{\Delta y/2} \phi_g(x, y, z) dy dz$$

$$ES_{x,g}(x) = \frac{1}{\Delta y \Delta z} \int_{-\Delta y/2}^{\Delta z/2} \int_{-\Delta y/2}^{\Delta y/2} ES_g(x, y, z) dy dz$$

$$Q_{x,g}(x) = \frac{\chi_g}{k} \sum_{g'} \nu \Sigma_{f,g'} \Phi_{x,g'}(x) + \sum_{g' \neq g} \Sigma_{s,g' \rightarrow g} \Phi_{x,g'}(x) + ES_{x,g}(x)$$

$$L_{x,g}(x) = \frac{1}{\Delta y} (J_{y+,g}(x) - J_{y-,g}(x)) + \frac{1}{\Delta z} (J_{z+,g}(x) - J_{z-,g}(x))$$

# 近代ノード法の基礎式

- 同様に

- y方向

$$-D_g \frac{d^2}{dy^2} \Phi_{y,g}(y) + \Sigma_{r,g} \Phi_{y,g}(y) = Q_{y,g}(y) - L_{y,g}(y)$$

$$\Phi_{y,g}(y) = \frac{1}{\Delta x \Delta z} \int_{-\Delta z/2}^{\Delta z/2} \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} \phi_g(x, y, z) dx dz$$

$$ES_{y,g}(y) = \frac{1}{\Delta x \Delta z} \int_{-\Delta z/2}^{\Delta z/2} \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} ES_g(x, y, z) dx dz$$

$$Q_{y,g}(y) = \frac{\chi_g}{k} \sum_{g'} \nu \Sigma_{f,g'} \Phi_{y,g'}(y) + \sum_{g' \neq g} \Sigma_{s,g' \rightarrow g} \Phi_{y,g'}(y) + ES_{y,g}(y)$$

$$L_{y,g}(y) = \frac{1}{\Delta x} (J_{x+,g}(y) - J_{x-,g}(y)) + \frac{1}{\Delta z} (J_{z+,g}(x) - J_{z-,g}(x))$$

# 近代ノード法の基礎式

- 同様に

- z方向

$$-D_g \frac{d^2}{dz^2} \Phi_{z,g}(z) + \Sigma_{r,g} \Phi_{z,g}(z) = Q_{z,g}(z) - L_{z,g}(z)$$

$$\Phi_{z,g}(z) = \frac{1}{\Delta x \Delta y} \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} \int_{-\Delta y/2}^{\Delta y/2} \phi_g(x, y, z) dy dx$$

$$ES_{z,g}(z) = \frac{1}{\Delta x \Delta y} \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} \int_{-\Delta y/2}^{\Delta y/2} ES_g(x, y, z) dy dx$$

$$Q_{z,g}(z) = \frac{\chi_g}{k} \sum_{g'} \nu \Sigma_{f,g'} \Phi_{z,g'}(z) + \sum_{g' \neq g} \Sigma_{s,g' \rightarrow g} \Phi_{z,g'}(z) + ES_{z,g}(z)$$

$$L_{z,g}(z) = \frac{1}{\Delta x} (J_{x+,g}(z) - J_{x-,g}(z)) + \frac{1}{\Delta y} (J_{y+,g}(z) - J_{y-,g}(z))$$

# 二階の常微分方程式の解(1)

- 近代ノード法では、以下の3パターンでの二階常微分方程式を取り扱う。

$$-D \frac{d^2}{dx^2} \Phi(x) + \Sigma \Phi(x) = 0$$

ノード内に中性子源がない場合  
(反射体内の一群)

$$-D \frac{d^2}{dx^2} \Phi(x) + \Sigma \Phi(x) = ax^2 + bx + c$$

多項式解析的ノード法

$$-D \frac{d^2}{dx^2} \Phi(x) + \Sigma_a \Phi(x) = \frac{\nu \Sigma_f}{k} \Phi(x)$$

解析的ノード法

# 二階の常微分方程式の解(1)

- 以下の方程式の解を求める。

$$-D \frac{d^2}{dx^2} \Phi(x) + \Sigma \Phi(x) = 0$$

- 解の形を指数関数として、上式に代入

$$\Phi_{x,g}(x) = A \exp(-Bx)$$

$$\begin{aligned} -D \frac{d^2}{dx^2} \Phi(x) + \Sigma \Phi(x) &= -DB^2 A \exp(-Bx) + \Sigma A \exp(-Bx) \\ &= A \exp(-Bx) (-DB^2 + \Sigma) \\ &= 0 \end{aligned}$$

- これより、

$$-DB^2 + \Sigma = 0 \Leftrightarrow B = \pm \sqrt{\frac{\Sigma}{D}}$$



# 二階の常微分方程式の解(1)

- 一般解は

$$\Phi_{x,g}(x) = A \exp(-Bx) + C \exp(Bx) \quad B = \sqrt{\frac{\Sigma}{D}}$$

- 未定数A,Cは、境界条件(二つ)によって決められる。以下の4つのうちから二つを使用。

$$\Phi_{x,g}(x) \Big|_{x=x^-} = \Phi_{x^-,g}$$

境界における中性子束の値

$$\Phi_{x,g}(x) \Big|_{x=x^+} = \Phi_{x^+,g}$$

$$-D \frac{d\Phi_{x,g}(x)}{dx} \Big|_{x=x^-} = J_{x^-,g}$$

境界における中性子流の値

$$-D \frac{d\Phi_{x,g}(x)}{dx} \Big|_{x=x^+} = J_{x^+,g}$$

# 二階の常微分方程式の解(1)

- 境界における中性子束の値を使用する場合、以下の二元連立方程式より、 $A$ ,  $C$ を決定。

$$\begin{cases} A \exp(-Bx_-) + C \exp(Bx_-) = \Phi_{x-,g} \\ A \exp(-Bx_+) + C \exp(Bx_x) = \Phi_{x+,g} \end{cases}$$

- 境界における中性子流の値を使用する場合、以下の二元連立方程式より、 $A$ ,  $C$ を決定。

$$\begin{cases} BDA \exp(-Bx_-) - BDC \exp(Bx_-) = J_{x-,g} \\ BDA \exp(-Bx_+) - BDC \exp(Bx_x) = J_{x+,g} \end{cases}$$

# 二階の常微分方程式の解(2)

- 以下の方程式の解を求める。

$$-D \frac{d^2}{dx^2} \Phi(x) + \Sigma \Phi(x) = ax^2 + bx + c$$

- 右辺を0とした場合の一般解は

$$\Phi_{x,g}(x) = A \exp(-Bx) + C \exp(Bx) \quad B = \sqrt{\frac{\Sigma}{D}}$$

- 特解は、発見的に以下の解を仮定する

$$\Phi_{x,g}(x) = a'x^2 + b'x + c'$$

$$-D \frac{d^2}{dx^2} (a'x^2 + b'x + c') + \Sigma(a'x^2 + b'x + c')$$

$$= -D(2a') + \Sigma(a'x^2 + b'x + c') = ax^2 + bx + c$$

$$a' = \frac{a}{\Sigma}, b' = \frac{b}{\Sigma}, c' = \frac{c\Sigma + 2aD}{\Sigma^2}$$



# 二階の常微分方程式の解(2)

- 結局、一般解は、

$$\Phi_{x,g}(x) = A \exp(-Bx) + C \exp(Bx) + \frac{a}{\Sigma} x^2 + \frac{b}{\Sigma} x + \frac{c\Sigma + 2aD}{\Sigma^2}$$

- 未定定数A, Cの決定方法は、先ほどと同じ。

# 二階の常微分方程式の解(3)

- 以下の方程式の解を求める。

$$-D \frac{d^2}{dx^2} \Phi(x) + \Sigma_a \Phi(x) = \frac{\nu \Sigma_f}{k} \Phi(x)$$

- 以下の様に変形

$$-D \frac{d^2}{dx^2} \Phi(x) + \left( \Sigma_a - \frac{\nu \Sigma_f}{k} \right) \Phi(x) = 0$$

- $\left( \Sigma_a - \frac{\nu \Sigma_f}{k} \right)$  の値によって、以下の三通りに分ける

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} \Phi(x) - B^2 \Phi(x) &= 0 & B^2 &= \left( \Sigma_a - \frac{\nu \Sigma_f}{k} \right) / D \text{ for } \left( \Sigma_a - \frac{\nu \Sigma_f}{k} \right) > 0 \\ \frac{d^2}{dx^2} \Phi(x) + B^2 \Phi(x) &= 0 & B^2 &= \left( -\Sigma_a + \frac{\nu \Sigma_f}{k} \right) / D \text{ for } \left( \Sigma_a - \frac{\nu \Sigma_f}{k} \right) < 0 \\ \frac{d^2}{dx^2} \Phi(x) &= 0 & B^2 &= 0 \text{ for } \left( \Sigma_a - \frac{\nu \Sigma_f}{k} \right) = 0 \end{aligned}$$

# 二階の常微分方程式の解(3)

- 一般解は以下の通り。

$$\frac{d^2}{dx^2} \Phi(x) - B^2 \Phi(x) = 0 \quad \Phi_{x,g}(x) = A \exp(-Bx) + C \exp(Bx)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \Phi(x) + B^2 \Phi(x) = 0 \quad \Phi_{x,g}(x) = A \sin(-Bx) + C \cos(Bx)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \Phi(x) = 0 \quad \Phi_{x,g}(x) = Ax + C$$

- 未定定数の決定方法は、先ほどと同じ

# 二階の常微分方程式の解(3)

## ■ 解の形に関する考察

$$\Sigma_a - \frac{\nu\Sigma_f}{k} = \Sigma_a \left( 1 - \frac{\nu\Sigma_f / \Sigma_a}{k} \right) = \Sigma_a \left( 1 - \frac{k_\infty}{k} \right) \quad \because k_\infty = \frac{\nu\Sigma_f}{\Sigma_a}$$

## ■ これより

$$\exp \text{ for } \left( \Sigma_a - \frac{\nu\Sigma_f}{k} \right) > 0$$

ノードの無限増倍率 $k_\infty$ が、  
体系の増倍率 $k$ より小さい

$$\sin/\cos \text{ for } \left( \Sigma_a - \frac{\nu\Sigma_f}{k} \right) < 0$$

ノードの無限増倍率 $k_\infty$ が、  
体系の増倍率 $k$ より大きい

$$x \text{ for } \left( \Sigma_a - \frac{\nu\Sigma_f}{k} \right) = 0$$

ノードの無限増倍率 $k_\infty$ が、  
体系の増倍率 $k$ と同じ



# 近代ノード法の種類

- 拡散方程式の解き方に基づく分類
  - 解析的ノード法
  - 多項式解析的ノード法
  - 多項式ノード法
  - 準解析的ノード法
- 反復計算時の未知数に基づく分類
  - 応答行列タイプ(部分中性子流が未知数)
  - 有限差分タイプ(中性子束が未知数)
- 結合係数の計算方法に基づく分類
  - 解析的に結合係数を導出
  - 非線形反復を用いて結合係数を数值的に導出
- 上記の組み合わせ( $4 \times 2 \times 2 = 16$ 通り)に分類可能



