やさしい伝熱の話

- 熱と温度
- 熱伝達の基礎
- 熱伝導の基礎

熱と温度

熱と温度の関係についての私の勝手なイメージ

・熱によって物質の温度が上昇する。

→　熱エネルギーがその物質に渡され、熱エネルギー自体は「消滅する」というイメージ

・熱は物質内や物質間を移動する。

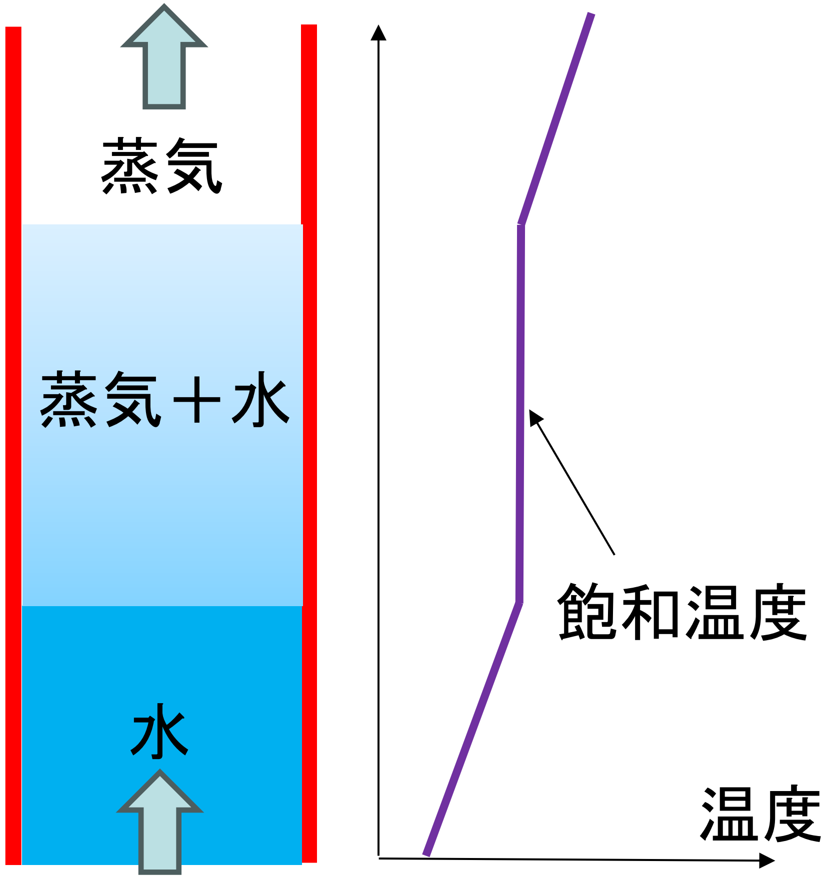
→　移動するだけなので、熱エネルギーは「消滅しない」というイメージ

熱による温度上昇

- 物体に付与される熱は、顕熱と潜熱に分類される。

- 顕熱は物体の温度上昇に、潜熱は物体の状態変化に、それぞれ使われる。

- 発熱する加熱壁面内を上方向に通過する流体の温度分布は右図のようになる。



顕熱の例

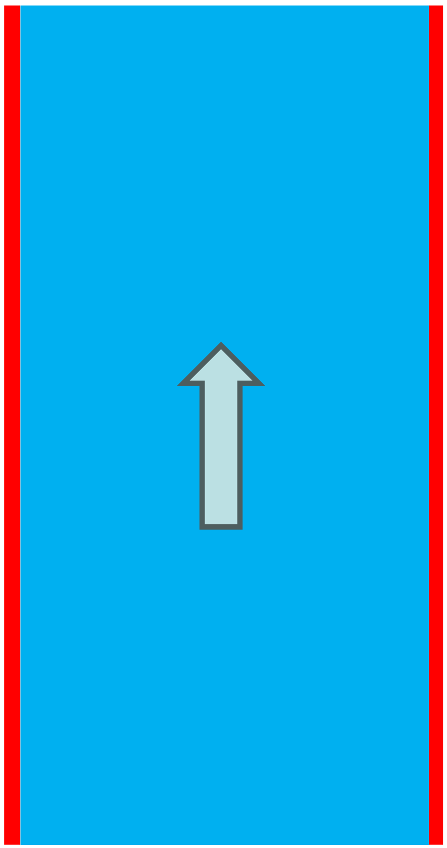
・熱エネルギーによる温度上昇の大きさは物質の定圧比熱によって決まる。

・q[W]の発熱がある加熱壁面内を通過する流体の出入口温度差ΔTは、流体の質量流量をm[kg/s]、比熱をC[J/kg/K]とすると、

$$mC\Delta T = q$$

から得られる。

q[W]



潜熱の例（1）

・注射の前に皮膚にアルコールを塗ったらひんやりする。

・ビールを急いで冷やすために濡らしたキッチンペーパーに巻いて冷蔵庫に入れる。

・冷たいビールを外に出したままにすると、缶表面に水滴が生じて、ビールがぬるくなる。

・ガスコンロの使用後に取り外したガスボンベが冷たい。

・打ち水によって撒かれた水の気化で周囲の温度が下がる。

潜熱の例（２）

・かいた汗が乾くことによって体温が下がって風邪を引く。

・風呂上がりに髪を濡れたままにしたので、頭の表面で水が乾くことで体温が下がり、やはり風邪を引く。

・体温を下げるために、犬が舌を出す。

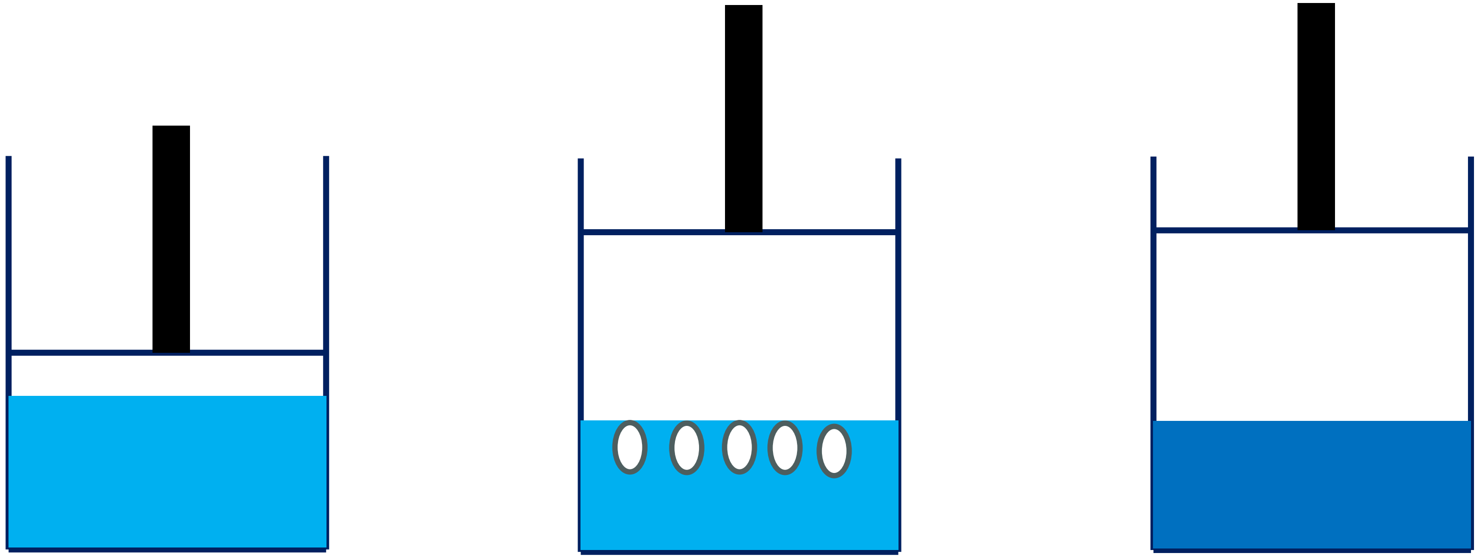
・寝苦しい夜に、凍らせたペットボトルを枕元に置くことによって、眠れるようにする。

