空間依存の原子炉動特性

名古屋大学 工学研究科 山本章夫



- 空間依存動特性計算の概要
- 一点炉近似
- 断熱近似
- 準静近似
- 改良準静近似
- 陽解法
- 陰解法
- 8法
- 周波数変換法
- SCM法
- MAF法

動特性と空間依存性

- 初等炉物理では、原子炉の振る舞いの空間依存 性を無視し、一点炉で近似するpoint kinetics(一 点炉近似動特性)を学んだ
- 一点炉近似を用いることにより、原子炉の時間的な振る舞いに関して、多くの有益な情報が得られる。例えば、実機PWRで用いられているデジタル反応度計は一点炉近似に基づいたものである。

動特性と空間依存性

- Point kineticsは、原子炉の出力分布の(相対的な)空間 依存性(つまり形)が時間とともに変化しないという仮定を 用いている。
 - 正確には、「基本モード」の大きさの時間的変化のみに着目する
- この仮定は、原子炉内の出力分布が「基本モード」に 従って(形を変えずに)時間的に変化している場合には有 効である。(逆に、出力分布が基本モードに従って変化し ていないとー点炉近似は破綻する。)
- しかし、実際の動力炉における現象、特に過渡・事故事象においては、局所的な出力分布の変化が無視できない。
- 以上のことから、実機の解析においては、空間依存の動 特性方程式を解く必要が生じる。

[復習]即発中性子と遅発中性子

■ 即発中性子

重要

- 核分裂と同時に発生する中性子。平均エネルギー
 2MeV、核分裂あたり平均2.5個程度発生。
- 即発中性子の発生から吸収(または漏洩まで)の時間 を即発中性子寿命lpと呼ぶ。軽水炉では、10⁻⁵秒程度。
- 遅発中性子
 - 核分裂生成物から発生する中性子。平均エネルギーは、即発中性子より若干低く、核分裂で発生する中性子のうち0.007程度の割合(²³⁵Uの場合)

■ 核分裂から時間遅れがある。(0.2秒から約1分)

空間依存の動特性方程式

多群拡散近似を用いると、空間依存の動特性方 程式は以下のように与えられる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{\upsilon_g} \frac{\partial \phi_g(\vec{r},t)}{\partial t} &= \nabla D_g(\vec{r},t) \nabla \phi_g(\vec{r},t) - \Sigma_{r,g}(\vec{r},t) \phi_g(\vec{r},t) \\ &+ \sum_{g' \neq g} \Sigma_{s,g' \rightarrow g}(\vec{r},t) \phi_{g'}(\vec{r},t) + \chi_{p,g}(1-\beta) \sum_{g'} \nu \Sigma_{f,g'}(\vec{r},t) \phi_{g'}(\vec{r},t) \\ &+ \sum_{m=1}^M \lambda_m \chi_{d,m,g} C_m(\vec{r},t) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial C_m(\vec{r},t)}{\partial t} = \beta_m \sum_{g'} v \Sigma_{f,g'}(\vec{r},t) \phi_{g'}(\vec{r},t) - \lambda_m C_m(\vec{r},t)$$

空間依存の動特性方程式

v_g:g群の中性子の速度 $\phi_{s}(\vec{r},t): g 群の中性子東$ $D_{s}(\vec{r},t): g群の拡散係数$ $\Sigma_{r,g}(\vec{r},t): g群の除去断面積$ $\Sigma_{r,g}(\vec{r},t) = \Sigma_{a,g}(\vec{r},t) + \sum_{s,g \to g'} \Sigma_{s,g \to g'}(\vec{r},t)$ $\Sigma_{s,g' \rightarrow g}$: g' 群からg群への散乱断面積 χ_{n.g}:g群の即発中性子スペクトル $\sum_{a'} \chi_{p,g'} = 1$ k_{eff}: 実効増倍率(初期定常状態)

$$eta$$
:遅発中性子割合(= $\sum_{m} eta_{m}$)
 $v\Sigma_{f,g}$:g群の生成断面積
 λ_{m} :mグループの遅発中性子崩壊定数
 $\chi_{d,m,g}$:g群の遅発中性子スペクトル
(mグループによるもの)
 $\sum_{g'} \chi_{d,m,g'} = 1$
 $C_{m}(\vec{r},t)$:遅発中性子先行核密度

空間依存動特性の解法

p.6の空間依存動特性方程式は、一階の連立微分方程式であり、空間について差分化すると、以下のような行列式で書くことが出来る。

 $\frac{\partial \psi}{\partial t} = \mathbf{H} \vec{\psi}$

Reactor Physics, Nagoya University, Akio YAMAMOTO

i,j,k:空間メッシュ g:エネルギー群

空間依存動特性の解法

前ページの微分方程式は、解析的には、以下の形で解 を与えることが出来る。

 $\vec{\psi}(t + \Delta t) = \exp[\mathbf{H}\Delta t]\vec{\psi}(t)$

つまり、指数行列を評価することにより、解を求めることが可能であり、原理的には燃焼方程式と同じであるといえる。

空間依存動特性方程式

- しかし、燃焼方程式と比較して、行列Hのノルムが非常に 大きい。
- 行列のノルムは、おおざっぱには行列の要素と同程度の 大きさになる。例えば、Hの対角成分には、以下のような 要素が現れる。

 $D_g v_g / \Delta x$

- Dは拡散係数で10⁰[cm]、vは中性子の速度で高速群で は10⁶~10⁷[cm/sec]、Δxはメッシュ幅で10⁰[cm]のオー ダーである。従って、行列の要素のオーダーは10⁶~10⁷ となる。
- 結局、Hのノルムは10⁶~10⁷程度と極めて大きくなる。

空間依存動特性方程式

- 燃焼方程式に比べ、行列のノルムが大きいため、 数値解法はさらに難しいものとなる。
 - 燃焼行列のノルムは、短半減期核種の崩壊により決まる。
 - ノルム=ln(2)/T_{1/2}
 - 例えば、T1/2=30[sec]とすると、ノルムは0.023程度となる。これに対し、動特性方程式の行列のノルムは10⁶~10⁷程度

数値解法の概要

- 空間の取り扱いを近似する方法
 - 一点炉近似
 - 断熱近似(adiabatic approximation)
 - 準静近似(quasi-static approximation)
- 空間の扱いを近似しない方法
 - 改良準静近似(improve quasi-static approximation)
 - 陽解法(forward difference)
 - 陰解法(backward difference)
 - θ法
 - 周波数変換法(frequency transformation)
 - Stiffness confinement method (SCM)
 - Multigrid Amplitude Function method (MAF)

数値解法の概要

	古坛汁	因子化法			
	旦 按 伝	改良準静近似	準静近似	断熱近似	一点炉
タイムステップ内の 空間分布の変化	0	0	×	×	×
中性子束分布の空間分布に 対する遅発先行核の考慮	0	0	0	×	×
各種パラメータ (断面積、反応度)の時間変化	0	0	0	0	×
中性子束の空間分布の 時間変化	0	0	0	0	×
初期分布	0	0	0	0	0



- 空間分布は、時刻0における断面積を用いた固有値方程式により求める。
 - $\nabla D_g(\vec{r},0) \nabla \varphi_g(\vec{r}) \Sigma_{r,g}(\vec{r},0) \varphi_g(\vec{r})$

$$+\sum_{g'\neq g} \sum_{s,g'\to g} (\vec{r},0) \varphi_{g'}(\vec{r}) + \frac{\chi_g}{k_{eff}} \sum_{g'} v \Sigma_{f,g'}(\vec{r},0) \varphi_{g'}(\vec{r}) = 0$$

振幅は、次ページから示す一点炉方程式により 求める。(断面積は時間依存で変化するが、空間分布は変化しない)

ー点炉近似の導出

■ 時間依存の動特性方程式を以下のように書く。

$$\frac{1}{\upsilon}\frac{\partial\vec{\phi}}{\partial t} = (\mathbf{F}_p - \mathbf{A})\vec{\phi} + S_d$$