# 解析的ノード法

- 以下の式に対してノード内の中性子束分布を解析的に求める。 $L(x)$ は多項式(通常二次式)で近似する。(Quadratic Transverse Leakage approximation, QTL近似、後述)

$$-D_g \frac{d}{dx^2} \bar{\phi}_g(x) + \Sigma_{r,g} \bar{\phi}_g(x) = \frac{\chi_g}{k_{eff}} \sum_{g'} \nu \Sigma_{f,g'} \bar{\phi}_{g'}(x) + \sum_{g' \neq g} \Sigma_{s,g' \rightarrow g} \bar{\phi}_{g'}(x) - L_g(x)$$

- QTL近似をのぞき、空間離散化に基づく誤差は発生しない。従って、高精度。
- 一般に、一群もしくは二群に対して用いられる。

$$-D \frac{d}{dx^2} \bar{\phi}(x) + \Sigma_a \bar{\phi}(x) = \frac{1}{k_{eff}} \nu \Sigma_f \bar{\phi}(x) - L(x)$$

- 多群の場合、解析解が非常に複雑になる問題点がある。
- 各ノードの無限増倍率( $k_{inf}$ )と体系の実効増倍率( $k_{eff}$ )により、解析解の形が変化する。 $(k_{inf} < k_{eff}$ の場合exp、 $k_{inf} > k_{eff}$ の場合sin) このため、ノードの無限増倍率が体系の実効増倍率に近い場合、数値的に不安定になることがある。
- 代表的なコード: QUANDARY(MIT), SIMULATE4(SSP)

# 多項式解析的ノード法

- $Q(x)$ および $L(x)$ を多項式展開したものに対し、解析解を求める。

$$-D_g \frac{d}{dx^2} \bar{\phi}_g(x) + \Sigma_{r,g} \bar{\phi}_g(x) = Q_g(x) - L_g(x)$$

- $L(x)$ 、 $Q(x)$ は2次多項式による展開が一般的であるが、必要に応じて4次多項式を使用する(ノード内の中性子源分布の変化が大きい場合。例: MOX燃料)
- 中性子源項を多項式展開するため、任意の群数に対して使用可能
- 中性子源項の多項式展開(およびQTL近似)に基づく誤差が存在するが、一般的に精度は良い。
- 解の形が常に $\exp +$ 多項式の形であるため、数値的な安定性は良い。
- 上記の点から、多群の近代ノード法には、多項式解析的ノード法がよく用いられる。
- 代表的なコード: ANDEX(阪大), SCIENCE(F-ANP), AETNA(GNF-J), APEN2(四電), SCOPE2(NFI)

# 多項式ノード法

- $L(x)$ にはQTL近似を適用し、ノード内の中性子束分布として多項式近似(通常は4次)を適用する。多項式としては、以下の特別なものを用いる場合が多い。(直交関係なし。試行錯誤で決めた?) なお、ルジャンドル関数を用いる場合もある。

$$\bar{\phi}_g(x) = \sum_{n=0}^4 a_{g,n} f_n(x)$$

$$f_0(x) = 1$$

$$f_1(x) = \frac{x}{\Delta X} \equiv \xi, \quad \left(-\frac{1}{2} \leq \xi \leq \frac{1}{2}\right), \quad \Delta X: \text{ノード幅}$$

$$f_2(x) = 3\xi^2 - \frac{1}{4}$$

$$f_3(x) = \xi\left(\xi - \frac{1}{2}\right)\left(\xi + \frac{1}{2}\right)$$

$$f_4(x) = \left(\xi^2 - \frac{1}{20}\right)\left(\xi - \frac{1}{2}\right)\left(\xi + \frac{1}{2}\right)$$

# 多項式ノード法

- 多項式で与えた中性子束分布は拡散方程式を厳密に満たすことができない。そのため、重み付き残差法(後述)により、“できるだけ”拡散方程式を満足するように多項式の係数を決める。

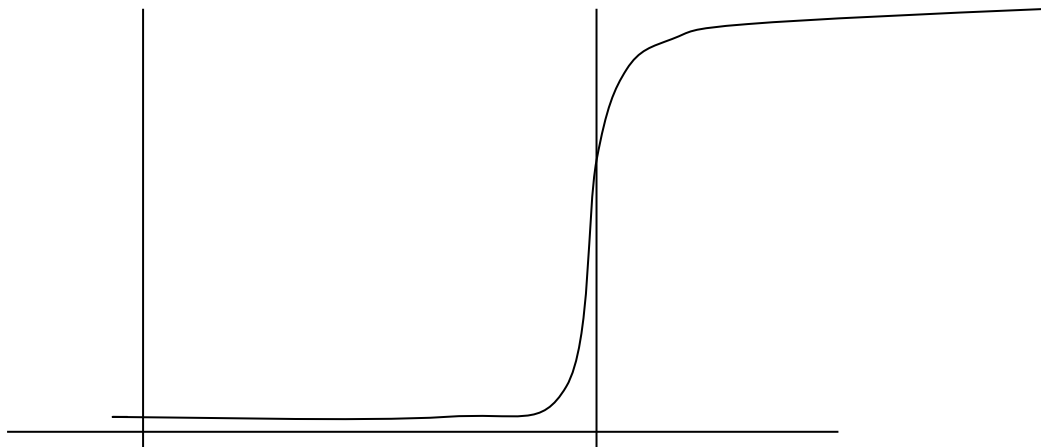
$$-D_g \frac{d}{dx^2} \bar{\phi}_g(x) + \Sigma_{r,g} \bar{\phi}_g(x) = Q_g(x) - L_g(x)$$

$$Q_g(x) = \frac{\lambda_g}{k_{eff}} \sum_{g'} \nu \Sigma_{f,g'} \bar{\phi}_{g'}(x) + \sum_{g' \neq g} \Sigma_{s,g' \rightarrow g} \bar{\phi}_{g'}(x)$$

- 解が多項式のみであるため、計算時間が短くなる。
- 多群への拡張が容易であり、計算時間も短いため、近代ノード法開発の初期によく用いられた手法である。
- ノード内の中性子束分布の変化が大きい場合、多項式では精度良く表すことができない。(例:MOX燃料、反射体に隣接した燃料など)
- また、中性子束分布を(重み付き残差法で無理矢理)多項式で表すため、そのしわ寄せが局所的に現れることがある→Polynomial dip、負の中性子束
- 代表的なコード: SIMULATE3(SSP)、MOSRA-Light(原研), ANC(WH)

# 多項式ノード法

- 多項式展開されたノード内の中性子束は拡散方程式の解析解ではない。
- あくまでも、「ノード内で重みをつけて積分された」拡散方程式を満足するだけである。
- このため、多項式ノード法で得られる中性子束分布は、「物理的でない」振る舞いを示すことがある。(Polynomial dip, 負の中性子束)
- このような現象は、特にノード内で中性子束分布が局所的に変動する場合によく見られる。





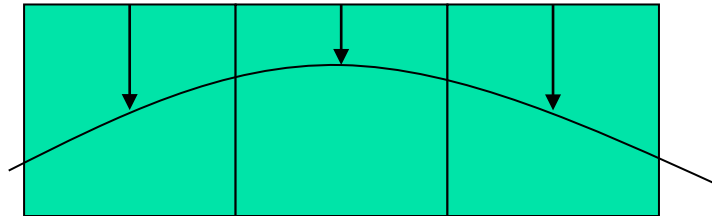
# 準解析的ノード法

- 2群計算に特化した方法であり、1群は多項式ノード法、2群は多項式解析的ノード法を用いる。
- 一般に、1群(高速群)は中性子束の変化が緩やかであるため、多項式ノード法で十分な精度が得られる。
- 一方、2群(熱群は)中性子束の変化が急峻であるため、多項式ノード法では十分な精度が得られない。このため、多項式解析ノード法を用いる。
- $L(x)$ はQTL近似を用いる。
- 代表的なコード: SIMULATE3(SSP)

# 横方向漏れの計算

- 全てのノード法で、横方向漏れ $L_g(x)$ の空間分布が必要となる。 $L_g(x)$ は、ノード毎に、一つの値を求める。
- 横方向漏れの計算方法には様々な方法が考えられるが、一般的には、隣接する3ノードの漏れを二次式( $l_2x^2+l_1x+l_0$ )でフィッティングする(Quadratic Transverse Leakage approximation, QTL)。

$\bar{J}_{i-1}$        $\bar{J}_i$        $\bar{J}_{i+1}$



- その他の手法
  - バックリング近似(中性子漏れが中性子束分布に比例)
  - 平坦近似(中性子漏れの空間分布を考慮しない)

# 横方向漏れの計算

- QTL近似を用いると一次元方向の拡散方程式は

$$-D_g \frac{d^2}{dx^2} \Phi_{x,g}(x) + \Sigma_{r,g} \Phi_{x,g}(x) = \frac{\lambda_g}{k} \sum_{g'} \nu \Sigma_{f,g'} \Phi_{x,g'}(x) + \sum_{g' \neq g} \Sigma_{s,g' \rightarrow g} \Phi_{x,g'}(x) + ES_{x,g}(x) - l_{2,g} x^2 - l_{1,g} x - l_{0,g}$$

- 横に並んだ三つのノードの番号をn-1, n, n+1とする。この場合、 $l_2, l_1, l_0$ は以下の式を満足する。

$$\frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} (l_2 x^2 + l_1 x + l_0) dx = \frac{1}{x_2 - x_1} \left( \frac{J_{n-1,y+} - J_{n-1,y-}}{\Delta y} + \frac{J_{n-1,z+} - J_{n-1,z-}}{\Delta z} \right)$$

$$\frac{1}{x_3 - x_2} \int_{x_2}^{x_3} (l_2 x^2 + l_1 x + l_0) dx = \frac{1}{x_3 - x_2} \left( \frac{J_{n,y+} - J_{n,y-}}{\Delta y} + \frac{J_{n,z+} - J_{n,z-}}{\Delta z} \right)$$

$$\frac{1}{x_4 - x_3} \int_{x_3}^{x_4} (l_2 x^2 + l_1 x + l_0) dx = \frac{1}{x_4 - x_3} \left( \frac{J_{n+1,y+} - J_{n+1,y-}}{\Delta y} + \frac{J_{n+1,z+} - J_{n+1,z-}}{\Delta z} \right)$$

$$x_1 = -\Delta x_{n-1} - \Delta x_n / 2 \quad x_2 = -\Delta x_n / 2 \quad x_3 = +\Delta x_n / 2 \quad x_4 = +\Delta x_{n+1} + \Delta x_n / 2$$