減圧沸騰

・高温高圧の水が密閉容器内に蓄えられているとする。

・この容器の体積を瞬時に増やすと、容器内の圧力が低下する。そのため、沸点が低下し、水の温度よりも低くなると容器内の水が沸騰を始める。

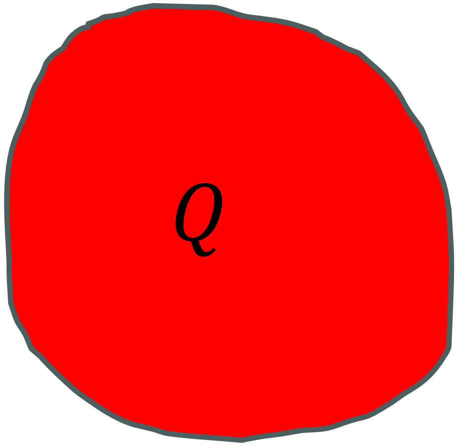
・沸騰により、水からエネルギーが潜熱として奪われることにより、水の温度が低下し、沸騰は停止する。



熱伝達の基礎

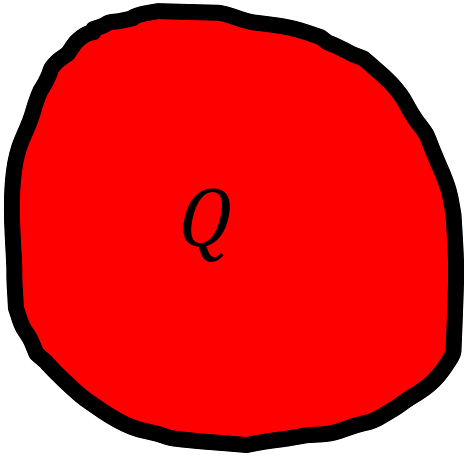
断熱下での発熱

比熱がC[J/kg/K]、密度がρ[kg/cm^3]、体積がV[cm^3] 、表面積がA[cm^2]の物体を考え、それが出力密度Q[W/cm^3]で発熱しているとする。
なお、これらの値は一定であるとする。



断熱下での発熱

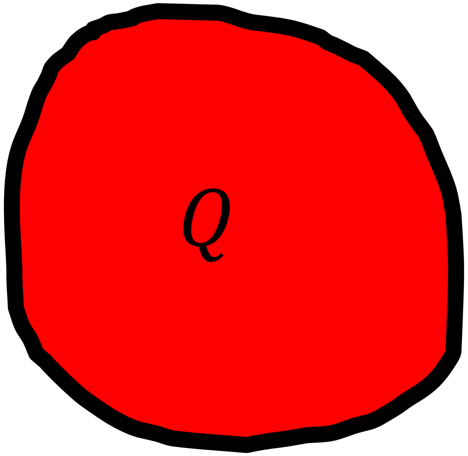
比熱がC[J/kg/K]、密度がρ[kg/cm^3]、体積がV[cm^3] 、表面積がA[cm^2]の物体を考え、それが出力密度Q[W/cm^3]で発熱しているとする。



物体の外側が完全に断熱されているとしたとき、
時間とともに物体の<u>何がどう変わっていく</u>だろうか？

断熱下での発熱

比熱がC[J/kg/K]、密度がρ[kg/cm^3]、体積がV[cm^3] 、表面積がA[cm^2]の物体を考え、それが出力密度Q[W/cm^3]で発熱しているとする。

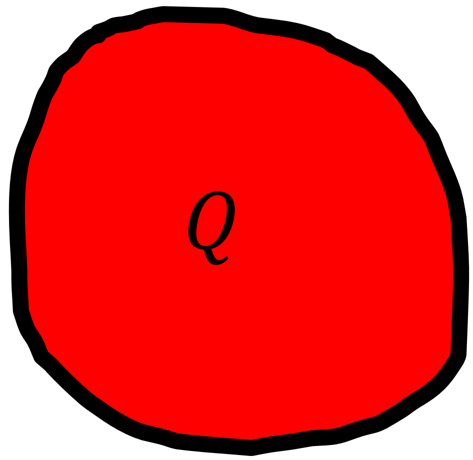


物体の外側が完全に断熱されているとしたとき、
時間とともに物体の<u>何がどう変わっていく</u>だろうか？
→　温度が増加していく。

では、温度は<u>どのように</u>変わっていくだろうか？

断熱下での発熱

比熱がC[J/kg/K]、密度がρ[kg/cm^3]、体積がV[cm^3] 、表面積がA[cm^2]の物体を考え、それが出力密度Q[W/cm^3]で発熱しているとする。