- 時間t=0において炉心は臨界であったとする。 0=(\mathbf{F}_{p0} - \mathbf{A}_{0}) $\vec{\phi}_{0}$ + S_{d0}
- S_{d0}は遅発中性子源であり、以下のように与えられる。F_{d0}は遅発中性子源を与える行列 $S_{d0} = \mathbf{F}_{d0}\vec{\phi}_{0}$

ー点炉近似の導出

定常状態において、即発および遅発中性子源は 以下のように足しあわせて取り扱うことが出来る。 F_0 は、即発・遅発両方を含んでいる。 $0 = (\mathbf{F}_0 - \mathbf{A}_0)\phi_0$ $\mathbf{F}_{0}\vec{\phi}_{0} = \vec{\chi}_{p} \sum_{g'} \nu_{p} \Sigma_{f,g'} \phi_{0g'} + \sum_{m=1}^{m} \vec{\chi}_{d,m} \sum_{g'} \nu_{d,m} \Sigma_{f,g'} \phi_{0g'}$ 時間依存の方程式を以下のように書き直す。(遅) 発中性子源を足した後、引いている。) $\frac{1}{2} \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial t} = (\mathbf{F} - \mathbf{A} - \mathbf{F}_d) \vec{\phi} + S_d$

ー点炉近似の導出

一点炉近似にするために、定常(臨界)時の随伴 中性子束を乗じて空間積分する。

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\langle \vec{\phi}_0^*, \frac{1}{\upsilon} \vec{\phi} \right\rangle = \left\langle \vec{\phi}_0^*, (\mathbf{F} - \mathbf{A}) \vec{\phi} \right\rangle - \left\langle \vec{\phi}_0^*, \mathbf{F}_d \vec{\phi} \right\rangle + \left\langle \vec{\phi}_0^*, S_d \right\rangle$$

■ 随伴中性子束は、以下の式を満足する。 $(\mathbf{F}_0^* - \mathbf{A}_0^*) \vec{\phi}_0^* = 0$

■ 随伴中性子束の性質より
$$\left\langle \vec{\phi}_{0}^{*}, (\mathbf{F}_{0} - \mathbf{A}_{0}) \vec{\phi} \right\rangle = \left\langle \vec{\phi}, (\mathbf{F}_{0}^{*} - \mathbf{A}_{0}^{*}) \vec{\phi}_{0}^{*} \right\rangle = 0$$





- 中性子束を以下のように因数分解する。 $\vec{\phi}(\vec{r},t) = p(t)\vec{\phi}(\vec{r},t)$
- また、以下の規格化条件と変数の定義を用いる。

 ⁽ⁱ⁾/_v = K₀
 F(t) = (\phi_0^*(\vec{r}), \mathbf{F}\vec{\varphi}(\vec{r}, t))
 ⁽ⁱ⁾/<sub>\vec{r}} = 0
 これらを前ページ最後の式に代入

 </sub>





$$c_{k}(t) = \frac{\left\langle \vec{\phi}_{0}^{*}, \chi_{dk}C_{k} \right\rangle}{\left\langle \vec{\phi}_{0}^{*}, \frac{1}{\upsilon}\vec{\varphi} \right\rangle} = \frac{\left\langle \vec{\phi}_{0}^{*}, \chi_{dk}C_{k} \right\rangle}{F(t)\Lambda(t)}$$



Reactor Physics, Nagoya University, Akio YAMAMOTO





- 方程式が簡単であるため、簡易計算などによく 使用される。
- 反応度測定にも用いられる。
- 空間依存性が大きい過渡計算の場合、非保守的な結果を与える場合があるため、注意が必要。

- 炉心平均の反応度を計算するためには、何らかの重み関数が必要となる。定常状態(固有値計算)では、重み関数として定数(=1)を用いている。 (すなわち単なる積分・・・足しあわせ)
- 出力の時間変化を精度良く評価するためには、
 反応度の時間変化を精度良く見積もる必要がある。

中性子束の時間変化は以下の形で評価される*) $\left\langle \phi^{w}, \frac{\partial \phi}{\partial t} \right\rangle = \left\langle \phi^{w}, [\mathbf{A} - \lambda \mathbf{F}] \phi \right\rangle$ $= \left\langle \phi^{w}, \left[\mathbf{A}_{0} + \Delta \mathbf{A} - \lambda \left(\mathbf{F}_{0} + \Delta \mathbf{F}\right)\right] \left(\phi_{0} + \Delta \phi\right) \right\rangle$ $= \left\langle \phi^{w}, \left[\mathbf{A}_{0} - \lambda \mathbf{F}_{0}\right] \phi_{0} \right\rangle + \left\langle \phi^{w}, \left[\Delta \mathbf{A} - \lambda \Delta \mathbf{F}\right] \phi_{0} \right\rangle$ + $\langle \phi^{w}, [\mathbf{A}_{0} - \lambda \mathbf{F}_{0}] \Delta \phi \rangle$ + $\langle \phi^{w}, [\Delta \mathbf{A} - \lambda \Delta \mathbf{F}] \Delta \phi \rangle$ $= \left\langle \phi^{w}, \left[\Delta \mathbf{A} - \lambda \Delta \mathbf{F} \right] \phi_{0} \right\rangle + \left\langle \phi^{w}, \left[\mathbf{A}_{0} - \lambda \mathbf{F}_{0} \right] \Delta \phi \right\rangle + \left\langle \phi^{w}, \left[\Delta \mathbf{A} - \lambda \Delta \mathbf{F} \right] \Delta \phi \right\rangle$ 二次の微少量を無視すると $\left\langle \phi^{w}, \frac{\partial \phi}{\partial t} \right\rangle \approx \left\langle \phi^{w}, \left[\Delta \mathbf{A} - \lambda \Delta \mathbf{F} \right] \phi_{0} \right\rangle + \left\langle \phi^{w}, \left[\mathbf{A}_{0} - \lambda \mathbf{F}_{0} \right] \Delta \phi \right\rangle$

*)初期状態で[A₀-λF₀]φ₀=0.

- 一点炉近似では、中性子束の空間分布の変化 (Δφ)を考慮しないが、重み関数をうまく選んでや ることにより、中性子束の空間分布の変化に基 づく誤差を小さくできる。
- 断面積の変化(ΔF 、 ΔA)は考慮する。 $\left\langle \phi^{w}, \frac{\partial \phi}{\partial t} \right\rangle \approx \left\langle \phi^{w}, [\Delta A - \lambda \Delta F] \phi_{0} \right\rangle + \left\langle \phi^{w}, [A_{0} - \lambda F_{0}] \Delta \phi \right\rangle$ _{考慮}

随伴方程式を用いると、 $\langle \phi^{\nu}, [\mathbf{A}_0 - \lambda \mathbf{F}_0] \Delta \phi \rangle = \langle \Delta \phi, [\mathbf{A}_0^* - \lambda \mathbf{F}_0^*] \phi^{\nu} \rangle$

- 重み関数として随伴中性子束を用いると $\langle \Delta \phi, [\mathbf{A}_0^* \lambda \mathbf{F}_0^*] \phi_0^* \rangle = 0$
- 従って、中性子束の空間分布の変化に伴う差異を小さくできる。
 「③= Simplify[(f1 f2)·(?))·(?)]