# 横方向漏れの計算

- 中性子流は以下の式から計算

$$J_{n,y+} = -D \frac{d}{dy} \Phi_{n,y}(y) \Big|_{y=\Delta y/2}$$

$$J_{n,y-} = -D \frac{d}{dy} \Phi_{n,y}(y) \Big|_{y=-\Delta y/2}$$

$$J_{n,z+} = -D \frac{d}{dz} \Phi_{n,z}(z) \Big|_{z=\Delta z/2}$$

$$J_{n,z-} = -D \frac{d}{dz} \Phi_{n,z}(z) \Big|_{z=-\Delta z/2}$$

- $I_2, I_1, I_0$  は三元連立方程式を解くことで求められる



# 横方向漏れの計算

- 炉心外周部など、「横に並んだ三つのノード」が存在しない場合には
  - 隣接2ノードのみで横方向漏れを算出する。この場合、横方向漏れは1次となる。
  - 当該ノード内の中性子束分布と横方向漏れが比例すると仮定する。(バックリング近似)
  - 外側のノードにおける横方向漏れを零と仮定し、QTL近似を適用する。
  - 外部境界を「反射」境界条件と考えて当該ノードと同じ横方向漏れのノードが外側に配置されていると仮定する。(もしくは、「外側のノード」の横方向漏れにアルベドを乗じるなどの工学的補正を使用)

# 中性子源分布の計算

- 多項式解析的ノード法では、中性子源項を多項式(一般に二次式:  $[f_2x^2+f_1x+f_0]$ )で展開する。

$$Q_g(x) = \frac{\chi_g}{k_{eff}} \sum_{g'} \nu \Sigma_{f,g'} \bar{\phi}_{g'}(x) + \sum_{g' \neq g} \Sigma_{s,g' \rightarrow g} \bar{\phi}_{g'}(x)$$

- そのために、まず、中性子束を二次式で展開する
- 多項式の係数の拘束条件としては以下のものが考えられる。
  - ノード平均中性子束(1個)
  - ノード表面中性子束(2個)
  - ノード表面中性子流(2個)
  - 重み付き残差法(2個)
- これらのうち、ノード平均中性子束とその他のものの組み合わせ(合計3個)を拘束条件とする。
- ノード表面の中性子束もしくは中性子流を用いるより、重み付き残差法を用いた方が精度が高くなる。

# 中性子源分布の計算

- 具体的な拘束条件は以下の通り(原点はノード中央)

$$\int_{x_3}^{x_2} \Phi(x) dx = \int_{x_3}^{x_2} (f_2 x^2 + f_1 x + f_0) dx$$

$$\Phi(x_2) = f_2 x_2^2 + f_1 x_2 + f_0$$

$$\Phi(x_3) = f_2 x_3^2 + f_1 x_3 + f_0$$

$$-D \frac{d\Phi(x)}{dx} \Big|_{x=x_2} = -D \frac{d}{dx} (f_2 x^2 + f_1 x + f_0) \Big|_{x=x_2}$$

$$-D \frac{d\Phi(x)}{dx} \Big|_{x=x_3} = -D \frac{d}{dx} (f_2 x^2 + f_1 x + f_0) \Big|_{x=x_3}$$

$$\int_{x_3}^{x_2} w_1(x) \Phi(x) dx = \int_{x_3}^{x_2} w_1(x) (f_2 x^2 + f_1 x + f_0) dx$$

$$\int_{x_3}^{x_2} w_2(x) \Phi(x) dx = \int_{x_3}^{x_2} w_2(x) (f_2 x^2 + f_1 x + f_0) dx$$

$$x_2 = -\Delta x_n / 2$$

$$x_3 = +\Delta x_n / 2$$

$$w_1(x) = \frac{x - \frac{x_3 - x_2}{2}}{x_3 - x_2}$$
$$w_2(x) = \left( \frac{x - \frac{x_3 - x_2}{2}}{x_3 - x_2} \right)^2 - \frac{1}{12}$$

# 中性子源分布の計算

- 二次の中性子源分布は、二次の中性子束分布から計算する。

$$Q_g(x) = \frac{\chi_g}{k_{eff}} \sum_{g'} \nu \Sigma_{f,g'} \bar{\phi}_{g'}(x) + \sum_{g' \neq g} \Sigma_{s,g' \rightarrow g} \bar{\phi}_{g'}(x)$$

に以下の式を代入して

$$\bar{\phi}_{g'}(x) = f_{2,g'} x^2 + f_{1,g'} x + f_{0,g'}$$

$$Q_g(x) = \left( \frac{\chi_g}{k_{eff}} \sum_{g'} \nu \Sigma_{f,g'} f_{2,g'} + \sum_{g' \neq g} \Sigma_{s,g' \rightarrow g} f_{2,g'} \right) x^2 \\ + \left( \frac{\chi_g}{k_{eff}} \sum_{g'} \nu \Sigma_{f,g'} f_{1,g'} + \sum_{g' \neq g} \Sigma_{s,g' \rightarrow g} f_{1,g'} \right) x \\ + \left( \frac{\chi_g}{k_{eff}} \sum_{g'} \nu \Sigma_{f,g'} f_{0,g'} + \sum_{g' \neq g} \Sigma_{s,g' \rightarrow g} f_{0,g'} \right)$$



# 中性子源分布の展開次数

- 中性子源を4次多項式とすることも可能
- ただし、高次の多項式を用いる場合、フィッティングに伴う誤差 (polynomial dip) などが生じる可能性もあり、精度が向上するとは必ずしも限らない
- 中性子源項に二次多項式と四次多項式を用いた場合の計算精度の比較では、両者はほとんど差異がないとされている
- ただし、1x1ノード/集合体で、MOX燃料に直接水反射体が隣接するなど、ノード内の中性子束の変化が大きい場合には、四次多項式の精度が高くなる場合もある
- ただし、このような中性子源項の空間変化が大きい場合においても、2x2ノード/集合体とすると、二次多項式と四次多項式の精度の違いはほとんど無い

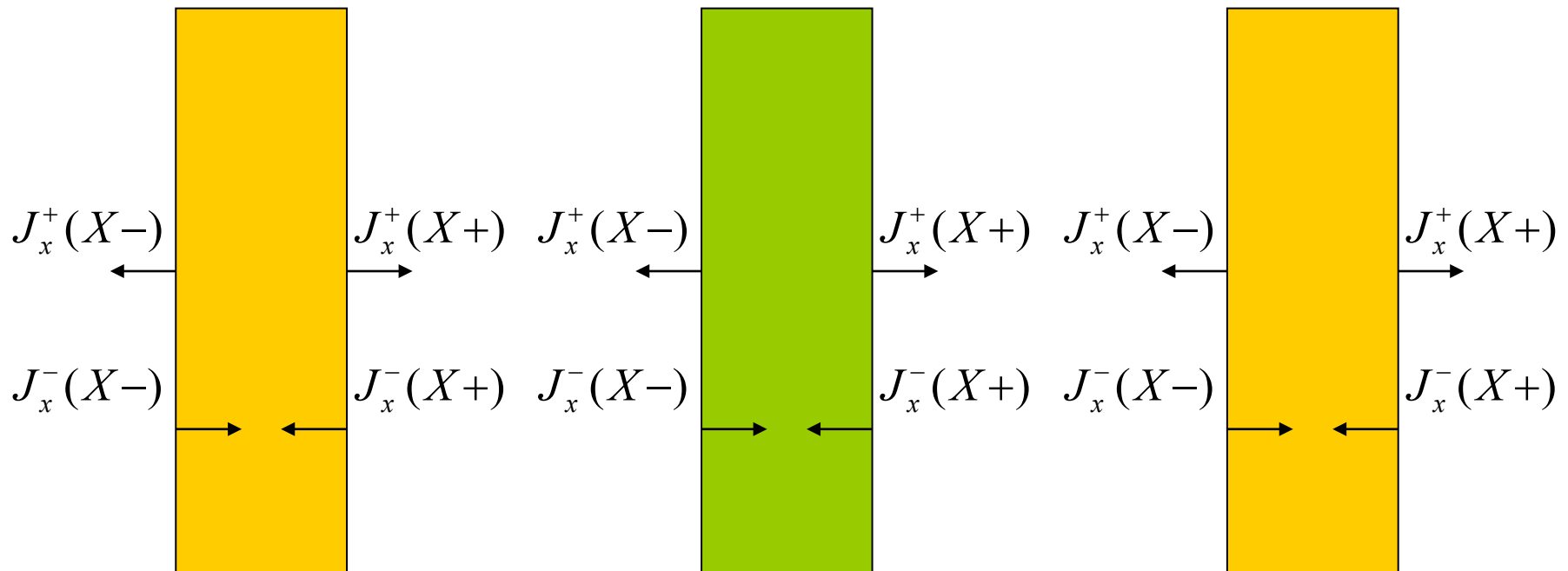


# 反復計算時の未知数に基づく分類

- 応答行列タイプ
  - 部分中性子流が未知数
  - 並列計算との親和性大
  - メモリ量大
  - 収束性は有限差分タイプに劣る
  - 境界の取り扱いが容易
  - コーディングが比較的容易
- 有限差分タイプ
  - 中性子束が未知数
  - 並列計算との親和性小
  - メモリ量小
  - 収束性良好
  - 境界の取り扱いが複雑
  - コーディングが比較的複雑