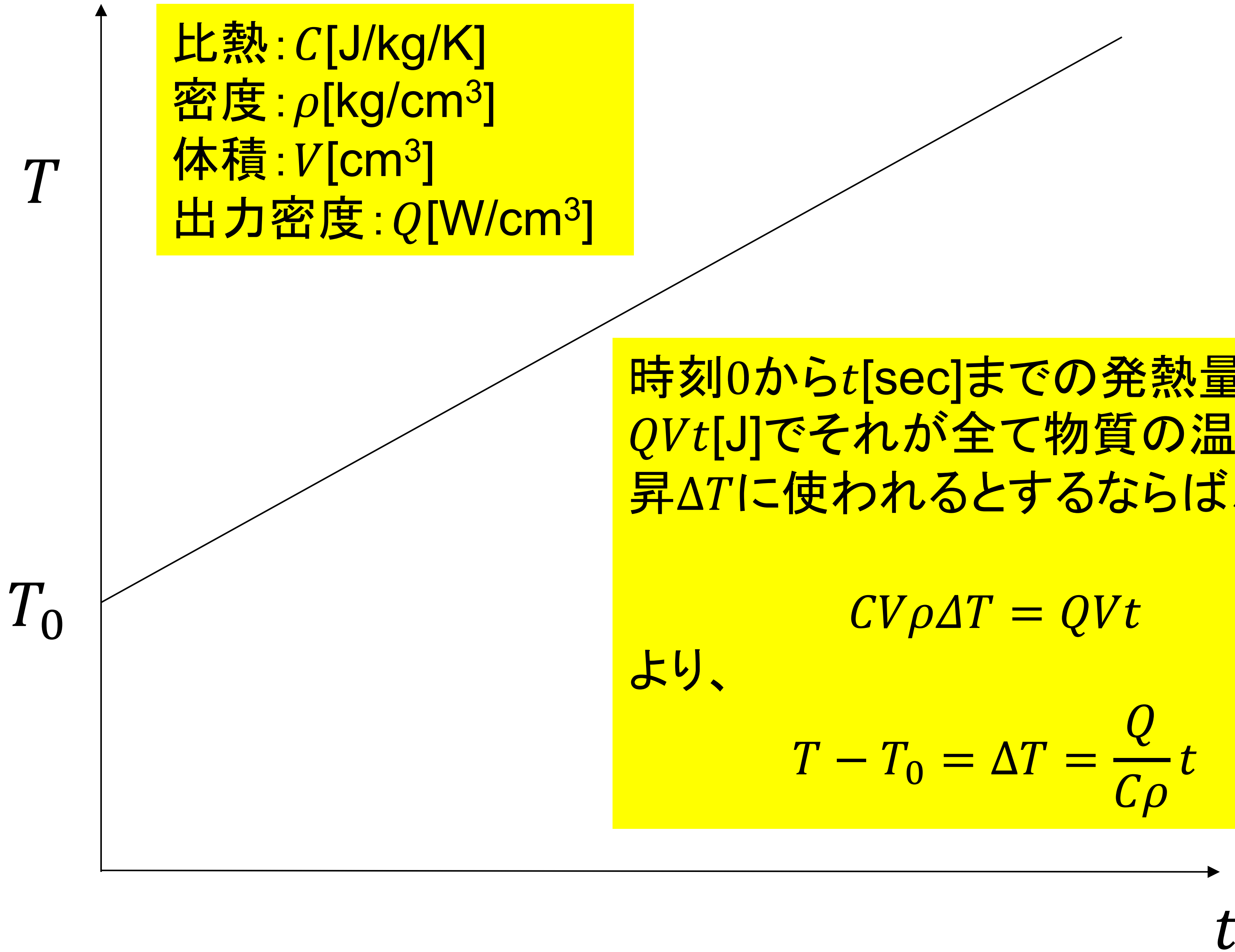


物体の外側が完全に断熱されているとしたとき、
時間とともに物体の何がどう変わっていくだろうか？
→　温度が増加していく。

では、温度はどのように変わっていくだろうか？
→　時間とともに一次関数的に増加していく。

断熱下での発熱

比熱：C[J/kg/K]
密度：ρ[kg/cm^3]
体積：V[cm^3]
出力密度：Q[W/cm^3]



時刻0からt[sec]までの発熱量はQVt[J]でそれが全て物質の温度上昇ΔTに使われるとするならば、

$$CV\rho\Delta T = QVt$$

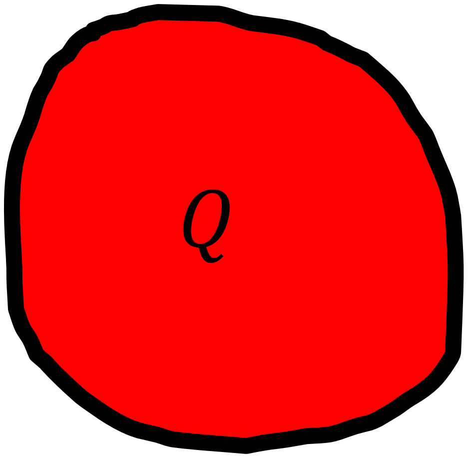
より、

$$T - T_0 = \Delta T = \frac{Q}{C\rho}t$$

断熱下での発熱

比熱がC[J/kg/K]、密度がρ[kg/cm^3]、体積がV[cm^3] 、表面積がA[cm^2]の物体を考え、それが出力密度Q[W/cm^3]で発熱しているとする。

微小時間Δtにおける発熱量は$QV\Delta t$[J]である。



一方、Δtにおける温度上昇をΔTとしたとき、この温度上昇に必要な熱量は$C\rho V\Delta T$[J]である。

従って、$C\rho V\Delta T = QV\Delta t$であることが分かり、以下の微分方程式が得られる。

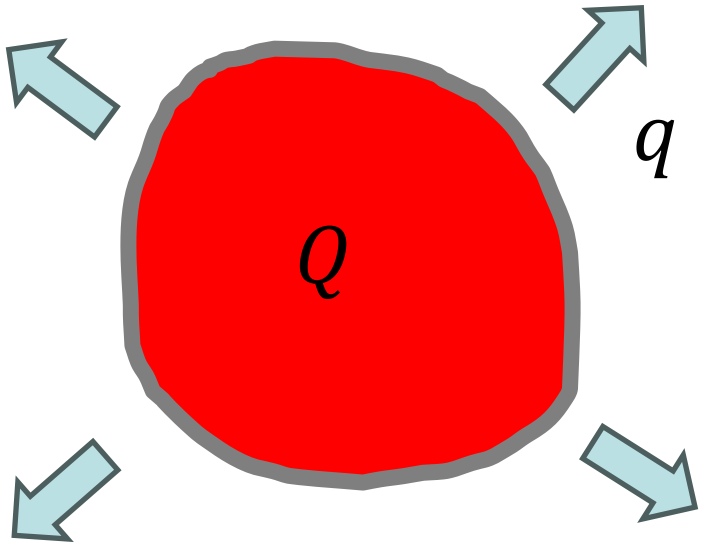
$$\frac{dT(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{QV}{C\rho V}$$

よって、$T(t) = \frac{Q}{C\rho} t + D$となり、$T(0) = T_0$であるとするならば、

$T(t) = \frac{Q}{C\rho} t + T_0$となり、温度が一次関数状に増加することが分かる。

熱が逃げる条件での発熱

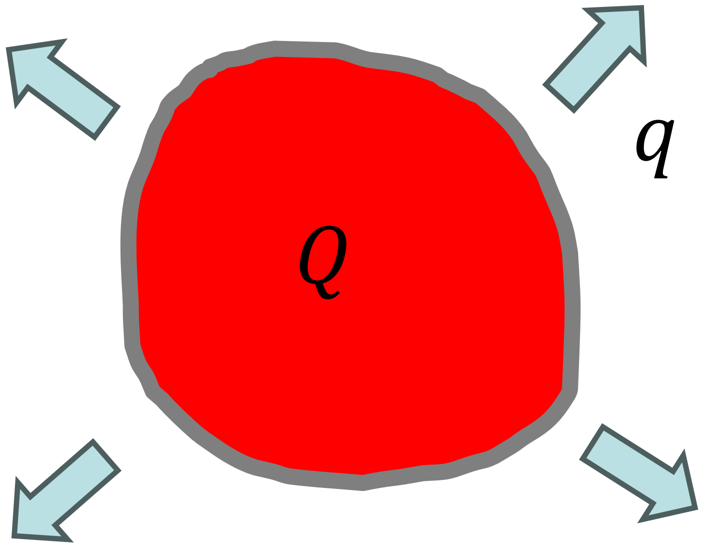
比熱がC[J/kg/K]、密度がρ[kg/cm^3]、体積がV[cm^3] 、表面積がA[cm^2]の物体を考え、それが出力密度Q[W/cm^3]で発熱しているとする。



物体表面から外部に平均熱流束q[W/cm^2]で熱が逃げていくとしたときにはどうなるだろうか？

熱が逃げる条件での発熱

比熱がC[J/kg/K]、密度がρ[kg/cm^3]、体積がV[cm^3] 、表面積がA[cm^2]の物体を考え、それが出力密度Q[W/cm^3]で発熱しているとする。