 $Out[3] = \{ \{ a f1 g1 + c f2 g1 + b f1 g2 + d f2 g2 \} \}$

$$ln[4]:= Simplify[(g1 g2) \cdot \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f1 \\ f2 \end{pmatrix}]$$

A, Fの要素は実数なので $\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{0} - \lambda \mathbf{F}_{0} \end{bmatrix}^{*} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{0}^{*} - \lambda \mathbf{F}_{0}^{*} \end{bmatrix}^{t} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{0} - \lambda \mathbf{F}_{0} \end{bmatrix}^{t}$

静的反応度と動的反応度

- 静的反応度
 - 拡散方程式を以下のように書く。
 $\mathbf{A}\vec{\phi} = \frac{1}{k_{eff}}\mathbf{F}\vec{\phi}$
- 静的反応度は以下の式で与えられる。 $\rho_{st} = \frac{\langle \vec{\phi}_w, [\mathbf{F} - \mathbf{A}] \vec{\phi} \rangle}{\langle \vec{\phi}_w, \mathbf{F} \vec{\phi} \rangle} = \frac{\langle \vec{\phi}_w, [\mathbf{F} - \frac{1}{k_{eff}} \mathbf{F}] \vec{\phi} \rangle}{\langle \vec{\phi}_w, \mathbf{F} \vec{\phi} \rangle} = \frac{\left(1 - \frac{1}{k_{eff}}\right) \langle \vec{\phi}_w, \mathbf{F} \vec{\phi} \rangle}{\langle \vec{\phi}_w, \mathbf{F} \vec{\phi} \rangle}$ $= \left(1 - \frac{1}{k_{eff}}\right) = \frac{k_{eff} - 1}{k_{eff}}, \text{ where, } \vec{\phi}_w \text{ is arbitrary weighting function}$

Reactor Physics, Nagoya University, Akio YAMAMOTO

静的反応度と動的反応度

- 動的反応度
 - 定常状態での随伴方程式を以下のように書く $\mathbf{A}_{0}^{*}\vec{\phi}^{*} = \frac{1}{k^{*}}\mathbf{F}_{0}^{*}\vec{\phi}^{*}$
 - 動的反応度は以下の形で与えられる

$$\rho_{dyn} = \frac{\left\langle \vec{\phi}^*, [\mathbf{F} - \mathbf{A}] \vec{\psi} \right\rangle}{\left\langle \vec{\phi}^*, \mathbf{F} \vec{\psi} \right\rangle}$$

where, $\vec{\psi}$ is time - dependent flux

静的反応度と動的反応度

- 静的反応度は「定常状態」にある体系の反応度 を表すために用いる。
- 動的反応度はある定常状態から別の定常状態 に移行する間の反応度を表すために用いる。

断熱近似(adiabatic)

 中性子束を時間のみに依存する項と空間のみに依存す る項に分離する^{*)}。

 $\phi(\vec{r},t) = p(t)\varphi(\vec{r})$

空間分布は、時刻tにおける断面積を用いた固有値方程 式により求める。

 $\nabla D_g(\vec{r},t) \nabla \varphi_g(\vec{r}) - \Sigma_{r,g}(\vec{r},t) \varphi_g(\vec{r})$

$$+\sum_{g'\neq g} \sum_{s,g'\rightarrow g} \varphi_{g'}(\vec{r}) + \frac{\chi_g}{k_{eff}} \sum_{g'} \nu \Sigma_{f,g'} \varphi_{g'}(\vec{r}) = 0$$

振幅は、一点炉方程式により求める。なお、反応度などは、上記の空間分布より各時刻で計算する。

*)形状関数は時間ステップ毎に再計算するため、厳密には時間に依存する。 しかし、時間ステップ内では一定と仮定するため、時間tの依存性を表記していない。

断熱近似

- この方法は、既存のsteady stateの炉心解析
 コードをそのまま使用できるメリットがある。
- しかし、空間分布を"static"な状態で解いている ため、あくまでも近似解である。
- ちなみに、Schrödinger波動方程式において、空間分布をstaticな状態で解く手法を断熱近似と呼んでいる。これとのアナロジーで断熱近似と呼ばれている。

準静近似(quasi-static)

- 中性子束を時間のみに依存する項と空間のみに 依存する項に分離する。

 φ(*r*,*t*) = *p*(*t*)*φ*(*r*)
- 中性子束は、以下の式により求める。 $\nabla D_g(\vec{r},t)\nabla \varphi_g(\vec{r}) - \left[\Sigma_{r,g}(\vec{r},t) + \frac{1}{\upsilon_g p(t)} \frac{\partial p(t)}{\partial t} \right] \varphi_g(\vec{r})$

$$+\sum_{g'\neq g} \sum_{s,g'\rightarrow g} \varphi_{g'}(\vec{r}) + \frac{\chi_{p,g}}{k_{eff}} (1-\beta) \sum_{g'} v \Sigma_{f,g'} \varphi_{g'}(\vec{r})$$
$$+ \frac{1}{p(t)} \sum_{m=1}^{M} \lambda_m \chi_{d,m,g} C_m(\vec{r},t) = 0$$



- 断熱近似では、空間分布をsteady stateの状態 で求めたが、準静近似では、遅発中性子の遅れ の効果および振幅関数の時間微分の効果を取り 入れているため、より近似が少ない。
- 時間のかかる空間分布計算の頻度を減らすことで(振幅関数の計算に比べてタイムステップを長く取ることで)計算時間を短縮できる。
- しかしながら、中性子束を時間変化と空間変化
 に完全に分離できるとしたところに近似が残っている。

改良準静近似(Improved quasistatic)

中性子束を時間のみに依存する項と時間と空間
 に依存する項に分離する。

 $\phi(\vec{r},t) = p(t) \varphi(\vec{r},t)$

■ 中性子束は、以下の式により求める。

$$\frac{1}{\nu_g} \frac{\partial \varphi_g(\vec{r},t)}{\partial t} = \nabla D_g(\vec{r},t) \nabla \varphi_g(\vec{r},t) - \left[\Sigma_{r,g}(\vec{r},t) + \frac{1}{\nu_g p(t)} \frac{\partial p(t)}{\partial t} \right] \varphi_g(\vec{r},t)$$

$$+\sum_{g'\neq g} \sum_{s,g'\rightarrow g} \varphi_{g'}(\vec{r},t) + \frac{\chi_{p,g}}{k_{eff}} (1-\beta) \sum_{g'} v \Sigma_{f,g'} \varphi_{g'}(\vec{r},t)$$

$$1 \quad \frac{M}{2}$$

 $+\frac{1}{p(t)}\sum_{m=1}\lambda_m\chi_{d,m,g}C_m(\vec{r},t)$

Reactor Physics, Nagoya University, Akio YAMAMOTO
改良準静近似

- 改良準静近似は、一点炉、断熱近似、準静近似と異なり、「近似」を用いていないことが特徴である。
- 形状関数を計算する時間ステップを振幅関数を 計算する時間ステップ幅に比べて大きく取ること が出来るため、計算時間の短縮が可能。

陽解法(forward difference)

- この方法は、指数行列をテイラー展開し、ある項で打ち 切ることにより、計算を行う。

 $\vec{\psi}(t + \Delta t) = \exp[\mathbf{H}\Delta t]\vec{\psi}(t)$ $= \left[1 + \mathbf{H}\Delta t + \frac{(\mathbf{H}\Delta t)^2}{2!} + \frac{(\mathbf{H}\Delta t)^3}{3!} + \dots\right]\vec{\psi}(t)$
- 打ち切り方法によって、主として以下の種類がある。
 - 一次:オイラー法
 - 二次:二次のルンゲクッタ法
 - 四次:四次のルンゲクッタ法



• 差分近似を以下のように適用する。

$$\frac{1}{\upsilon_{g}} \frac{\partial \phi_{g}(\vec{r},t)}{\partial t} \approx \frac{1}{\upsilon_{g}} \frac{\phi_{g}(\vec{r},t+\Delta t) - \phi_{g}(\vec{r},t)}{\Delta t}$$

$$= \nabla D_{g}(\vec{r},t) \nabla \phi_{g}(\vec{r},t) - \Sigma_{r,g}(\vec{r},t) \phi_{g}(\vec{r},t)$$

$$+ \sum_{g' \neq g} \Sigma_{s,g' \rightarrow g}(\vec{r},t) \phi_{g'}(\vec{r},t) + \frac{\chi_{p,g}}{k_{eff}} (1-\beta) \sum_{g'} v \Sigma_{f,g'}(\vec{r},t) \phi_{g'}(\vec{r},t)$$

$$+ \sum_{m=1}^{M} \lambda_{m} \chi_{d,m,g} C_{m}(\vec{r},t)$$

$$\frac{\partial C_{m}(\vec{r},t)}{\partial t} \approx \frac{C_{m}(\vec{r},t+\Delta t) - C_{m}(\vec{r},t)}{\Delta t}$$

$$= \beta_{m} \sum v \Sigma_{f,g'}(\vec{r},t) \phi_{g'}(\vec{r},t) - \lambda_{m} C_{m}(\vec{r},t)$$