# 応答行列タイプの反復計算

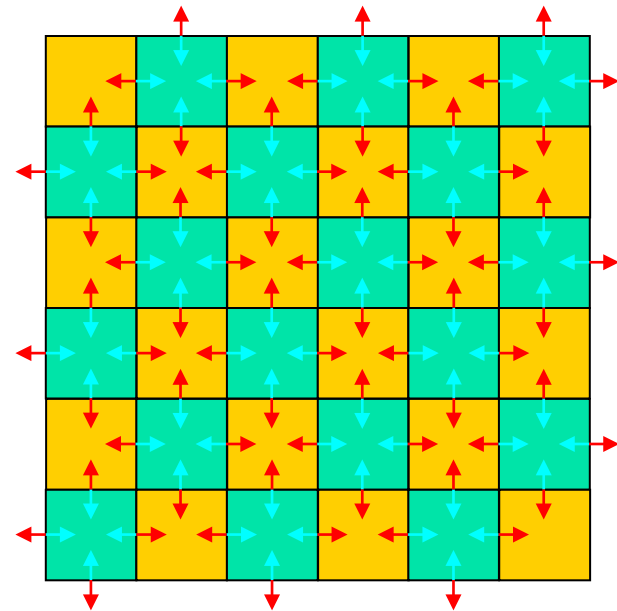
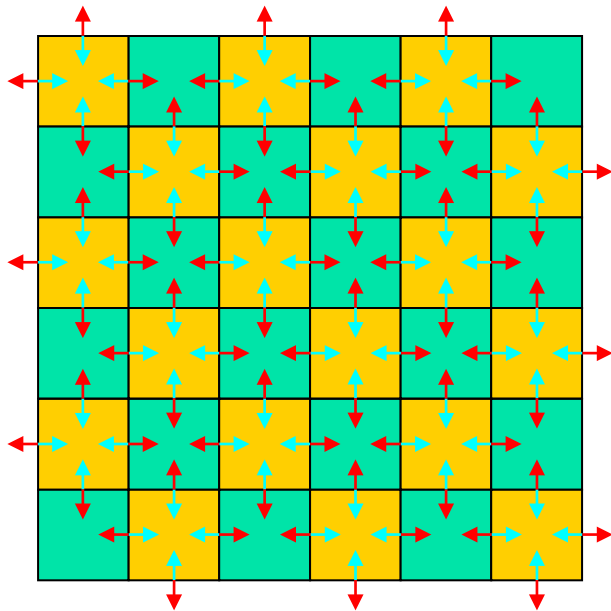
- 流出部分中性子流( $J^+$ )を入射部分中性子流( $J^-$ )の関数として求める。入射に対する流出、つまり”応答”を求める。
- あるノードの入射部分中性子流は隣接ノードの流出部分中性子流である。従って、一つおきにスイープを行う。





# 応答行列タイプの反復計算

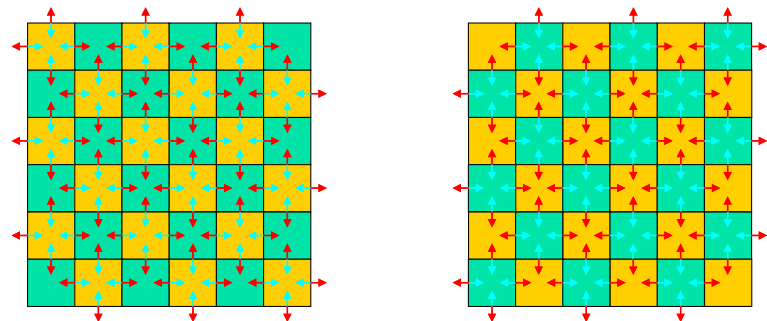
- このような反復法をred-black iterationと呼ぶ。



# 応答行列タイプの反復計算

- 反復計算手順は以下の通り

- (1) 全てのノードに対して中性子束、入射・放出部分中性子流を仮定
- (2) 全てのノードに対して中性子源、横方向漏れを計算
- (3) 全ての”red”ノードの入射中性子流を更新
- (4) 全ての”red”ノードに対して、 $x, y, z$ 方向の放出中性子流を計算
- (5) 全ての”black”ノードの入射中性子流を更新
- (6) 全ての”black”ノードに対して、 $x, y, z$ 方向の放出中性子流を計算
- (7) 全てのノードの中性子源・横方向漏れを更新
- (8) (3)に戻る





# 応答行列タイプの問題点

- 応答行列タイプの反復計算では、ノード表面毎に入射・流出部分中性子流が必要・・・メモリ容量の増大
- 応答行列タイプの反復計算で現れる反復行列には、特定の加速法(CMR, extrapolation法など)しか使用できない。例えば、SOR法を用いると発散する(反復行列のスペクトル半径が1を超える)

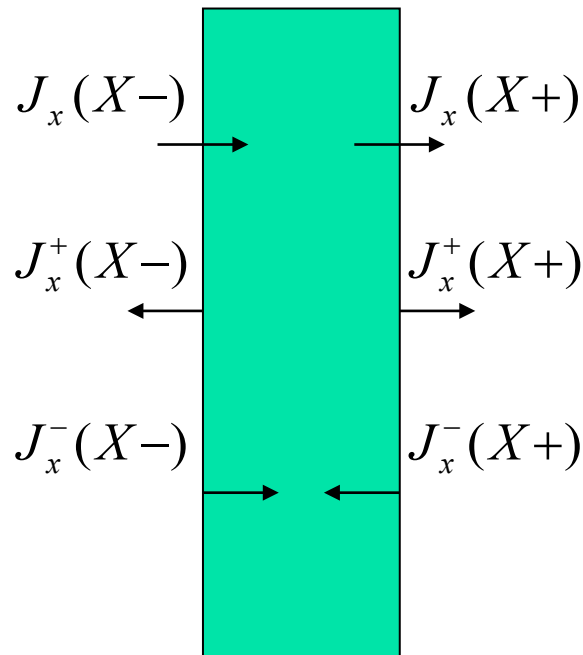


# 応答行列タイプの結合係数計算

- 応答行列タイプでは、結合係数は、通常解析的に求められる。
- 取り扱い方法としては、部分中性子流の応答を行列の形で評価する場合と、各面の部分中性子流の応答の形で評価する場合の2ケースがある。

# 結合係数の計算： 応答行列タイプ・解析的(1)

- MOSRA-Light等に用いられている手法であり、ノードへの流入部分中性子束の値から、流出部分中性子流を計算する「応答行列」を解析的に求める。



# 結合係数の計算： 応答行列タイプ・解析的(1)

- 近代ノード法の基礎式を以下の境界条件に対して解く。

解くべき式

$$-D_g \frac{d}{dx^2} \bar{\phi}_g(x) + \Sigma_{r,g} \bar{\phi}_g(x) = Q_g(x) - L_g(x)$$

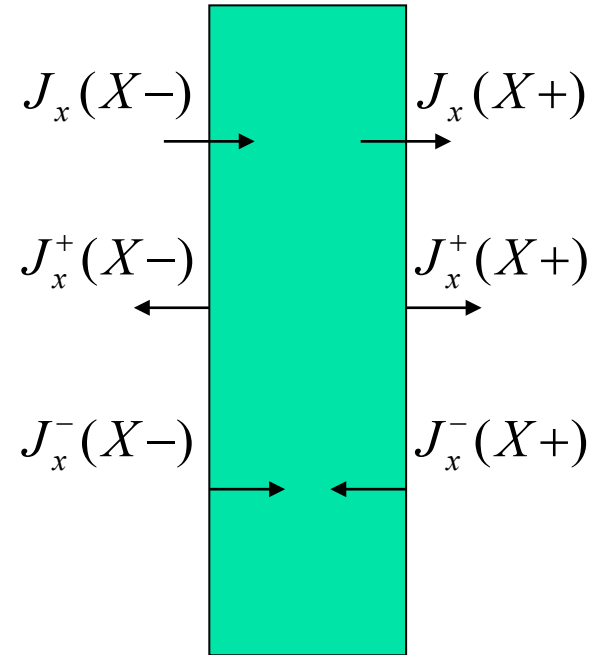
境界条件

$$-D \left. \frac{d\bar{\phi}(x)}{dx} \right|_{x=X-} = J_x(X-) = -J_x^+(X-) + J_x^-(X-)$$

$$-D \left. \frac{d\bar{\phi}(x)}{dx} \right|_{x=X+} = J_x(X+) = +J_x^+(X+) - J_x^-(X+)$$

$$\bar{\phi}(X-) = 2 \left[ J_x^+(X-) + J_x^-(X-) \right]$$

$$\bar{\phi}(X+) = 2 \left[ J_x^+(X+) + J_x^-(X+) \right]$$



部分 中性子流	中性子束	正味 中性子流
$J_x^\pm(X+)$	$= \frac{1}{4} \bar{\phi}(X+) \pm \frac{1}{2} J_x(X+)$	
$J_x^\mp(X-)$	$= \frac{1}{4} \bar{\phi}(X-) \pm \frac{1}{2} J_x(X-)$	



# 結合係数の計算： 応答行列タイプ・解析的(1)

- 二階の微分方程式では未定定数が二つ現れるため、境界条件は二つ必要。
- さらに、部分中性子流を用いる場合、放出中性子流も未知数となるため、未知数は未定定数を含め合計4つ。
- これを解くため、拘束条件が4つ必要となる。(解析的ノード法、多項式解析的ノード法)

# 結合係数の計算： 応答行列タイプ・解析的(1)

- 多項式ノード法では、一般的に4次の多項式を使用する。中性子束の係数は5つ、さらに放出中性子流を含め、未知数は7つとなる。
- 多項式ノード法の場合は前述の拘束条件(4つ)では足りないので、以下の式(Galerkin重み残差法)を使用する。

追加の

拘束条件

$$\int_{X^-}^{X^+} \left[ -D_g \frac{d}{dx^2} \bar{\phi}_g(x) + \Sigma_{a,g} \bar{\phi}_g(x) \right] f_0(x) dx = \int_{X^-}^{X^+} [Q_g(x) - L_g(x)] f_0(x) dx$$

$$\int_{X^-}^{X^+} \left[ -D_g \frac{d}{dx^2} \bar{\phi}_g(x) + \Sigma_{a,g} \bar{\phi}_g(x) \right] f_3(x) dx = \int_{X^-}^{X^+} [Q_g(x) - L_g(x)] f_3(x) dx$$

$$\int_{X^-}^{X^+} \left[ -D_g \frac{d}{dx^2} \bar{\phi}_g(x) + \Sigma_{a,g} \bar{\phi}_g(x) \right] f_4(x) dx = \int_{X^-}^{X^+} [Q_g(x) - L_g(x)] f_4(x) dx$$

注)  $f_0, f_1, f_2$  を用いることも出来る。(モーメント重み残差法)ただし、Galerkin重みを用いた方が精度がよい。 $f_0 \sim f_4$  は多項式ノード法で説明した多項式。