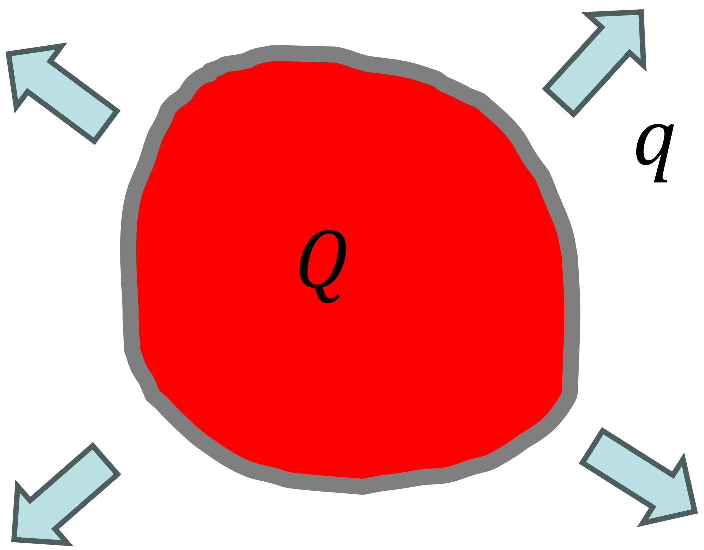
物体表面から外部に平均熱流束q[W/cm^2]で熱が逃げていくとしたときにはどうなるだろうか？

→　発熱量＞除熱量、すなわち$QV > qA$である限りは、温度上昇が続く。

$$\frac{dT(t)}{dt} = \frac{(QV - qA)}{C\rho V}$$

熱が逃げる条件での発熱

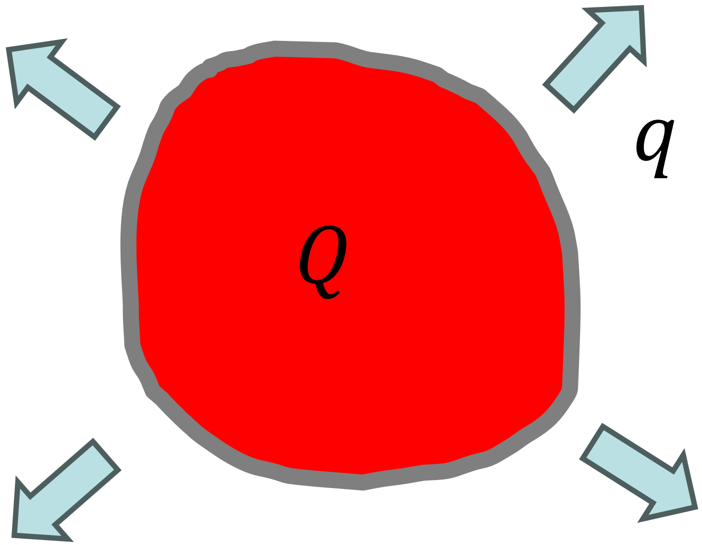
比熱がC[J/kg/K]、密度がρ[kg/cm^3]、体積がV[cm^3] 、表面積がA[cm^2]の物体を考え、それが出力密度Q[W/cm^3]で発熱しているとする。



物体表面から外部に平均熱流束q[W/cm^2]で熱が逃げていくとしたときにはどうなるだろうか？
→ 発熱量＝除熱量、すなわち$QV = qA$である場合は？

熱が逃げる条件での発熱

比熱がC[J/kg/K]、密度がρ[kg/cm^3]、体積がV[cm^3] 、表面積がA[cm^2]の物体を考え、それが出力密度Q[W/cm^3]で発熱しているとする。



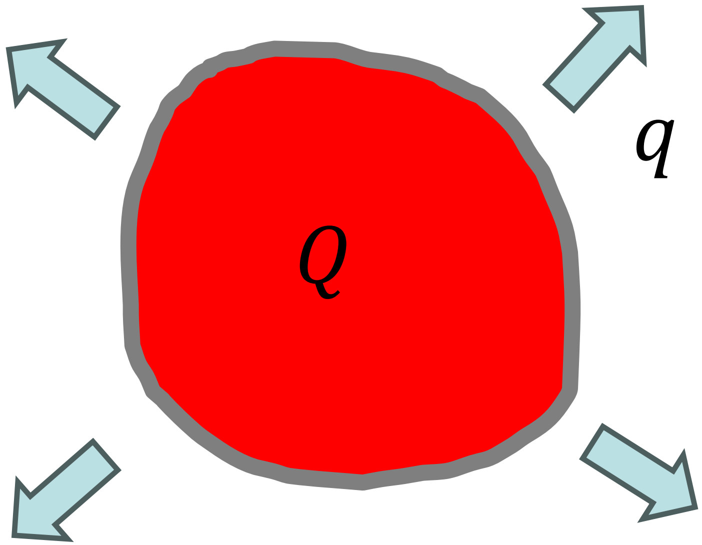
物体表面から外部に平均熱流束q[W/cm^2]で熱が逃げていくとしたときにはどうなるだろうか？

→　発熱量＝除熱量、すなわち$QV = qA$である場合は、温度は時間に対して不変である。

$$\frac{dT(t)}{dt} = \frac{(QV - qA)}{C\rho V} = 0$$

熱が逃げる条件での発熱

比熱がC[J/kg/K]、密度がρ[kg/cm^3]、体積がV[cm^3]、表面積がA[cm^2]の物体を考え、それが出力密度Q[W/cm^3]で発熱しているとする。



物体表面から外部に平均熱流束q[W/cm^2]で熱が逃げていくとしたときにはどうなるだろうか？

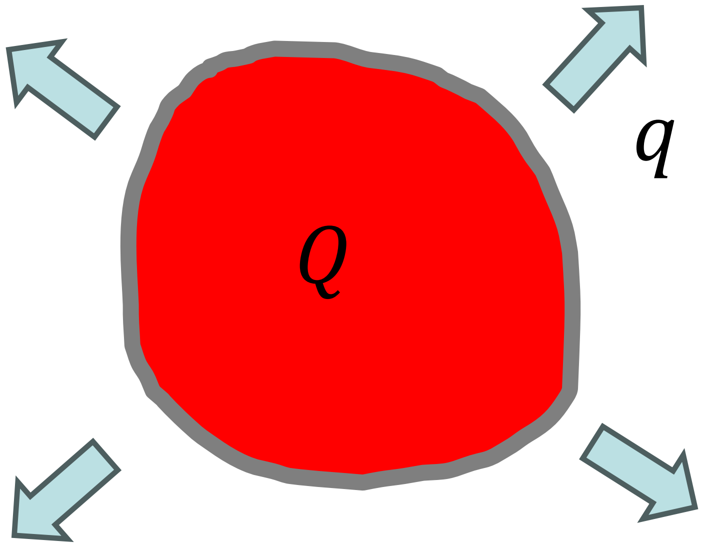
→　発熱量＜除熱量、すなわち$QV < qA$である場合は、温度は減少する。

$$\frac{dT(t)}{dt} = \frac{(QV - qA)}{V\rho C}$$

分子が負になる。

対流熱伝達による伝熱

比熱がC[J/kg/K]、密度がρ[kg/cm^3]、体積がV[cm^3] 、表面積がA[cm^2]の物体を考え、それが出力密度Q[W/cm^3]で発熱しているとする。

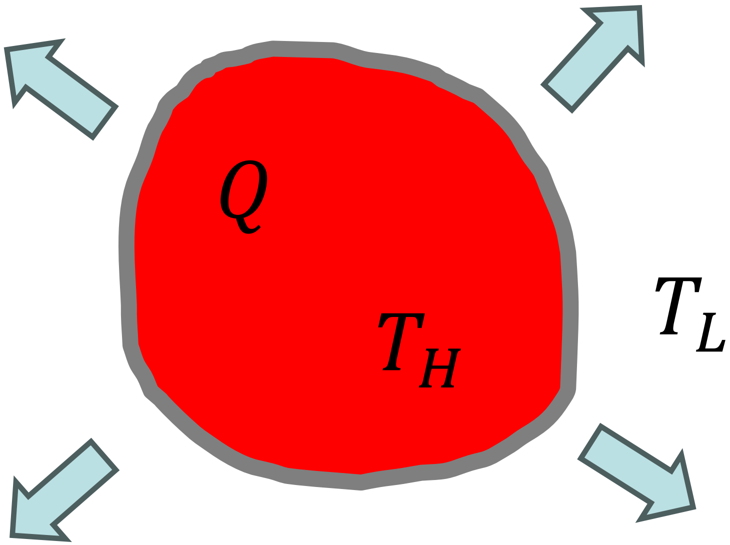


物体表面から外部に平均熱流束q[W/cm^2]で熱が逃げていくとしたときにはどうなるだろうか？

物体の外側を流体が流れていて、発熱物体の表面と流体との間で対流熱伝達により熱が伝わっているものとする。このとき、平均熱流束qを記述するためにはどのようなパラメータが必要か？