オイラー法の場合、前ページの有限差分式より、 以下の様に次ステップの値を計算する。

$$\begin{split} \phi_{g}(\vec{r},t+\Delta t) &= \phi_{g}(\vec{r},t) + \upsilon_{g}\Delta t \nabla D_{g}(\vec{r},t) \nabla \phi_{g}(\vec{r},t) - \upsilon_{g}\Delta t \Sigma_{r,g}(\vec{r},t) \phi_{g}(\vec{r},t) \\ &+ \upsilon_{g}\Delta t \sum_{g' \neq g} \Sigma_{s,g' \rightarrow g}(\vec{r},t) \phi_{g'}(\vec{r},t) + \upsilon_{g}\Delta t \chi_{p,g} (1-\beta) \sum_{g'} v \Sigma_{f,g'}(\vec{r},t) \phi_{g'}(\vec{r},t) \\ &+ \upsilon_{g}\Delta t \sum_{m=1}^{M} \lambda_{m} \chi_{d,m,g} C_{m}(\vec{r},t) \end{split}$$

$$C_m(\vec{r},t+\Delta t) = C_m(\vec{r},t) + \beta_m \sum_{g'} v \Sigma_{f,g'} \phi_{g'}(\vec{r},t) \Delta t - \lambda_m C_m(\vec{r},t) \Delta t$$



- 現ステップ(時間=t)の計算値が分かっていれば、次ステップ(時間 =t+Δt)の中性子束および遅発中性子先行核は容易に求めることが 出来る。
- 最初のステップ(時間=0)を除き、空間に関する反復計算が不要であることが特徴(Hの逆行列を計算する必要がない)。
- しかしながら、陽解法は、指数行列の評価としてテイラー展開を使っているため、行列のノルムが大きい場合は打ち切り誤差が問題となる。
- Hのノルムは10⁶~10⁷程度であることから、タイムステップとして10⁻⁷[sec]程度を用いないと妥当な解が得られない。
- そのため、Hの逆行列を求める必要がないというメリットはあるものの、タイムステップを非常に取るデメリットの方が大きく、陽解法は空間動特性の数値解析には用いられていない。



■ 計算フローは以下の通り

- (1)初期状態で固有値計算を実施。keffを求める。
- (2)生成断面積をkeffで割る。
- (3)定常状態における遅発中性子先行核密度を求める。
- (4)断面積を変化させる。(過渡計算の開始)
- (5)p.40の式に従って、次ステップの中性子束および 遅発中性子先行核密度を計算
- (6)(5)を繰り返し、最終ステップまで計算を実施

陰解法 (backward difference)

陽解法は以下の差分式を解くことでも得られる。 $\frac{\partial \vec{\psi}}{\partial t} \approx \frac{\vec{\psi}(t + \Delta t) - \vec{\psi}(t)}{\Delta t} = \mathbf{H}(t)\vec{\psi}(t)$ 陰解法は、以下の差分式を解くことで得られる。 $\frac{\partial \psi}{\partial t} \approx \frac{\vec{\psi}(t + \Delta t) - \vec{\psi}(t)}{\Delta t} = \mathbf{H}(t + \Delta t)\vec{\psi}(t + \Delta t)$ これより、 $\left[\mathbf{I} - \mathbf{H}(t + \Delta t)\Delta t\right]\vec{\psi}(t + \Delta t) = \vec{\psi}(t)$ よって $\vec{\psi}(t + \Delta t) = \left[\mathbf{I} - \mathbf{H}(t + \Delta t)\Delta t\right]^{-1} \vec{\psi}(t)$



陰解法は、指数行列をPade近似により展開することでも得られる。[0,1]次のPade近似は
 exp[HΔt] = 1/(I-HΔt)
 従って、

$$\vec{\psi}(t + \Delta t) = \exp[\mathbf{H}\Delta t]\vec{\psi}(t)$$

$$\approx \left[\mathbf{I} - \mathbf{H}(t + \Delta t)\Delta t\right]^{-1}\vec{\psi}(t)$$
• 数値計算時には、以下の形を用いる
$$\left[\mathbf{I} - \mathbf{H}(t + \Delta t)\Delta t\right]\vec{\psi}(t + \Delta t) = \vec{\psi}(t)$$



■ 差分近似を以下のように適用する。

$$\begin{aligned} \frac{1}{\upsilon_g} \frac{\partial \phi_g(\vec{r},t)}{\partial t} &\approx \frac{1}{\upsilon_g} \frac{\phi_g(\vec{r},t+\Delta t) - \phi_g(\vec{r},t)}{\Delta t} \\ &= \nabla D_g(\vec{r},t+\Delta t) \nabla \phi_g(\vec{r},t+\Delta t) - \Sigma_{r,g}(\vec{r},t) \phi_g(\vec{r},t+\Delta t) \\ &+ \sum_{g' \neq g} \Sigma_{s,g' \rightarrow g}(\vec{r},t+\Delta t) \phi_{g'}(\vec{r},t+\Delta t) + \frac{\chi_{p,g}}{k_{e\!f\!f}} (1-\beta) \sum_{g'} v \Sigma_{f,g'}(\vec{r},t+\Delta t) \phi_{g'}(\vec{r},t+\Delta t) \\ &+ \sum_{m=1}^M \lambda_m \chi_{d,m,g} C_m(\vec{r},t+\Delta t) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial C_m(\vec{r},t)}{\partial t} \approx \frac{C_m(\vec{r},t+\Delta t) - C_m(\vec{r},t)}{\Delta t}$$
$$= \beta_m \sum_{g'} v \Sigma_{f,g'}(\vec{r},t+\Delta t) \phi_{g'}(\vec{r},t+\Delta t) - \lambda_m C_m(\vec{r},t+\Delta t)$$
Reactor Physics, Nagoya University, Akio YAMAMOTO



■ 前ページの差分式より

$$\begin{split} \nabla D_{g}(\vec{r},t+\Delta t)\nabla\phi_{g}(\vec{r},t+\Delta t) - &\Sigma_{r,g}(\vec{r},t+\Delta t)\phi_{g}(\vec{r},t+\Delta t) \\ + &\sum_{g'\neq g} \Sigma_{s,g'\rightarrow g}(\vec{r},t+\Delta t)\phi_{g'}(\vec{r},t+\Delta t) + \chi_{p,g}(1-\beta)\sum_{g'} v\Sigma_{f,g'}(\vec{r},t+\Delta t)\phi_{g'}(\vec{r},t+\Delta t) \\ + &\sum_{m=1}^{M} \frac{\lambda_{m}\chi_{d,m,g}\beta_{m}\Delta t}{1+\lambda_{m}\Delta t}\sum_{g'} v\Sigma_{f,g'}(\vec{r},t+\Delta t)\phi_{g'}(\vec{r},t+\Delta t) - \frac{1}{\upsilon_{g}\Delta t}\phi_{g}(\vec{r},t+\Delta t) \\ = &-\frac{1}{\upsilon_{g}\Delta t}\phi_{g}(\vec{r},t) - \sum_{m=1}^{M} \frac{\lambda_{m}\chi_{d,m,g}}{1+\lambda_{m}\Delta t}C_{m}(\vec{r},t) \end{split}$$

$$C_m(\vec{r},t+\Delta t) = \frac{C_m(\vec{r},t)}{1+\lambda_m\Delta t} + \frac{\beta_m\Delta t}{1+\lambda_m\Delta t} \sum_{g'} \nu \Sigma_{f,g'}(\vec{r},t+\Delta t)\phi_{g'}(\vec{r},t+\Delta t)$$

陰解法

• さらに変形すると以下の形となる。

$$\nabla D_g(\vec{r}, t + \Delta t) \nabla \phi_g(\vec{r}, t + \Delta t) - \left[\Sigma_{r,g}(\vec{r}, t + \Delta t) + \frac{1}{\upsilon_g \Delta t} \right] \phi_g(\vec{r}, t + \Delta t)$$