# 結合係数の計算： 応答行列タイプ・解析的(1)

- 最終的に、以下の形にする。

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_x^+(X-) \\ J_x^+(X+) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_x^-(X-) \\ J_x^-(X+) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbf{A}\vec{J}^+ = \mathbf{B}\vec{J}^- + \vec{q}$$

$$\Rightarrow \vec{J}^+ = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\vec{J}^- + \mathbf{A}^{-1}\vec{q}$$

- これにより、red-black反復を行うことが出来る
- 二次元体系(x-y)の場合はベクトルの要素が4つ、三次元体系の場合、ベクトルの要素が6つになる。
- 一次元体系の場合、マトリックスAは2x2であり、解析的に逆行列を求めることは容易である。一方、三次元では、6x6の行列を扱うことになり、解析的に逆行列を求めることは難しい→数値的に逆行列を計算

# 結合係数の計算： 応答行列タイプ・解析的(1)

- ノード平均の中性子束を計算するため、元々の三次元拡散方程式をノード内で積分

$$\frac{1}{\Delta x \Delta y \Delta z} \int_{-\Delta z/2}^{+\Delta z/2} \int_{-\Delta y/2}^{+\Delta y/2} \int_{-\Delta x/2}^{+\Delta x/2} -D_g \left( \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2} \right) \phi_g(x, y, z) dx dy dz + \Sigma_{r,g} \bar{\phi}_g = \frac{\chi_g}{k} \sum_{g'} \nu \Sigma_{f,g'} \bar{\phi}_{g'}$$

$$\bar{\phi}_g = \frac{1}{\Delta x \Delta y \Delta z} \int_{-\Delta z/2}^{+\Delta z/2} \int_{-\Delta y/2}^{+\Delta y/2} \int_{-\Delta x/2}^{+\Delta x/2} \phi_g(x, y, z) dx dy dz + \sum_{g' \neq g} \Sigma_{s,g' \rightarrow g} \bar{\phi}_{g'} + ES_g$$

$$= \frac{1}{\Delta x} \int_{-\Delta x/2}^{+\Delta x/2} \Phi_{x,g}(x) dx$$

$$= \frac{1}{\Delta y} \int_{-\Delta y/2}^{+\Delta y/2} \Phi_{y,g}(y) dy$$

$$= \frac{1}{\Delta z} \int_{-\Delta z/2}^{+\Delta z/2} \Phi_{z,g}(z) dz$$

$$ES_g = \frac{1}{\Delta x \Delta y \Delta z} \int_{-\Delta z/2}^{+\Delta z/2} \int_{-\Delta y/2}^{+\Delta y/2} \int_{-\Delta x/2}^{+\Delta x/2} ES_g(x, y, z) dx dy dz$$

# 結合係数の計算： 応答行列タイプ・解析的(1)

## ■ 第一項を変形

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta x \Delta y \Delta z} \int_{-\Delta z/2}^{+\Delta z/2} \int_{-\Delta y/2}^{\Delta y/2} \int_{-\Delta x/2}^{+\Delta x/2} -D_g \frac{d^2}{dx^2} \phi_g(x, y, z) dx dy dz \\ &= \frac{1}{\Delta x \Delta y \Delta z} \Delta y \Delta z \int_{-\Delta x/2}^{+\Delta x/2} -D_g \frac{d^2}{dx^2} \Phi_{x,g}(x) dx \\ &= \frac{1}{\Delta x \Delta y \Delta z} \Delta y \Delta z [J_{+\Delta x/2} - J_{-\Delta x/2}] \end{aligned}$$

$$\Phi_{x,g}(x) = \frac{1}{\Delta y \Delta z} \int_{-\Delta y/2}^{\Delta y/2} \int_{-\Delta x/2}^{+\Delta x/2} \phi_g(x, y, z) dy dz$$

$$J_{x,g}(x) = -D_g \frac{d}{dx} \Phi_{x,g}(x)$$

# 結合係数の計算： 応答行列タイプ・解析的(1)

- 以下のノードバランス式を得る。

$$\frac{1}{\Delta x \Delta y \Delta z} \Delta y \Delta z [J_{+\Delta x/2} - J_{-\Delta x/2}] + \frac{1}{\Delta x \Delta y \Delta z} \Delta x \Delta z [J_{+\Delta y/2} - J_{-\Delta y/2}] + \frac{1}{\Delta x \Delta y \Delta z} \Delta x \Delta y [J_{+\Delta z/2} - J_{-\Delta z/2}]$$

$$+ \Sigma_{r,g} \bar{\phi}_g = \frac{\chi_g}{k} \sum_{g'} \nu \Sigma_{f,g'} \bar{\phi}_{g'} + \sum_{g' \neq g} \Sigma_{s,g' \rightarrow g} \bar{\phi}_{g'} + ES_g$$

- 部分中性子流を使用すると

$$\frac{1}{\Delta x \Delta y \Delta z} \Delta y \Delta z [J_{+\Delta x/2}^+ - J_{+\Delta x/2}^- - J_{-\Delta x/2}^+ + J_{-\Delta x/2}^-]$$

$$+ \frac{1}{\Delta x \Delta y \Delta z} \Delta x \Delta z [J_{+\Delta y/2}^+ - J_{+\Delta y/2}^- - J_{-\Delta y/2}^+ + J_{-\Delta y/2}^-]$$

$$+ \frac{1}{\Delta x \Delta y \Delta z} \Delta x \Delta y [J_{+\Delta z/2}^+ - J_{+\Delta z/2}^- - J_{-\Delta z/2}^+ + J_{-\Delta z/2}^-]$$

$$+ \Sigma_{r,g} \bar{\phi}_g = \frac{\chi_g}{k} \sum_{g'} \nu \Sigma_{f,g'} \bar{\phi}_{g'} + \sum_{g' \neq g} \Sigma_{s,g' \rightarrow g} \bar{\phi}_{g'} + ES_g$$



# 結合係数の計算： 応答行列タイプ・解析的(1)

- 入射部分中性子流から応答行列を用いて流出部分中性子流を計算できる。入射/流出部分中性子流が計算できると、部分中性子流で表したノードバランス式からノード平均の中性子束が計算できる。
- ノード平均の中性子束が計算できると、核分裂/散乱中性子源を更新することが出来る。

# 結合係数の計算： 応答行列タイプ・解析的(2)

- 解析的(1)の方法では、ノード毎に応答行列を保持しておく必要があり、メモリ容量の面から問題
- そこで、ある面(例えばx+面)に着目したときの流出/流入部分中性子流の関係を解析的に導くことを考える。

$$J_{x+}^+ = aJ_{x+}^- + b\bar{\Phi} + q$$

# 結合係数の計算： 応答行列タイプ・解析的(2)

- 近代ノード法の基礎式を以下の条件で解く。

解くべき式(Q, Lは二次多項式で近似)

$$-D_g \frac{d}{dx^2} \Phi_{x,g}(x) + \Sigma_{r,g} \Phi_{x,g}(x) = Q_g(x) - L_g(x)$$

境界条件

$$-D \left. \frac{d\Phi_{x,g}(x)}{dx} \right|_{x=-\Delta x/2} = J_x(-\Delta x/2) = -J_x^+(-\Delta x/2) + J_x^-(-\Delta x/2)$$

$$-D \left. \frac{d\Phi_{x,g}(x)}{dx} \right|_{x=+\Delta x/2} = J_x(+\Delta x/2) = +J_x^+(+\Delta x/2) - J_x^- (+\Delta x/2)$$

$$\Phi_{x,g}(-\Delta x/2) = 2 \left[ J_x^+(-\Delta x/2) + J_x^-(-\Delta x/2) \right]$$

$$\Phi_{x,g}(+\Delta x/2) = 2 \left[ J_x^+(+\Delta x/2) + J_x^- (+\Delta x/2) \right]$$

# 結合係数の計算： 応答行列タイプ・解析的(2)

- さらに、部分中性子流を用いる場合、放出中性子流も未知数となるため、未知数は未定定数を含め合計4つ。さらに、X-面の入射部分中性子流も消去することから未知数と考え、未知数は合計5つ。
  - 以下の拘束条件を追加
- $$\frac{1}{\Delta x} \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} \Phi_{x,g}(x) dx = \bar{\Phi}_g$$
- 5個の境界条件と拘束条件を用いると、解析的に以下の関係を導ける。

$$J_{+\Delta x/2,g}^+ = a_{+\Delta x/2,g} J_{+\Delta x/2,g}^- + b_{+\Delta x/2,g} \bar{\Phi}_g + q_{+\Delta x/2,g}$$



# 結合係数の計算： 応答行列タイプ・解析的(2)

- 部分中性子流で表したノードバランス式は

$$\frac{1}{\Delta x \Delta y \Delta z} \Delta y \Delta z \left[ J_{+\Delta x/2}^+ - J_{+\Delta x/2}^- - J_{-\Delta x/2}^+ + J_{-\Delta x/2}^- \right]$$

$$+ \frac{1}{\Delta x \Delta y \Delta z} \Delta x \Delta z \left[ J_{+\Delta y/2}^+ - J_{+\Delta y/2}^- - J_{-\Delta y/2}^+ + J_{-\Delta y/2}^- \right]$$

$$+ \frac{1}{\Delta x \Delta y \Delta z} \Delta x \Delta y \left[ J_{+\Delta z/2}^+ - J_{+\Delta z/2}^- - J_{-\Delta z/2}^+ + J_{-\Delta z/2}^- \right]$$

$$+ \Sigma_{r,g} \bar{\phi}_g = \frac{\chi_g}{k} \sum_{g'} \nu \Sigma_{f,g'} \bar{\phi}_{g'} + \sum_{g' \neq g} \Sigma_{s,g' \rightarrow g} \bar{\phi}_{g'} + ES_g$$

- これに以下の関係を代入

$$J_{+\Delta x/2,g}^+ = a_{+\Delta x/2,g} J_{+\Delta x/2,g}^- + b_{+\Delta x/2,g} \bar{\Phi}_g + q_{+\Delta x/2,g}$$

$$J_{-\Delta x/2,g}^+ = a_{-\Delta x/2,g} J_{-\Delta x/2,g}^- + b_{-\Delta x/2,g} \bar{\Phi}_g + q_{-\Delta x/2,g}$$

...

$$J_{-\Delta z/2,g}^+ = a_{-\Delta z/2,g} J_{-\Delta z/2,g}^- + b_{-\Delta z/2,g} \bar{\Phi}_g + q_{-\Delta z/2,g}$$