対流熱伝達による伝熱

比熱がC[J/kg/K]、密度がρ[kg/cm^3]、体積がV[cm^3]、表面積がA[cm^2]の物体を考え、それが出力密度Q[W/cm^3]で発熱しているとする。



ニュートンの冷却法則

$$\boxed{q = h(T_H - T_L)}$$

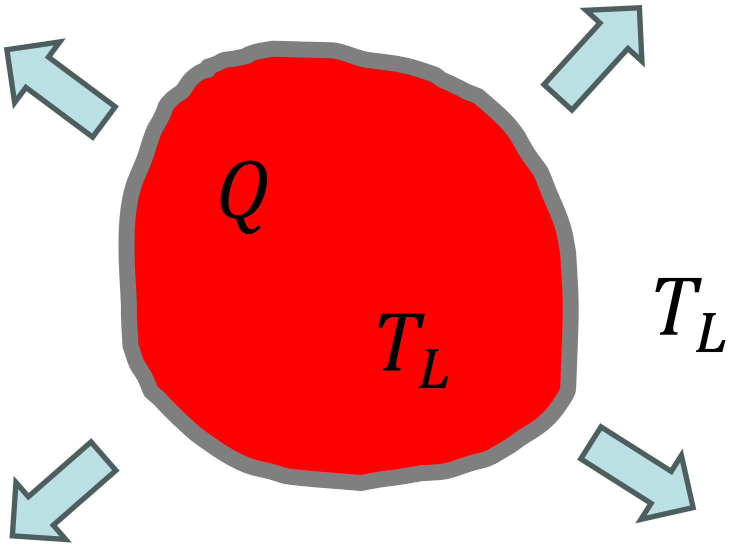
h: 熱伝達係数[W/(cm^{2}K)]
T_H: 発熱体の表面温度
T_L: 外側流体のバルク温度

物体表面から外部に平均熱流束q[W/cm^2]で熱が逃げていくとしたときにはどうなるだろうか？

物体の外側を流体が流れていて、発熱物体の表面と流体との間で対流熱伝達により熱が伝わっているものとする。このとき、平均熱流束qを記述するためにはどのようなパラメータが必要か？

対流熱伝達による伝熱

比熱がC[J/kg/K]、密度がρ[kg/cm^3]、体積がV[cm^3] 、表面積がA[cm^2]の物体を考え、それが出力密度Q[W/cm^3]で発熱しているとする。