 $+ \sum_{g' \neq g} \Sigma_{s,g' \rightarrow g}(\vec{r}, t + \Delta t) \phi_{g'}(\vec{r}, t + \Delta t) + \gamma_g \sum_{g'} \nu \Sigma_{f,g'}(\vec{r}, t + \Delta t) \phi_{g'}(\vec{r}, t + \Delta t)$
 $= S_g$

where,

$$\gamma_{g} = \chi_{p,g}(1-\beta) + \sum_{m=1}^{M} \frac{\lambda_{m} \chi_{d,m,g} \beta_{m} \Delta t}{1+\lambda_{m} \Delta t}$$
$$S_{g} = -\frac{1}{\upsilon_{g} \Delta t} \phi_{g}(\vec{r},t) - \sum_{m=1}^{M} \frac{\lambda_{m} \chi_{d,m,g}}{1+\lambda_{m} \Delta t} C_{m}(\vec{r},t)$$



- p.47の式を解くことは、固定中性子源問題を解 いていることと同じである。
- 従って、タイムステップ毎に固定中性子源計算を 繰り返すことによって、時間に伴う中性子束の変 化を計算できる。



■ 計算フローは以下の通り。

- (1)初期状態で固有値計算を実施。keffを求める。
- (2)生成断面積をkeffで割る。
- (3)定常状態における遅発中性子先行核密度を求める。
- (4)断面積を変化させる。(過渡計算の開始)
- (5)p.47の式に従って、次ステップの中性子束を計算
 (固定中性子源問題を解く)
- (6)p.46の式により、次ステップの遅発中性子先行核密度を計算
- (7) (5), (6)を繰り返し、最終ステップまで計算を実施



- 陰解法はタイムステップ毎に固定中性子源問題 を解く必要がある。(空間・エネルギーに関して反 復計算が必要)
- しかし、陽解法に比べてタイムステップを大幅に 増加することが出来、数値的に安定である。(一 般的には、陽解法の二桁以上タイムステップを 増加可能)
- このため、実用的な解法であると言える。

θ法(Theta-method)

- θ法はおおざっぱに言うと、「陽解法と陰解法の平均」を 取るものである。
- θ 法では、以下の式を解く。 $\frac{\partial \vec{\psi}}{\partial t} \approx \frac{\vec{\psi}(t + \Delta t) - \vec{\psi}(t)}{\Delta t}$
 - $= \theta \mathbf{H}(t + \Delta t) \vec{\psi}(t + \Delta t) + (1 \theta) \mathbf{H}(t) \vec{\psi}(t)$
- θをスカラーではなく、行列にすることで、より高精度の解 を得ることも出来る(が、θを求めるために計算時間を要 するため、あまり実用的ではない)。θは1/2に設定するか、 経験的に決めることが多いようである。
- θ=1/2にすると、クランク・ニコルソン法になる。



- p.51の式から、陰解法と同様の手続きによって
 「固定中性子源問題」の式を導くことが出来る。
 (次ページ)

$$\begin{aligned} \Theta \overleftrightarrow{\Xi} \\ C_m(\vec{r}, t + \Delta t) &= \frac{1 - (1 - \theta)\lambda_m \Delta t}{1 + \theta \lambda_m \Delta t} C_m(\vec{r}, t) \\ &+ \frac{\beta_m \Delta t}{1 + \theta \lambda_m \Delta t} \left[\theta \sum_{g'} v \Sigma_{f,g'}(\vec{r}, t + \Delta t) \phi_{g'}(\vec{r}, t + \Delta t) + (1 - \theta) \sum_{g'} v \Sigma_{f,g'}(\vec{r}, t) \phi_{g'}(\vec{r}, t) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{split} \theta \nabla D_{g}(\vec{r},t+\Delta t) \nabla \phi_{g}(\vec{r},t+\Delta t) &-\theta \Sigma_{r,g}(\vec{r},t+\Delta t) \phi_{g}(\vec{r},t+\Delta t) \\ &+\theta \sum_{g' \neq g} \Sigma_{s,g' \rightarrow g}(\vec{r},t+\Delta t) \phi_{g'}(\vec{r},t+\Delta t) + \theta \chi_{p,g}(1-\beta) \sum_{g'} v \Sigma_{f,g'}(\vec{r},t+\Delta t) \phi_{g'}(\vec{r},t+\Delta t) \\ &+\theta \sum_{m=1}^{M} \frac{\lambda_{m} \chi_{d,m,g} \beta_{m} \Delta t}{1+\theta \lambda_{m} \Delta t} \theta \sum_{g'} v \Sigma_{f,g'}(\vec{r},t+\Delta t) \phi_{g'}(\vec{r},t+\Delta t) - \frac{1}{\upsilon_{g} \Delta t} \phi_{g}(\vec{r},t+\Delta t) \\ &= -(1-\theta) \nabla D_{g}(\vec{r},t) \nabla \phi_{g}(\vec{r},t) + (1-\theta) \Sigma_{r,g}(\vec{r},t) \phi_{g}(\vec{r},t) \\ &-(1-\theta) \sum_{g' \neq g} \Sigma_{s,g' \rightarrow g}(\vec{r},t) \phi_{g'}(\vec{r},t) - (1-\theta) \chi_{p,g}(1-\beta) \sum_{g'} v \Sigma_{f,g'}(\vec{r},t) \phi_{g'}(\vec{r},t) \\ &-\frac{1}{\upsilon_{g} \Delta t} \phi_{g}(\vec{r},t) - \sum_{m=1}^{M} \frac{\lambda_{m} \chi_{d,m,g}}{1+\theta \lambda_{m} \Delta t} C_{m}(\vec{r},t) - \theta \sum_{m=1}^{M} \frac{\lambda_{m} \chi_{d,m,g} \beta_{m} \Delta t}{1+\theta \lambda_{m} \Delta t} (1-\theta) \sum_{g'} v \Sigma_{f,g'}(\vec{r},t) \phi_{g'}(\vec{r},t) \end{split}$$



■ θ法の式は一見複雑であるが、陰解法と同様の 「固定中性子源問題」であり、陰解法と同じ計算 フローで計算することが可能である。

周波数変換法(Frequency transformation method)

一点炉動特性方程式で係数の依存性を無視

$$\frac{d}{dt}P(t) = \frac{\rho - \beta}{\Lambda}P(t) + \sum_{m}^{M}\lambda_{m}C_{m}(t)$$
$$\frac{d}{dt}C_{m} = \frac{\beta_{m}}{\Lambda}P(t) - \lambda_{m}C_{m}(t)$$
これらの解は

$$P(t) = \sum_{i=1}^{M+1} A_i \exp(w_i t)$$

■ 従って、中性子束を以下の様に表現できそう $\phi(\mathbf{r},t) = \exp(w(\mathbf{r},t)t)\tilde{\phi}(\mathbf{r},t)$



- 周波数変換法では、中性子束と遅発中性子先行 核密度を以下のように表すことが出来ると仮定 する。(改良準静近似の考え方と同じであるが、 振幅関数と空間分布関数に分離しているわけで はないことに注意) *ψ*(*r*,*t*) = exp[wt]^{*ψ*}(*r*,*t*)
- これを以下の式に代入する $\frac{\partial \vec{\psi}}{\partial t} = \mathbf{H} \vec{\psi}$







空間依存動特性方程式を以下の様に表記する。
 $\frac{1}{v_g} \frac{\partial \phi_g(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = R_g(\mathbf{r}, t)$

$$R_{g}(\mathbf{r},t) = \nabla D_{g}(\mathbf{r},t) \cdot \nabla \phi_{g}(\mathbf{r},t) - \Sigma_{r,g}(\mathbf{r},t) \phi_{g}(\mathbf{r},t) + \sum_{g' \neq g} \sum_{s,g' \rightarrow g} (\mathbf{r},t) \phi_{g}(\mathbf{r},t) + (1 - \beta_{eff}) \chi_{p,g} \sum_{g'} v \Sigma_{f,g'}(\mathbf{r},t) \phi_{g'}(\mathbf{r},t) + \sum_{m} \chi_{d,m,g} \lambda_{m} C_{m}(\mathbf{r},t)$$