# 結合係数の計算： 応答行列タイプ・解析的(2)

- すると、流出中性子流が消去でき、未知数は、ノード平均中性子束のみとなり、この値を求めることができる。
- ノード平均中性子束が求まると、以下の関係からノード平均流出中性子流が求まる。

$$J_{+\Delta x/2,g}^+ = a_{+\Delta x/2,g} J_{+\Delta x/2,g}^- + b_{+\Delta x/2,g} \bar{\Phi}_g + q_{+\Delta x/2,g}$$

$$J_{-\Delta x/2,g}^+ = a_{-\Delta x/2,g} J_{-\Delta x/2,g}^- + b_{-\Delta x/2,g} \bar{\Phi}_g + q_{-\Delta x/2,g}$$

...

$$J_{-\Delta z/2,g}^+ = a_{-\Delta z/2,g} J_{-\Delta z/2,g}^- + b_{-\Delta z/2,g} \bar{\Phi}_g + q_{-\Delta z/2,g}$$

# 結合係数の計算： 応答行列タイプ・解析的(1, 2)

- 解析的(1)の計算フロー
  - 応答行列を用いて、入射部分中性子流から流出部分中性子流を計算
  - 入射/流出部分中性子流から、ノード平均中性子束を計算
  - 核分裂/散乱中性子源を更新
- 解析的(2)の計算フロー
  - 入射部分中性子流から、ノード平均中性子束を計算
  - 流出部分中性子流を計算
  - 核分裂/散乱中性子源を更新

# 結合係数の計算:

## 応答行列タイプ・解析的(1, 2)

- 外部の境界条件としては、アルベド境界条件を用いるのが一般的。例えば、 $-\Delta x/2$ が外部境界とすると

$$J_{-\Delta x/2,g}^- = \alpha J_{-\Delta x/2,g}^+$$

- 回転や対角対象境界条件の場合には、対応する部分の流出中性子流と流入中性子流を「つないでやれば」よい
- 後述の有限差分方式に比べると、非常に単純

# 有限差分タイプの反復計算

- 拡散方程式に対して有限差分近似を適用すると

$$J = -\frac{2D_i D_{i+1}}{D_i \Delta x_{i+1} + D_{i+1} \Delta x_i} (\Phi_{i+1} - \Phi_i)$$

- 有限差分タイプの近代ノード法では、中性子流を、隣接するノードの平均中性子束の関数として表す。

$$J = f(\Phi_{i+1}, \Phi_i)$$

- 関数の形で以下の二つに分類される。

- 非線形反復タイプ  $J = -\frac{2D_i D_{i+1}}{D_i \Delta x_{i+1} + D_{i+1} \Delta x_i} (\bar{\Phi}_{i+1} - \bar{\Phi}_i) + D^{cor} (\bar{\Phi}_{i+1} + \bar{\Phi}_i)$
- 解析的粗メッシュ差分タイプ

$$J = -D_{i+1}^{Ana} \bar{\Phi}_{i+1} + D_i^{Ana} \bar{\Phi}_i + S_{i,i+1}$$



# 有限差分タイプの反復計算

---

- 中性子束のみを記憶するので、メモリ量が少ない。
- 有限差分式を用いて反復計算を行うので、これまでに開発された様々な加速法を使用することが出来る。



# 有限差分タイプの結合係数計算

- 有限差分タイプの結合計算には、解析的手法と、数値的に評価する手法(非線形反復法)が存在する。
- 解析的手法では、ノード間の正味中性子流を、ノード平均の中性子束の関数として解析的に表す(Alytic Coarse Mesh Finite Difference, ACMFD)。
- 非線形反復法では、ノードが二つ隣接した問題を解析的に評価し、これに基づいて、評価した正味中性子流から結合係数を数値的に計算する。

# 結合係数の計算： 有限差分タイプ・解析的

- QTL近似を適用し、中性子源/漏洩項を2次多項式で近似すると

$$-D \frac{d^2}{dx^2} \Phi_x(x) + \Sigma_r \Phi_x(x) = q_2 x^2 + q_1 x + q_0$$

- 解析解は、

$$\Phi_x(x) = A \exp(\kappa x) + C \exp(-\kappa x) + \frac{q_2}{\Sigma_r} x^2 + \frac{q_1}{\Sigma_r} x + \frac{2Dq_2 + \Sigma_r q_0}{(\Sigma_r)^2}$$

$$\kappa = \sqrt{\frac{\Sigma_r}{D}}$$



# 結合係数の計算： 有限差分タイプ・解析的

- 隣接する2ノード( $n, n+1$ )を考えると、未定定数 ( $A, C$ )は2ノード分で四つある。従って、これを求めるために4つの拘束条件が必要(原点はノードの境界であり、応答行列法とは異なっていることに注意)

$$DF_{n,x+} \Phi_{n,x}(0) = DF_{n+1,x-} \Phi_{n+1,x}(0)$$

$$-D_n \left. \frac{d\Phi_{n,x}(x)}{dx} \right|_{x=0} = -D_{n+1} \left. \frac{d\Phi_{n+1,x}(x)}{dx} \right|_{x=0}$$

$$\frac{1}{\Delta x_n} \int_{-\Delta x_n}^0 \Phi_{n,x}(x) = \bar{\Phi}_{n,x}$$

$$\frac{1}{\Delta x_{n+1}} \int_0^{\Delta x_{n+1}} \Phi_{n+1,x}(x) = \bar{\Phi}_{n+1,x}$$

# 結合係数の計算： 有限差分タイプ・解析的

- 前述の4つの拘束条件を用いて、未定定数を消去できる。

- ノード間の中性子流は

$$J_{n,x+} = -D_n \left. \frac{d\Phi_{n,x}(x)}{dx} \right|_{x=0}$$

- であり、未定定数を消去した中性子束分布を代入することで、中性子流をノード平均中性子束の関数として表すことが出来る。

# 結合係数の計算： 有限差分タイプ・解析的

- 得られる正味中性子流の表式は以下の通り

$$J_{n,x+} = -D_n \left. \frac{d\Phi_{n,x}(x)}{dx} \right|_{x=0} = -D_{n+1}^{Ana} \bar{\Phi}_{n+1} + D_n^{Ana} \bar{\Phi}_n + S_{n,n+1}$$

$$D_n^{Ana} = \frac{2D_n^* D_{n+1}^* DF_{n,x+}}{D_n^* \Delta x_{n+1} DF_{n+1,x-} + D_{n+1}^* \Delta x_n DF_{n,x+}} f_n$$

$$D_{n+1}^{Ana} = \frac{2D_n^* D_{n+1}^* DF_{n+1,x-}}{D_n^* \Delta x_{n+1} DF_{n+1,x-} + D_{n+1}^* \Delta x_n DF_{n,x+}} f_{n+1}$$

$$D_n^* = D_n \frac{\cosh(\tau_n)}{\sinh(\tau_n)} \tau_n$$

$$D_{n+1}^* = D_{n+1} \frac{\cosh(\tau_{n+1})}{\sinh(\tau_{n+1})} \tau_{n+1}$$

$$f_n = \frac{1}{\sinh(\tau_n) \cosh(\tau_n)} \tau_n$$

$$f_{n+1} = \frac{1}{\sinh(\tau_{n+1}) \cosh(\tau_{n+1})} \tau_{n+1}$$

$$\tau_n = \frac{\Delta x_n \kappa_n}{2}$$

$$\tau_{n+1} = \frac{\Delta x_{n+1} \kappa_{n+1}}{2}$$

$$S_{n,n+1} = D_n^{Ana} (\alpha_n q_{2,n} + \beta_n q_{1,n} + \gamma_n q_{0,n}) - D_{n+1}^{Ana} (\alpha_{n+1} q_{2,n+1} + \beta_{n+1} q_{1,n+1} + \gamma_{n+1} q_{0,n+1})$$

$$\alpha_n = \frac{a_n}{\Sigma_{r,n}} + \frac{2D_n c_n}{(\Sigma_{r,n})^2}$$

$$\beta_n = \frac{b_n}{\Sigma_{r,n}}$$

$$\gamma_n = \frac{c_n}{\Sigma_{r,n}}$$

$$a_n = -\frac{(\Delta x_n)^2}{3}$$

$$b_n = \frac{2 + (\Delta x_n \kappa_n)^2 - 2 \cosh(\Delta x_n \kappa_n)}{2\Delta x_n (\kappa_n)^2}$$

$$c_n = \frac{-\Delta x_n \kappa_n + \sinh(\Delta x_n \kappa_n)}{\Delta x_n \kappa_n}$$

$$\alpha_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{\Sigma_{r,n+1}} + \frac{2D_{n+1} c_{n+1}}{(\Sigma_{r,n+1})^2}$$

$$\beta_{n+1} = \frac{b_{n+1}}{\Sigma_{r,n+1}}$$

$$\gamma_{n+1} = \frac{c_{n+1}}{\Sigma_{r,n+1}}$$

$$a_{n+1} = -\frac{(\Delta x_{n+1})^2}{3}$$

$$b_{n+1} = -\frac{2 + (\Delta x_{n+1} \kappa_{n+1})^2 - 2 \cosh(\Delta x_{n+1} \kappa_{n+1})}{2\Delta x_{n+1} (\kappa_{n+1})^2}$$

$$c_{n+1} = \frac{-\Delta x_{n+1} \kappa_{n+1} + \sinh(\Delta x_{n+1} \kappa_{n+1})}{\Delta x_{n+1} \kappa_{n+1}}$$

# 結合係数の計算： 有限差分タイプ・解析的

- アルベド境界における境界条件を求める。アルベド境界では、P1理論の枠内で、以下の関係が成り立つ(x-表面)

$$J^- = \alpha J^+$$

$$J^+ = \frac{1}{4}\Phi - \frac{1}{2}J = \frac{1}{4}\Phi + \frac{1}{2}D \frac{d\Phi}{dx}$$

$$J^- = \frac{1}{4}\Phi + \frac{1}{2}J = \frac{1}{4}\Phi - \frac{1}{2}D \frac{d\Phi}{dx}$$