ニュートンの冷却法則

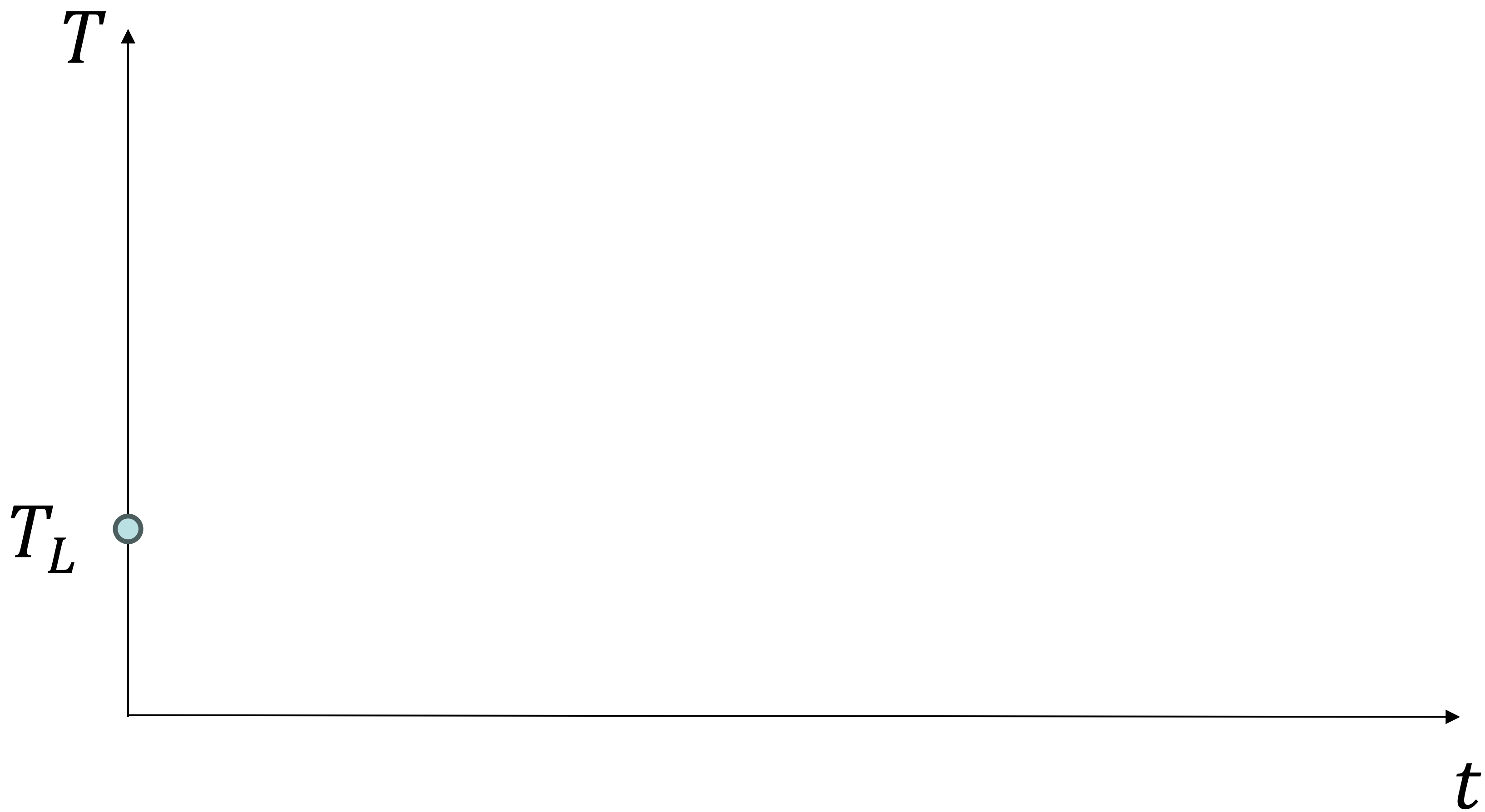
$$q = h(T_H - T_L)$$

h : 熱伝達係数[W/(cm^{2}K)]
T_H : 発熱体の表面温度
T_L : 外側流体のバルク温度

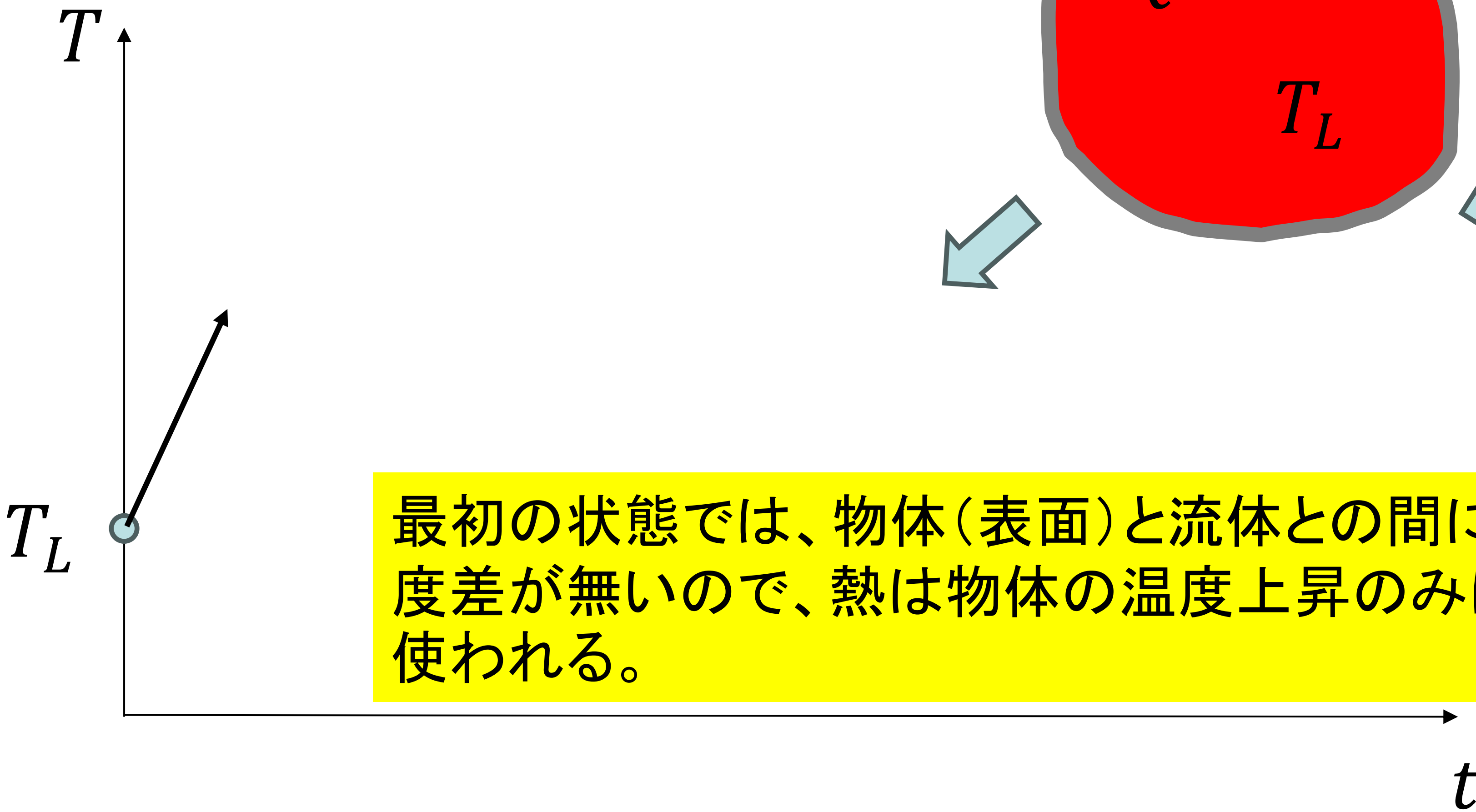
発熱体の温度は空間的に一様に変化するものとし、外側流体の温度T_Lは一定であるとする。
仮に、最初の状態で、物体の温度が外側流体の温度と同一であったとき、時間とともに物体の温度はどのように変化するだろうか？