Reactor Physics, Nagoya University, Akio YAMAMOTO







- 動的周波数の時間依存性を考慮すると
 - $\left(\frac{1}{\theta v_{g} \Delta t} + \frac{w_{g}^{t+\Delta t}(\mathbf{r})}{v_{g}} \right) \phi_{g}(\mathbf{r}, t + \Delta t) R_{g}(\mathbf{r}, t + \Delta t)$ $= \left[\left(\frac{1}{\theta v_{g} \Delta t} \frac{w_{g}^{t}(\mathbf{r})}{v_{g}} \right) \phi_{g}(\mathbf{r}, t) + \left(\frac{1}{\theta} 1 \right) (R_{g}(\mathbf{r}, t)) \right] \exp(w_{g}(\mathbf{r}) \Delta t)$

■ 動的周波数の時間依存性を考慮した方が高精度



- 形状関数でなく、中性子束そのものに対する式にした理由
 - 周波数変換法における見かけ上の微分値を小さくし、 時間離散化に関する誤差を低減

$$\phi_g(\mathbf{r}, t + \Delta t) - \phi_g(\mathbf{r}, t) \exp(w_g(\mathbf{r}) \Delta t)$$

 Δt

- 中性子束に対して定義されている不連続因子を使用 可能
- 主要な計算コード
 - 形状関数:SIMULATE3, AETNA
 - 中性子束: PARCS, SCOPE2, COSMO-K



遅発中性子先行核の取り扱い

遅発中性子先行核密度に対しては、以下の式を 用いる。 $\frac{\partial C_m(\vec{r},t)}{\partial t} = \beta_m \sum_{f,g'} v \Sigma_{f,g'} \phi_{g'}(\vec{r},t) - \lambda_m C_m(\vec{r},t)$ 私分裂中性子源が時間に関する二次式で近似 できるとすると、 $\frac{\partial C_m(\vec{r},t)}{\partial t} = \beta_m (f_2 t^2 + f_1 t + f_0) - \lambda_m C_m(\vec{r},t)$ ■ 解析解は(前ステップt1における遅発中性子先行 核密度が与えられているとして) $C_m(\vec{r}, t_1 + \Delta t) = \exp[-\lambda_m \Delta t] \left| C_m(\vec{r}, t_1) + \beta_m \left(-\frac{2}{\lambda_m^3} f_2 + \frac{1}{\lambda_m^2} f_1 - \frac{1}{\lambda_m} f_0 \right) \right|$ $+\beta_{m}\left|\frac{2-2\lambda_{m}\Delta t+(\lambda_{m}\Delta t)^{2}}{\lambda^{3}}f_{2}+\frac{-1+\lambda_{m}\Delta t}{\lambda^{2}}f_{1}+\frac{1}{\lambda}f_{0}\right|$ Reactor Physics, Nagoya University, Akio YAMAMOTO 66

遅発中性子先行核の取り扱い

■ f2, f1, f0は以下の式から評価する。

$$f_{2}(t_{2}-t_{1})^{2} + f_{1}(t_{2}-t_{1}) + f_{0} = \sum_{g'} v \Sigma_{f,g'} \phi_{g'}(\vec{r},t_{2})$$

$$f_{0} = \sum_{g'} v \Sigma_{f,g'} \phi_{g'}(\vec{r},t_{1})$$

$$f_{2}(t_{0}-t_{1})^{2} + f_{1}(t_{0}-t_{1}) + f_{0} = \sum_{g'} v \Sigma_{f,g'} \phi_{g'}(\vec{r},t_{0})$$

- ここで、t2, t1, t0は現ステップ、前ステップ、前々ステップ
 の時間である
- この遅発中性子の取り扱い方法は、周波数変換法以外の方法にも適用可能

遅発中性子先行核の取り扱い

- ステップ間の核分裂中性子源の時間変化を直線 で近似することも可能。
- 時間ステップ幅を極端に大きくしない限り、計算 精度はさほど劣化しない。
- ■「一次近似」を使用する場合もある

■ 周波数(w)の選び方(1):位置非依存の場合

- wは、基本的にはペリオドの逆数となる。
- 従って、一番最初の時間ステップでは、体系の反応度をkeffから 評価し、この反応度を一点炉方程式によってペリオドに変換して wの初期値とすればよい。
- ニステップ目以降は現ステップの周波数を

 $w = \frac{1}{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\ln(\phi)) \approx \frac{\ln(\phi(t + \Delta t) / \phi(t))}{\Delta t}$ で評価し、前ステップから直線外挿することでより精度の高い周波 数の推定値を与えることが出来る。

- 上記の推定は、領域毎、炉心平均のどちらでも可能。
- なお、w=0とすると、通常の差分法になる。

- 周波数(w)の選び方(2):位置依存の場合
 - 最初のタイムステップでは、全てのメッシュでwを0とする。2ス テップ目以降では、前ステップの周波数を初期値とする
 - 外部反復を行う際に以下の式を用いてwを更新

$$\overline{w}_{g}(\mathbf{r}) = \frac{\ln(\phi_{g}(\mathbf{r}, t + \Delta t) / \phi_{g}(\mathbf{r}, t))}{\Delta t}$$

- 更新した位置依存のwを用いて計算を行う。
- 外部反復の過程でwはノード毎に一定値に収束する
- このwを用いると、中性子束の見かけ上の時間微分値(=形状関数の時間微分値)を小さくできるため、時間離散化に対する誤差を低減できる。

- 計算フローは以下の通り(位置依存のwを使用する場合)
 - (1)初期状態で固有値計算を実施。keffを求める。
 - (2)生成断面積をkeffで割る。
 - (3)定常状態における遅発中性子先行核密度を求める。(時間微分項を ゼロとして計算)
 - (4)断面積を変化させる。(過渡計算の開始)
 - (5)第1ステップの計算開始時のwの初期値は、全メッシュ、全エネル ギー群で零とする。第2ステップ目以降は、前ステップのwを初期値とす る。
 - (6)p.65の式に従って、次ステップの中性子束を計算。一回目の外部反復(核分裂中性子源の更新)が終わった段階でwをメッシュ毎に更新。
 - (7)更新したwを用いてp.65の式に従って次ステップの中性子束の反復 計算を継続。
 - (8)次ステップの中性子束が収束するまで(=wが収束するまで)外部反 復計算を繰り返す。
 - (9)p.66の式により、次ステップの遅発中性子先行核密度を計算
 - (10)(6)-(9)を繰り返し、最終ステップまで計算を実施

- ■周波数変換法の特徴
 - 中性子束の時間変化が単項の指数関数で良く近似で きると仮定
 - ステップ状反応度投入直後など、中性子束の二次微分が負 (つまり、上に凸)の変化をする際に精度が悪化する
 - 即発臨界や安定ペリオドに従った出力上昇など、中性子束の時間変動が指数関数で良く近似できるときの精度は高い。
 - タイムステップ内の動的周波数の時間依存性を考慮していない。
 - 反応度の時間変化が大きいときには精度が悪化する可能性がある。
 - 数値解法としてはθ法と大差なく、実装が比較的容易。 (wを零にすることでθ法と等価になる)


■ 周波数変換法との違いは、後ほど議論

- この結果、解くべき方程式は、見かけ上、静的な 状態のものと同じ(固有値計算)になり、静的な計 算ロジックをそのまま使用可能となる。
 - 周波数変換法では、各ステップ毎に固定源計算を使用する

Reactor Physics, Nagoya University, Akio YAMAMOTO









 $w(\mathbf{r},t) = w_s(x,t) + w_a(t)$

Reactor Physics, Nagoya University, Akio YAMAMOTO

一方, w_aは以下の様に求める。

まず、SCM法の「固有値方程式」に体系の「固有値」を導入する。

$$-\nabla D_g(\mathbf{r},t)\cdot\nabla\phi_g(\mathbf{r},t)+\Sigma'_{r,g}(\mathbf{r},t)\phi_g(\mathbf{r},t)$$

$$=\frac{\chi'_{p,g}}{k}\sum_{g'=1}^{G}\nu\Sigma_{f,g'}(\mathbf{r},t)\phi_{g'}(\mathbf{r},t)+\sum_{g'\neq g}\Sigma_{s,g'\rightarrow g}(\mathbf{r},t)\phi_{g}(\mathbf{r},t)$$