- これより、 $J^+$ 、 $J^-$ 、 $J$ を消去すると、

$$2 \frac{1+\alpha}{1-\alpha} D \frac{d\Phi}{dx} \Big| = \Phi$$

- X+表面では、

$$-2 \frac{1+\alpha}{1-\alpha} D \frac{d\Phi}{dx} \Big| = \Phi$$

# 結合係数の計算： 有限差分タイプ・解析的

- 外部境界に接しているノードでは、以下の拘束条件を使用(例：ノードの+側表面の $x=0$ が外部境界と仮定)

$$-2 \frac{1+\alpha}{1-\alpha} D_n \left. \frac{d\Phi_{n,x}(x)}{dx} \right|_{x=0} = \Phi_{n,x}(0)$$

$$\frac{1}{\Delta x_n} \int_{-\Delta x_n}^0 \Phi_{n,x}(x) = \bar{\Phi}_{n,x}$$

- これより、未定定数を消去できる

# 結合係数の計算： 有限差分タイプ・解析的

- ノード表面(外部境界, +側表面)での正味中性  
子流は

$$J_{n,x+} = -D_n \left. \frac{d\Phi_{n,x}(x)}{dx} \right|_{x=0} = D_n^{Ana} \bar{\Phi}_n + S_n$$

$$D_n^{Ana} = \frac{2D_n^*}{\Delta x_n + 4D_n^* \frac{1+\alpha}{1-\alpha}} f_n$$

$$\alpha_n = \frac{a_n}{\Sigma_{r,n}} + \frac{2D_n c_n}{(\Sigma_{r,n})^2}$$

$$a_n = -\frac{(\Delta x_n)^2}{3}$$

$$D_n^* = D_n \frac{\cosh(\tau_n)}{\sinh(\tau_n)} \tau_n$$

$$\beta_n = \frac{b_n}{\Sigma_{r,n}}$$

$$b_n = \frac{2 + (\Delta x_n \kappa_n)^2 - 2 \cosh(\Delta x_n \kappa_n)}{2\Delta x_n (\kappa_n)^2}$$

$$f_n = \frac{1}{\sinh(\tau_n) \cosh(\tau_n)} \tau_n$$

$$\gamma_n = \frac{c_n}{\Sigma_{r,n}}$$

$$c_n = \frac{-\Delta x_n \kappa_n + \sinh(\Delta x_n \kappa_n)}{\Delta x_n \kappa_n}$$

$$S_n = D_n^{Ana} (\alpha_n q_{2,n} + \beta_n q_{1,n} + \gamma_n q_{0,n})$$



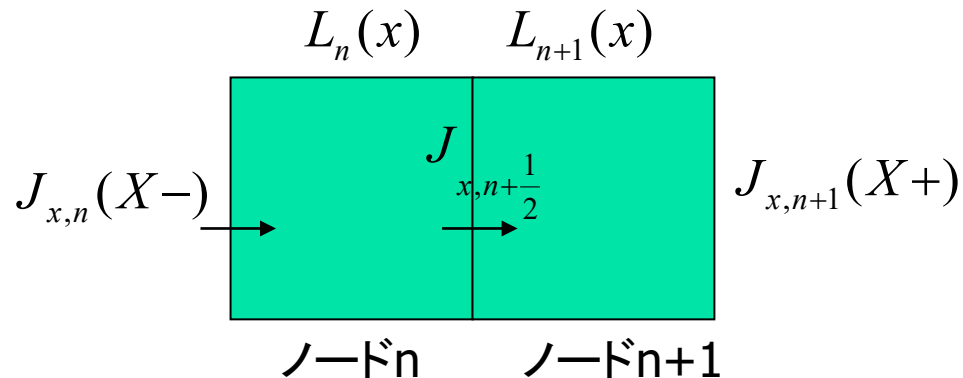
# 結合係数の計算： 有限差分タイプ・解析的

- 有限差分タイプ(解析的)の反復計算は以下のよう  
に行う
  - (1)各ノードの中性子束に初期値を与える。
  - (2)有限差分式を用いて反復計算を行う。
  - (3)横方向漏れ、ノード内の中性子源分布を更新する。
  - (4)各方向の有限差分式の係数( $S_n$ )を更新する。 $(S_n$ に  
は、中性子源の展開係数が含まれているため)
  - (5)更新された係数の有限差分式を用いて反復計算す  
る。
  - (6)(3)～(5)を繰り返す。

# 結合係数の計算:

## 有限差分タイプ・数值的(非線形)

- 有限差分タイプの定式化を行うために、以下の2ノード問題を考える。





# 結合係数の計算： 有限差分タイプ・数值的(非線形)

- 解析的ノード法、多項式解析的ノード法の場合、二つのノードにおける中性子束の解析解を求めるために必要な拘束条件は4つ。
- 以下のような拘束条件を使用する。
  - ノード $n$  (X-側)における中性子流
  - ノード $n+1$  (X+側)における中性子流
  - ノード $n$ (X+側)とノード $n+1$ (X-側)の中性子流の連続性
  - ノード $n$ (X+側)とノード $n+1$ (X-側)の中性子束の連続性
- (注)本資料の当初に述べた二階微分方程式の解析解は、一領域に対するもので、未定定数は二つであったが、今回は二ノードを考えるので、未定定数は四つになる。

# 結合係数の計算:

## 有限差分タイプ・数值的(非線形)

- 具体的な拘束条件(二ノードの境界が原点)

$$DF_{n,x+} \Phi_{n,x}(0) = DF_{n+1,x-} \Phi_{n+1,x}(0)$$

$$-D_n \left. \frac{d\Phi_{n,x}(x)}{dx} \right|_{x=0} = -D_{n+1} \left. \frac{d\Phi_{n+1,x}(x)}{dx} \right|_{x=0}$$

$$-D_n \left. \frac{d\Phi_{n,x}(x)}{dx} \right|_{x=x-} = J_{n,x-}$$

$$-D_{n+1} \left. \frac{d\Phi_{n+1,x}(x)}{dx} \right|_{x=x+} = J_{n+1,x+}$$

注: ノード内の中性子源分布/横方向漏れの計算では、ノードの中央を原点としていたが、ここでは、二ノードの境界が原点であるとしている。従って、二ノード問題を解くときには、中性子源分布と横方向漏れの二次式の座標を(二ノードの境界が原点となるように)変換しなければならない。

# 結合係数の計算:

## 有限差分タイプ・数值的(非線形)

- 多項式ノード法(4次多項式)の場合、2ノードに対して未知数が $5 \times 2 = 10$ 個存在する
- そこで、前ページの拘束条件(4個)に加え0次、3次、4次の展開関数による重み付残差法を用いる。(各ノードで3つずつ、合計6個。応答行列法で説明済み)

# 結合係数の計算:

## 有限差分タイプ・数值的(非線形)

- これにより、各ノードで中性子束分布の解析解を求めることができる。
- そして、この解析解を使用して、ノードn-1とノードnの間の中性子流を求めることができる。

$$-D_n \left. \frac{d\Phi_{n,x}(x)}{dx} \right|_{x=0} = J_{n,x+} = J_{n+1,x-} = -D_{n+1} \left. \frac{d\Phi_{n+1,x}(x)}{dx} \right|_{x=0}$$

# 結合係数の計算:

## 有限差分タイプ・数值的(非線形)

- 一方、有限差分法を用いると、ノードn-1とノードnの間の中性子流は以下のように表すことができる。

$$J_{n,x+}^{FD} = J_{n+1,x-}^{FD} = -\frac{2D_n D_{n+1}}{D_n \Delta x_{n+1} + D_{n+1} \Delta x_n} (\bar{\Phi}_{n+1,x} - \bar{\Phi}_{n,x})$$

$$\bar{\Phi}_{n,x} = \frac{1}{x_3 - x_2} \int_{x_2}^{x_3} \Phi_{n,x}(x) dx$$

$$\bar{\Phi}_{n+1,x} = \frac{1}{x_4 - x_3} \int_{x_3}^{x_4} \Phi_{n+1,x}(x) dx$$

- この値と、先ほど解析的に求めた中性子流は(メッシュ誤差のため)一致しない。

$$J_{n,x+} = J_{n+1,x-} \neq J_{n,x+}^{FD} = J_{n+1,x-}^{FD}$$

# 結合係数の計算:

## 有限差分タイプ・数值的(非線形)

- そこで、有限差分式に補正項を加え、解析的に求めた中性子流を再現できるようにする。(正確には、解析的に求めた中性子流を再現できるように補正係数 $D^{cor}$ を決める)

$$J_{n,x+} = J_{n,x+}^{FD} - D^{cor}(\bar{\Phi}_{n+1} + \bar{\Phi}_n) = -D^{FD}(\bar{\Phi}_{n+1} - \bar{\Phi}_n) - D^{cor}(\bar{\Phi}_{n+1} + \bar{\Phi}_n)$$

$$D^{FD} = \frac{2D_n D_{n+1}}{D_n \Delta x_{n+1} + D_{n+1} \Delta x_n}$$

$D^{cor}$  : 補正係数

# 結合係数の計算:

## 有限差分タイプ・数値的(非線形)

- 外部境界に接しているノード(+側が境界、原点)においては、拘束条件を以下の様に設定する。

$$-D_n \frac{d\Phi_{n,x}(x)}{dx} \Big|_{x=x-} = J_{n,x-}$$

$$-2 \frac{1+\alpha}{1-\alpha} D_n \frac{d\Phi_{n,x}(x)}{dx} \Big|_{x=0} = \Phi_{n,x}(0)$$

- これより、未定定数二つが計算でき、外部境界における中性子流が計算できる。これを以下の形で表す。

$$\begin{aligned} J_{n,x+} &= D^{FD} \bar{\Phi}_{n,x} + D^{cor} \bar{\Phi}_{n,x} \\ &= \frac{2D_n(1-\alpha)}{(1-\alpha)\Delta x_n + 4D_n(1+\alpha)} \bar{\Phi}_{n,x} + D^{cor} \bar{\Phi}_{n,x} \end{aligned}$$

# 結合係数の計算:

## 有限差分タイプ・数值的(非線形)

- 補正係数が入った有限差分式は、解析的に求めた中性子流を再現する精度の高いものになっている。
- そこで、この補正係数入りの有限差分式を用いて体系全体を解くことにより、解析的に中性子流を求めたのと同等の精度を得ることが出来る。