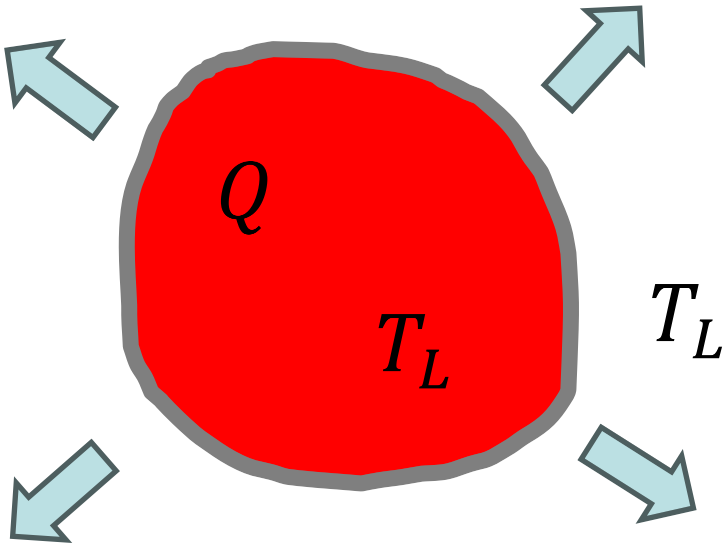
横軸に時間、縦軸に温度をとった図をイメージしよう。

対流熱伝達による伝熱



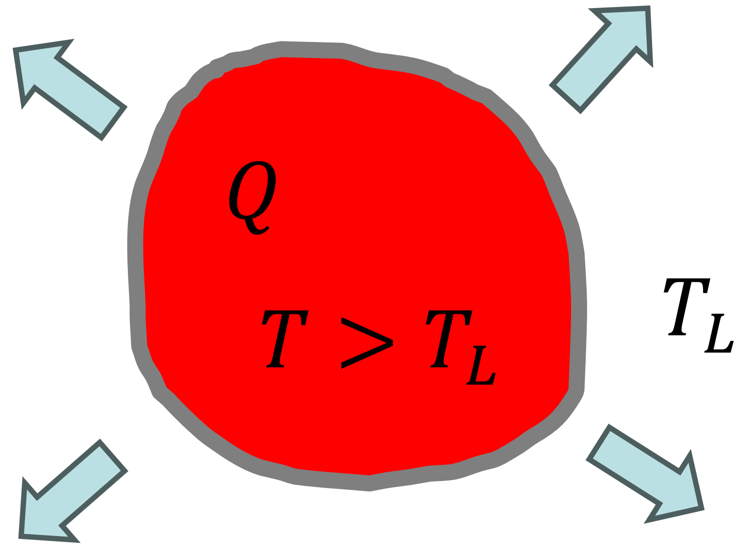
対流熱伝達による伝熱

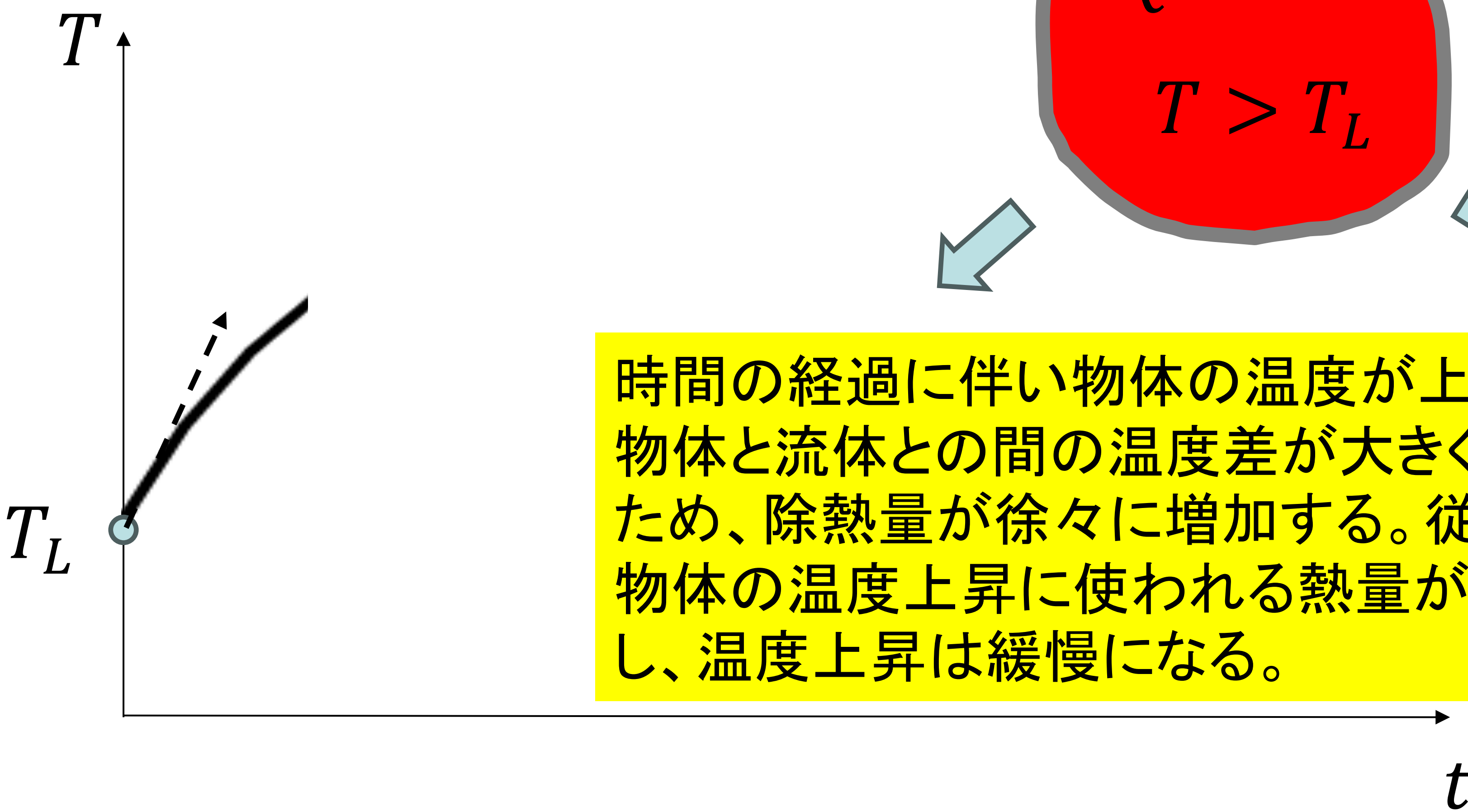




最初の状態では、物体（表面）と流体との間に温度差が無いので、熱は物体の温度上昇のみに使われる。

対流熱伝達による伝熱

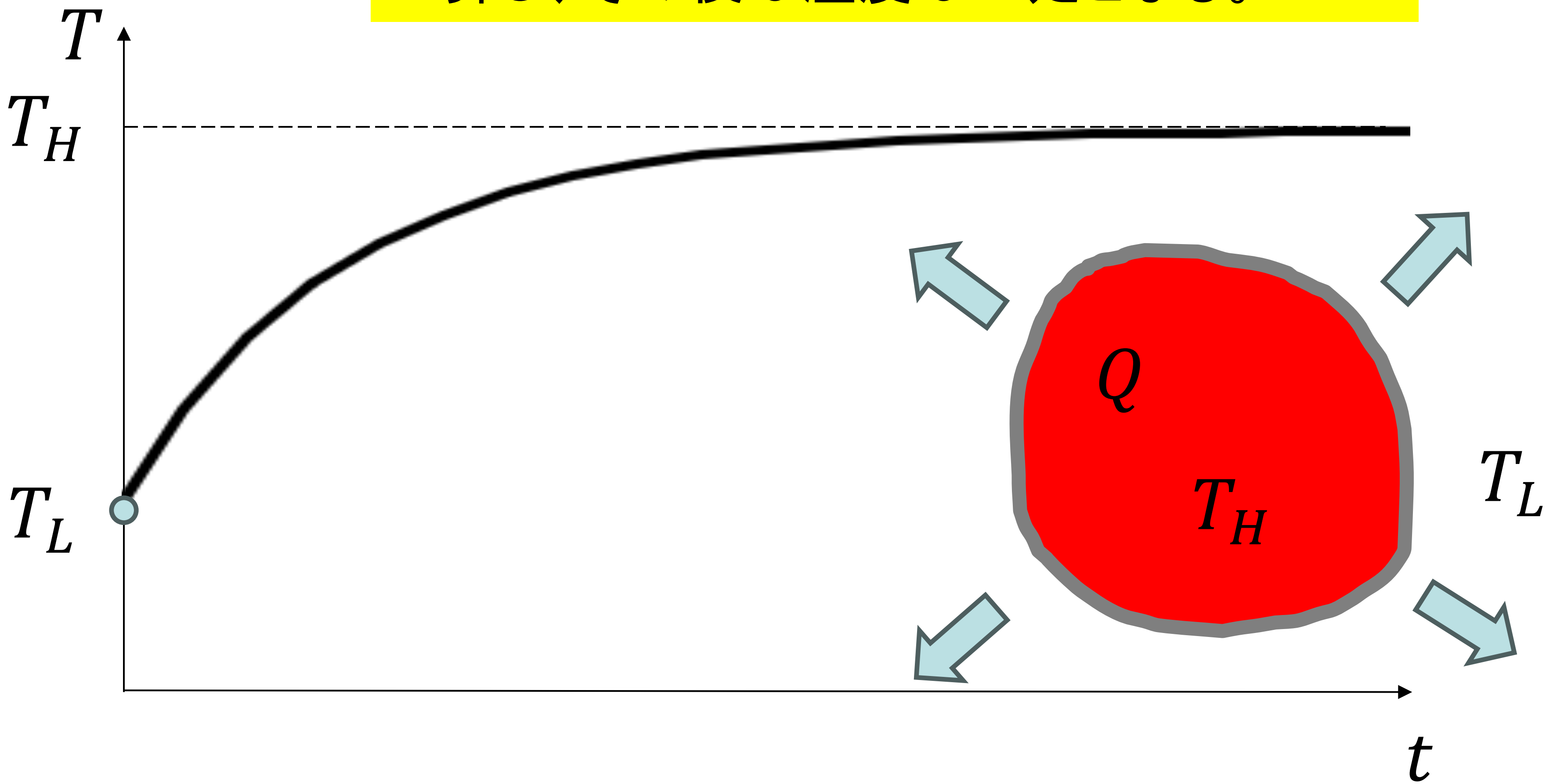




時間の経過に伴い物体の温度が上昇し、物体と流体との間の温度差が大きくなるため、除熱量が徐々に増加する。従って、物体の温度上昇に使われる熱量が低下し、温度上昇は緩慢になる。