- 固有値計算を行って、kが1からずれている場合には、反応度をペリオドに換算し、このペリオドの逆数をwaに加算していく。
- kが1になるまで収束計算を行う。求まったwaが体系全体の中性子束の振幅の時間変化に対する動的周波数になる

Reactor Physics, Nagoya University, Akio YAMAMOTO



SCM法

■ 計算フロー

- (1)初期状態で固有値計算を実施。kを求める。
- (2)生成断面積をkで割る。
- (3)定常状態における遅発中性子先行核密度を求める。
- (4)断面積を変化させる。(過渡計算の開始)
- (5) 炉心の実効増倍率を計算し、ペリオドTを評価する。
 周波数の初期値をw=1/Tとして与える。



- (7)p.78の式を解いてkを求める。このkの値からwaを 求める。
- (8)(7)の結果を用い、p.77に従ってshape partの動的 周波数を更新する。
- (9)(7)と(8)で求めたshape partとamplitude partの動的
 的
 おする。



- (10) (9)で得られた中性子束の周波数を用いることで、 現ステップから次ステップまでの中性子束(核分裂中 性子源)の時間変化が求められる。これを二次式で近 似し、周波数変換法と同様の方法で次ステップの遅 発中性子先行核密度を計算する。
- (11)以下の式で、遅発中性子先行核密度の周波数を 評価する。

$$w_{d,m}(\mathbf{r},t) \equiv \frac{1}{C_m(\mathbf{r},t)} \frac{\partial C_m(\mathbf{r},t)}{\partial t} = \frac{\ln(C_m(\mathbf{r},t+\Delta t)/C_m(\mathbf{r},t))}{\Delta t}$$



■ (11) p.76の式にw_{d,m}を代入し係数を更新する。 ■ (12) (5)-(11)を繰り返し、最終ステップまでを計算

SCM法の特徴

- 固有値計算コードをそのまま使用することができる。
- 中性子束および遅発中性子先行核が単項の指数関数として変化すると仮定

SCM法と周波数変換法との違い

- 動的周波数を収束計算により求めるのは同じ
- 以下の方程式を満足する動的周波数は一意に は決まらない。周波数変換法とSCM法は、それ ぞれ以下の方程式を満足する動的周波数を求 める一方法 $-\nabla D_{\sigma}(\mathbf{r},t)\cdot\nabla\phi_{\sigma}(\mathbf{r},t)+\Sigma'_{r,\sigma}(\mathbf{r},t)\phi_{\sigma}(\mathbf{r},t)$ $= \chi'_{p,g} \sum_{g'=1}^{G} \nu \Sigma_{f,g'}(\mathbf{r},t) \phi_{g'}(\mathbf{r},t) + \sum_{g'\neq g} \Sigma_{s,g'\rightarrow g}(\mathbf{r},t) \phi_{g}(\mathbf{r},t)$ $\Sigma_{r,g}'(\mathbf{r},t) = \Sigma_{r,g}(\mathbf{r},t) + \frac{W_{p,g}(\mathbf{r},t)}{V}$ $\chi'_{p,g} = \left\lceil \left(1 - \beta_{eff}\right) \chi_{p,g} + \sum_{m} \frac{\chi_{d,m,g} \lambda_{m} \beta_{m}}{W_{d,m}(\mathbf{r},t) + \lambda_{m}} \right\rceil$

SCM法と周波数変換法との違い

- では、周波数変換法とSCM法のどちらが「確からしい」動 的周波数が求まるか?
- SCM法は、動的周波数をshape partとamplitude partに 分割し、amplitude partは炉心の位置に依存しないとし て求めている。
- 周波数変換法は、このような近似を用いていない。(しかも、中性子束の時間変化が単項の指数関数のみで表されるという近似は用いていない。用いているのは、単項の指数関数で「良く近似できる」ことのみ)
- 以上のことから、周波数変換法の方がより適切な動的周波数を計算できていると思われる。(=タイムステップの離散化誤差が小さいはずである)



- Multigrid Amplitude Function法の略
- 差分法(θ法)、周波数変換法、改良準静近似法の発展的な統一解法
- 改良準静近似は、中性子束の振幅を一点炉モ デルとして計算するが、MAF法では、中性子束の 振幅を多領域で計算する。



空間依存多群動特性方程式 $\frac{1}{2}\frac{\partial\phi_g}{\partial t} = R_g(\vec{r},t)$ ∂t \mathbf{V}_{g} $R_{g}(\vec{r},t) \equiv -\nabla \vec{J}_{g}(\vec{r},t) - \Sigma_{r,g}(\vec{r},t) \phi_{g}(\vec{r},t)$ $+\sum \sum_{\mathbf{s},g' \to g} (\vec{r},t) \phi_{g'}(\vec{r},t)$ $\varphi' \neq \varphi$ $+ (1 - \beta_{\text{eff}}) \chi_{\text{p},g} \sum_{g'} v \Sigma_{\text{f},g'}(\vec{r},t) \phi_{g'}(\vec{r},t)$ $+\sum \chi_{d.m.g} \lambda_m C_m(\vec{r},t),$



$$\varphi_g(\vec{r},t)$$

Shape function ✓強い空間およびエネルギー依存性 ✓弱い時間依存性

MAF法:因子化した中性子束の時間 微分 $\phi_g(\vec{r},t) = P_{i,g}(t) \times \varphi_g(\vec{r},t)$ $= \omega_{i,g}(t) \phi_g(\vec{r},t) + P_{i,g}(t) \frac{C \varphi_g}{\Im t}$ $\frac{1}{P_{i,g}(t)}\frac{\partial P_{i,g}}{\partial t}$ 動的周波数 ✓強い時間依存性 ✓弱い空間およびエネルギー依存性

MAF法:形状関数の微分方程式

$$\frac{1}{v_{g}} \frac{\partial \phi_{g}}{\partial t} = R_{g}(\vec{r}, t) \qquad \frac{\partial \phi_{g}}{\partial t} = \omega_{i,g}(t)\phi_{g}(\vec{r}, t) + P_{i,g}(t)\frac{\partial \phi_{g}}{\partial t}$$

$$\frac{1}{v_{g}} \frac{\partial \varphi_{g}}{\partial t} = \frac{\widetilde{R}_{g}(\vec{r}, t)}{P_{i,g}(t)}$$

$$\widetilde{R}_{g}(\vec{r}, t) \equiv R_{g}(\vec{r}, t) - \frac{\omega_{i,g}(t)}{v_{g}}\phi_{g}(\vec{r}, t)$$

MAF法: 差分式

$$\begin{array}{c}
\theta \\
\varphi_{g}(\vec{r},t) - \varphi_{g}(\vec{r},t-\Delta t) \approx v_{g}\Delta t \left\{ \theta \frac{\widetilde{R}_{g}(\vec{r},t)}{P_{i,g}(t)} + (1-\theta) \frac{\widetilde{R}_{g}(\vec{r},t-\Delta t)}{P_{i,g}(t-\Delta t)} \right\} \\
\\
\hline
\text{m辺に振幅関数を乗じて、中性子束に対する方程式} \\
\hline
v_{J}_{g}(\vec{r},t) + \left(\Sigma_{r,g}(\vec{r},t) + \frac{\omega_{i,g}(t)}{v_{g}} + \frac{1}{\theta v_{g}\Delta t} \right) \phi_{g}(\vec{r},t) \\
= \sum_{g' \neq g} \Sigma_{s,g' \rightarrow g}(\vec{r},t) \phi_{g'}(\vec{r},t) + (1-\beta_{cff}) \chi_{p,g} \sum_{g'} v \Sigma_{f,g'}(\vec{r},t) \phi_{g'}(\vec{r},t) + \sum_{m} \chi_{d,m,g} \lambda_{m} C_{m}(\vec{r},t) \\
+ \frac{P_{i,g}(t)}{P_{i,g}(t-\Delta t)} \left\{ \left(\frac{1-\theta}{\theta} \right) \widetilde{R}(\vec{r},t-\Delta t) + \frac{\phi_{g}(\vec{r},t-\Delta t)}{\theta v_{g}\Delta t} \right\}$$