# 結合係数の計算:

## 有限差分タイプ・数值的(非線形)

- あるノードに対する中性子バランス式は

$$\frac{\Delta y \Delta z}{\Delta x \Delta y \Delta z} (J_{i+1/2,j,k,g} - J_{i-1/2,j,k,g}) + \frac{\Delta x \Delta z}{\Delta x \Delta y \Delta z} (J_{i,j+1/2,k,g} - J_{i,j-1/2,k,g}) + \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta x \Delta y \Delta z} (J_{i,j,k+1/2,g} - J_{i,j,k-1/2,g})$$
$$+ \Sigma_{r,g} \Phi_{i,j,k,g} = \frac{\lambda_g}{k} \sum_{g'} \nu \Sigma_{f,g'} \Phi_{i,j,k,g'} + \sum_{g' \neq g} \Sigma_{s,g' \rightarrow g} \Phi_{i,j,k,g'} + ES_{i,j,k,g}$$

$$\Phi_{i,j,k,g} = \frac{1}{\Delta x \Delta y \Delta z} \iiint \phi(x,y,z) dx dy dz$$

$$ES_{i,j,k,g} = \frac{1}{\Delta x \Delta y \Delta z} \iiint ES(x,y,z) dx dy dz$$

$$J_{i+1/2,j,k,g} = -D_g \left. \frac{d\phi}{dx} \right|_{x=x+}$$

$$J_{i-1/2,j,k,g} = -D_g \left. \frac{d\phi}{dx} \right|_{x=x-}$$

# 結合係数の計算： 有限差分タイプ・数值的(非線形)

- ノード間の中性子流を(補正項を含んだ)差分式で表すと

$$\begin{aligned}
 & + \left( a_{i+1/2,j,k,g} \Phi_{i+1,j,k,g} + b_{i+1/2,j,k,g} \Phi_{i,j,k,g} \right) \\
 & - \left( a_{i-1/2,j,k,g} \Phi_{i-1,j,k,g} + b_{i-1/2,j,k,g} \Phi_{i,j,k,g} \right) \\
 & + \left( a_{i,j+1/2,k,g} \Phi_{i,j+1,k,g} + b_{i,j+1/2,k,g} \Phi_{i,j,k,g} \right) \\
 & - \left( a_{i,j-1/2,k,g} \Phi_{i,j-1,k,g} + b_{i,j-1/2,k,g} \Phi_{i,j,k,g} \right) \\
 & + \left( a_{i,j,k+1/2,g} \Phi_{i,j,k+1,g} + b_{i,j,k+1/2,g} \Phi_{i,j,k,g} \right) \\
 & - \left( a_{i,j,k-1/2,g} \Phi_{i,j,k-1,g} + b_{i,j,k-1/2,g} \Phi_{i,j,k,g} \right) \\
 & + \sum_{r,g} \Phi_{i,j,k,g} = \frac{\chi_g}{k} \sum_{g'} \nu \Sigma_{f,g'} \Phi_{i,j,k,g'} + \sum_{g' \neq g} \Sigma_{s,g' \rightarrow g} \Phi_{i,j,k,g'} + ES_{i,j,k,g} \\
 & \frac{\Delta y \Delta z}{\Delta x \Delta y \Delta z} J_{i+1/2,j,k,g} = \left( a_{i+1/2,j,k,g} \Phi_{i+1,j,k,g} + b_{i+1/2,j,k,g} \Phi_{i,j,k,g} \right) \\
 & \frac{\Delta y \Delta z}{\Delta x \Delta y \Delta z} J_{i-1/2,j,k,g} = \left( a_{i-1/2,j,k,g} \Phi_{i-1,j,k,g} + b_{i-1/2,j,k,g} \Phi_{i,j,k,g} \right)
 \end{aligned}$$

# 結合係数の計算： 有限差分タイプ・数值的(非線形)

## ■ 式を整理すると

$$\begin{aligned} &+ a_{i+1/2,j,k,g} \Phi_{i+1,j,k,g} - a_{i-1/2,j,k,g} \Phi_{i-1,j,k,g} \\ &+ a_{i,j+1/2,k,g} \Phi_{i,j+1,k,g} - a_{i,j-1/2,k,g} \Phi_{i,j-1,k,g} \\ &+ a_{i,j,k+1/2,g} \Phi_{i,j,k+1,g} - a_{i,j,k-1/2,g} \Phi_{i,j,k-1,g} \\ &+ B_{i,j,k,g} \Phi_{i,j,k,g} = Q_{i,j,k} \end{aligned}$$

$$B_{i,j,k,g} = b_{i+1/2,j,k,g} - b_{i-1/2,j,k,g} + b_{i,j+1/2,k,g} - b_{i,j-1/2,k,g} + b_{i,j,k+1/2,g} - b_{i,j,k-1/2,g} + \Sigma_{r,g}$$

$$Q_{i,j,k} = \frac{\chi_g}{k} \sum_{g'} \nu \Sigma_{f,g'} \Phi_{i,j,k,g'} + \sum_{g' \neq g} \Sigma_{s,g' \rightarrow g} \Phi_{i,j,k,g'} + ES_{i,j,k,g}$$

# 結合係数の計算:

## 有限差分タイプ・数值的(非線形)

- 前ページで導出した式は、三次元拡散方程式の差分式と同じ形であり、通常の反復計算で解くことが可能である。
- なお、補正係数は、ノード両端の中性子流、横方向漏れ、ノード内の中性子源の変化に伴い、更新する必要がある。
- 反復中に有限差分式の係数が変化するため、非線形反復法と呼ばれている。



# 結合係数の計算： 有限差分タイプ・数值的(非線形)

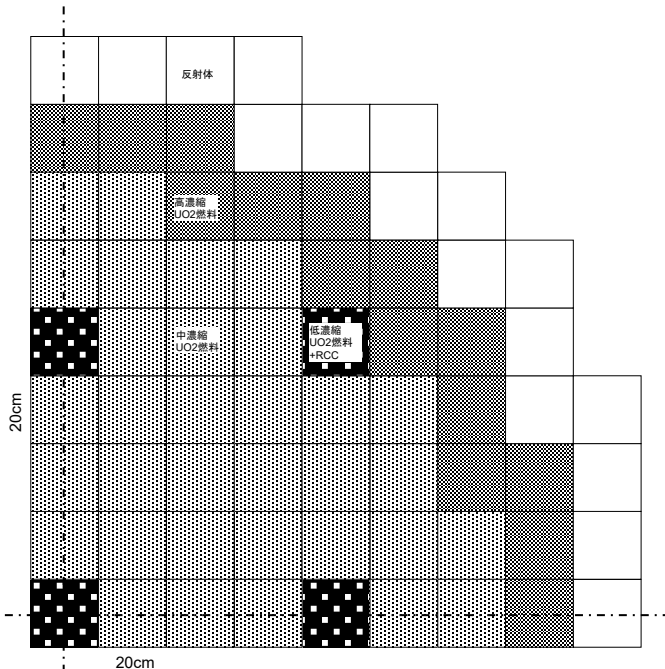
- 有限差分タイプの反復計算は以下のように行う
  - (1)各ノードの中性子束に初期値を与える。
  - (2)有限差分式を用いて反復計算を行う。
  - (3)各ノード(の各表面)において2ノード問題を設定する。  
ノード端の中性子流、横方向漏れ、ノード内の中性子源分布を更新する。
  - (4)各方向の有限差分式の補正係数を更新する。
  - (5)補正係数入りの有限差分式を用いて反復計算する。
  - (6)(3)～(5)を繰り返す。

# 結合係数の計算方法の比較

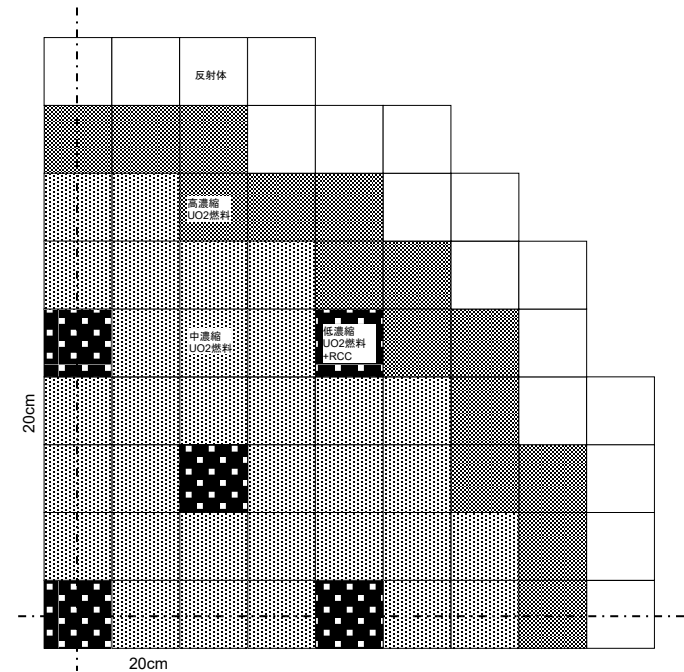
- 解析的 
$$J_{n,x+} = -D_n \left. \frac{d\Phi_{n,x}(x)}{dx} \right|_{x=0} = -D_{n+1}^{Ana} \bar{\Phi}_{n+1} + D_n^{Ana} \bar{\Phi}_n + S_{n,n+1}$$
  - 差分式の係数( $D_{n+1}$ ,  $D_n$ )は、固定されており更新の必要がない。中性子源分布の更新と中性子源分布を含む差分式の係数( $S_n$ )の更新のみが必要で、計算時間が早い。
  - 数値的に不安定な場合がある。(中性子源分布の更新が非線形となっており、この影響と思われる)
- 非線形反復
  - 2ノード問題を解く必要があり、コードの作成が煩雑。
  - 中性子流の補正項の与え方が工学的である。
  - 拡散計算の枠内では、収束性が良好(一般に、非線形反復のスペクトル半径は0.2程度。一回の反復で誤差が1/5に)
  - MOC/SNと組み合わせた場合には、不安定性が生じる場合がある。

# 計算精度・時間の比較

## ■ IAEA3D benchmark



軸方向20～280cm



軸方向280～360cm

炉心上部と下部に厚さ20cmの反射体付き



# 計算精度・時間の比較

---

- 有限差分法(CITATION)による集合体出力誤差

K. Okumura, JAERI-Data/Code 98-025 (1998).

<https://jopss.jaea.go.jp/search/servlet/search?2006026>





# 計算精度・時間の比較

---

- 種々のベンチマークに対する近代ノード法の精度と計算時間

J. I. Yoon, H. G. Joo, “Two-Level Coarse Mesh Finite Difference Formulation with Multigroup Source Expansion Nodal Kernels,” J. Nucl. Sci. Technol., 45, 668 (2008).

Table 2, 3, 4

<https://www.tandfonline.com/doi/pdf/10.1080/18811248.2008.9711467?needAccess=true>



# まとめ

---

- 近代ノード法の基礎式
- 近代ノード法の解法
  - 解析的ノード法
  - 多項式解析的ノード法
  - 多項式ノード法
  - 準解析的ノード法
- 近代ノード法の反復解法
  - 応答行列法
  - 有限差分法
- 近代ノード法の結合係数計算法
  - 応答行列法タイプ・解析的
  - 有限差分法・解析的
  - 有限差分法・非線形反復