MAF法:統一的な動特性解析法

$$\nabla \vec{J}_g(\vec{r},t) + \Sigma_{r,g}(\vec{r},t,\omega_{i,g})\phi_g(\vec{r},t) = Q(\vec{r},t,P_{i,g})$$

corresponding	P(t)	$\omega_{i,g}(t)$	
solution method	$\Gamma_{i,g}(\mathbf{v})$		
theta method	1	0	
(direct method)	1	U	
IQS based on	v(t) *	1 dn	
one-point theory	$n(\iota)$	n(t) dt	
FT	$\exp(\omega_{i,g} t)$	$\frac{1}{\Delta t} \ln \left(\frac{\phi_g(\vec{r}, t)}{\phi_g(\vec{r}, t - \Delta t)} \right)$	

統一的な方程式に基づいた動
 特性解法

振幅関数Pと動的周波数w各 メッシュ、各群で変化させること により、様々な数値解法を実装 可能

IQS: 改良準静近似

FT: 周波数変換法



- 改良準静近似(一点炉)は以下の取り扱いができない
 - 振幅関数の場所依存性
 - 振幅関数のエネルギー依存性



しかし、時間変化は単項の指数関数に従うと仮定 されている



MAF法:TCMFD

粗メッシュ拡散加速(CMFD)法

粗メッシュ計算で詳細メッシュの中性子流を再現するために、以下の補正項を用いる

 $J_{I}^{coarse} = -\overline{D}\left(\phi_{I+1}^{coarse} - \phi_{I}^{coarse}\right) + D_{cor}\left(\phi_{I+1}^{coarse} + \phi_{I}^{coarse}\right)$

■ CMFD反復解法の加速計算に用いられる

 MAF法では、時間領域に拡張したCMFD(TCMFD)が 振幅関数の評価のために用いられる



TCMFDによる動特性計算

- ■数値解法
 - θ法を使用
- 中性子流に対する補正因子(D_{cor})は、タイムステップ 内で時間に対する一次の関数として内挿
 - D_{cor}の時間依存性は緩やかであると仮定



Reactor Physics, Nagoya University, Akio YAMAMOTO

x,y

LMWベンチマークの計算条件

- 動特性計算法
 - Theta, FT, MAF
- 詳細メッシュ分割
 - 50 × 50 × 100 for x-, y-, z-directions
- 時間ステップ
 - Δt = 10 [sec]
 - 参照解: Δt = 0.1 [sec] by direct theta method
- TCMFD
 - 粗メッシュ分割: 6×6×10 for x-, y-, z-directions
 - TCMFD : Δt = 1 [sec]

LMWベンチマークの結果 300 10 \rightarrow theta(10s) power density[W/cc] $-\times$ - FT(10s) 5 relative error [%] 200 - ↔- MAF(10s) 0 ref.(0.1s) theta(10s) 100 \triangle -5 \times FT(10s) MAF(10s) \diamond 0 -10 0 20 40 60 0 20 40 60 t [sec] t [sec] MAF Theta Relative CPU time

23.4

Reactor Physics, Nagoya University, Akio YAMAMOTO

1.0

三次元LRAベンチマーク

BWRの制御棒落下に伴う過渡ベンチマーク
 断熱による温度上昇とドップラ効果を考慮



LRAベンチマークの計算条件

- ■動特性方程式の数値解法
 - direct-Theta, FT, MAF
- 詳細メッシュ分割
 - 110×110×24 for x-, y-, z-directions
- 自動タイムステップ分割
 - $(\omega \Delta t)_{\text{max}} = 0.6$
 - 参照解: $(\omega \Delta t)_{\text{max}} = 0.01$ by direct theta method
- TCMFD
 - 粗メッシュ: 22×22×12 for x-, y-, z-directions
 - 自動タイムステップ分割: (ωΔt)_{max} = 0.01

LRAベンチマークの結果



	MAF	Theta
Relative CPU time	1.0	6.9

4

		Ref.	Theta	FT+T	MAF
	No.of time-step	4998	73	70	73
	Time of the first power peak[s]	0.953	0%	0%	0%
	Average power at the first peak[W/cc]	1481	-6%	-26%	-2%
	Time to the first minimum [s]	1.052	-1%	0%	-1%
	Power density at the first minimum [W/cc]	34.2	-3%	31%	-1%
	Time of the second power peak [s]	1.52	-3%	-3%	3%
	Average power at the 2nd peak[W/cc]	105	-2%	-3%	-4%
	Average power at time 3s[K]	21	-1%	0%	0%
Re	Average fuel temperature at time 3s[K]	495	0%	-1%	0%







時間[s]





時間[s]

自動タイムステップ



[1] T. A. Taiwo, et. al., ANL/CP-78587, Argonne National Laboratory (1993).
■ 空間の取り扱いを近似する方法

■ 一点炉近似

まとめ

- 断熱近似(adiabatic approximation)
- 準静近似(quasi-static approximation)
- 空間の扱いを近似しない方法
 - 改良準静近似(improve quasi-static approximation)
 - 陽解法(forward difference)
 - 陰解法(backward difference)
 - θ法
 - 周波数変換法(frequency transformation)
 - Stiffness confinement method (SCM)
 - Multigrid amplitude function method (MAF)

Reactor Physics, Nagoya University, Akio YAMAMOTO

考文南

- 伴雄一郎、「空間依存動特性方程式の統一的解法の開発」、名古屋大学工学研究科、修士論文、2011年2月
- 池田秀晃, "3次元熱水力結合モデルの高度化とBWR過渡解析への適用", 博士論文, 大阪大学, (2002).
- S. Aoki, T. Suemura, J. Ogawa, et al., "The Verification of 3 Dimensional Nodal Kinetics Coade ANCK Using Transient Benchmark Problems," J. Nucl. Sci. Technol., 44[6], 862-868 (2007).
- T. M. Sutton, B. N. Aviles, "Diffusion theory methods for spatial kinetics calculation," Prog. Nucl. Energy, 30[2], 119-182 (1996).
- T. Endo, M. Tatsumi, "Study on kinetic transport solvers for pin-by-pin core calculation," Proc. PHYSOR2008, Interlaken, Switzerland, Sept. 14-19, 2008, (2008). [CD-ROM]
- T. Downar, D. Lee, Y. Xu, et al., PARCS v2.6 U.S NRC Core Neutronics Simulator THEORY MANUAL, School of Nuclear Engineering Purdue University (2004).
- Y. Ishii, H. Sano, Y. Fukasawa, "Verification of Three-dimensional Multi-energy Group Kinetics Analysis Model by Using BWR Critical Operation Data," J. Nucl. Sci. Technol., 36, 755-760 (1999).
- M. Tamitani, T. Iwamoto, B. R. Moore, "Development of Kinetics Model for BWR Core Simulator AETNA," J. Nucl. Sci. Technol., 40[4], 201-212 (2003).
- P. J. Turinsky, R. M. K. AL-Chalabi, P. Engrand, et al., NESTLE Few-group neutron diffusion equation solver utilizing the nodal expansion method for eigenvalue, adjoint, fixed-source steady-state and transient problems, Electric Power Research Center, North Carolina State University (1994).
- V. G. Zimin, H. Ninokata, "Nodal neutron kinetics model based on nonlinear iteration procedure for LWR analysis," J. Nucl. Sci. Technol., 25[8], 507-528 (2003).
- A. Hotta, "Development and verification of a BWR core simulation system for space and time dependent coupled phenomena," Thesis, Doctor of Engineering in Nuclear Engineering, Tokyo Institute of Technology (2001).
- T. Bahadir, S. Lindahl, "Studsvik's next generation nodal code SIMULATE-5," ANFM 2009, South Carolina, April 12-15 (2009).
- M. Hursin, T. J. Downar, J. Thomas, "PWR control rod ejection analysis with the method of characteristic code DeCART," PHYSOR2008, Switzerland, Sept 14-19 (2008).