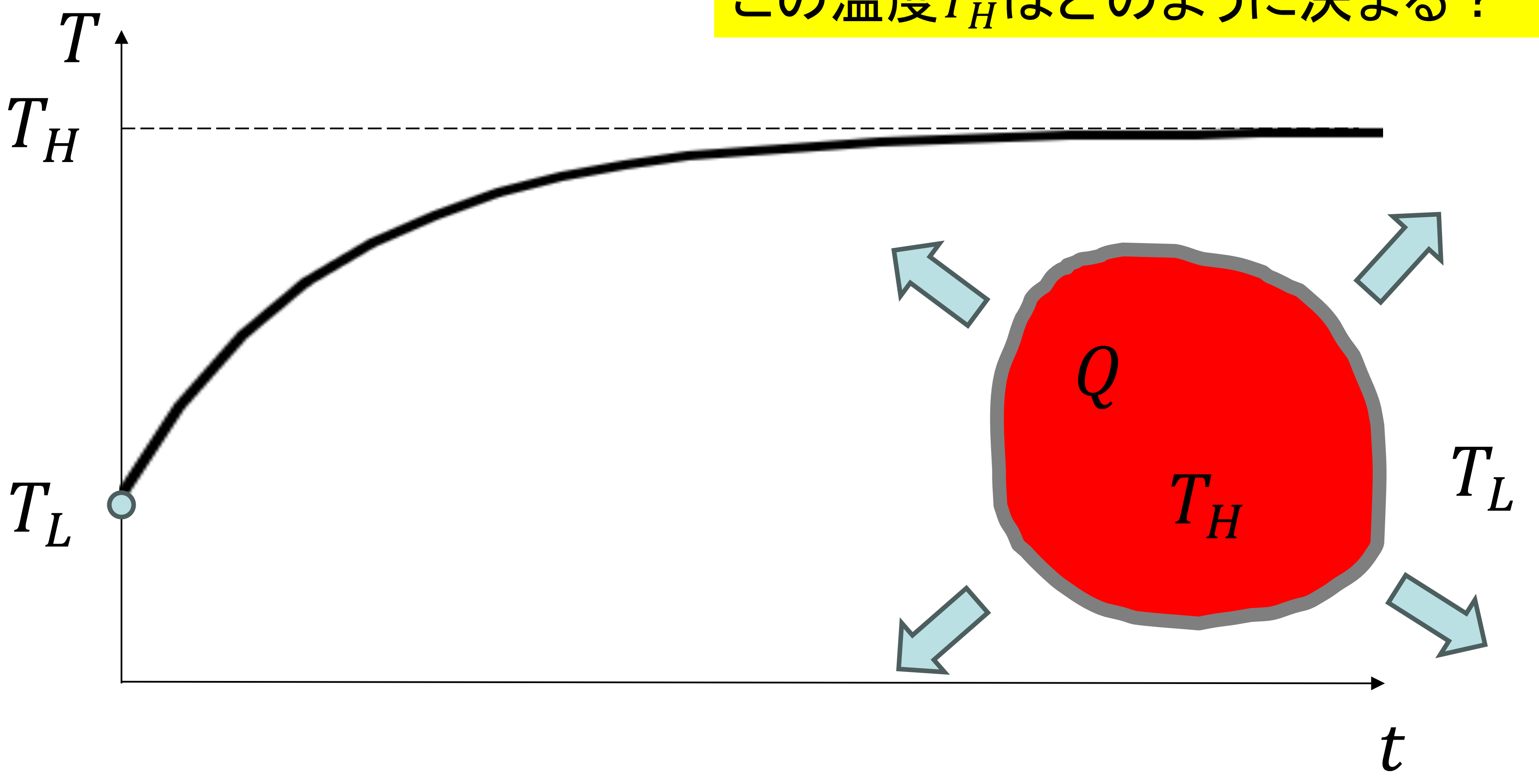
対流熱伝達による伝熱

最終的に、発熱と除熱が釣り合う温度まで上昇し、その後は温度は一定となる。



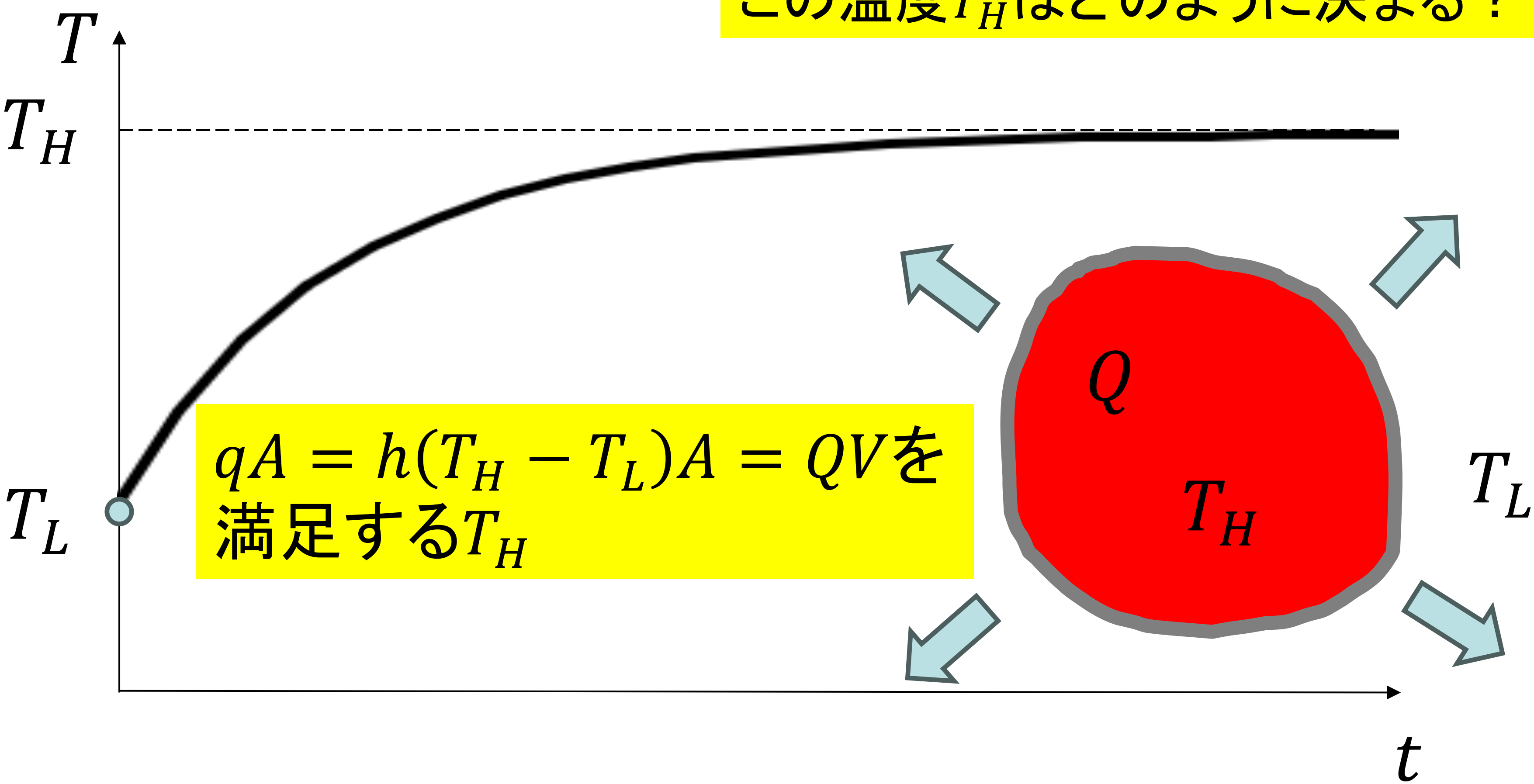
対流熱伝達による伝熱

この温度T_Hはどのように決まる？



対流熱伝達による伝熱

この温度T_Hはどのように決まる？

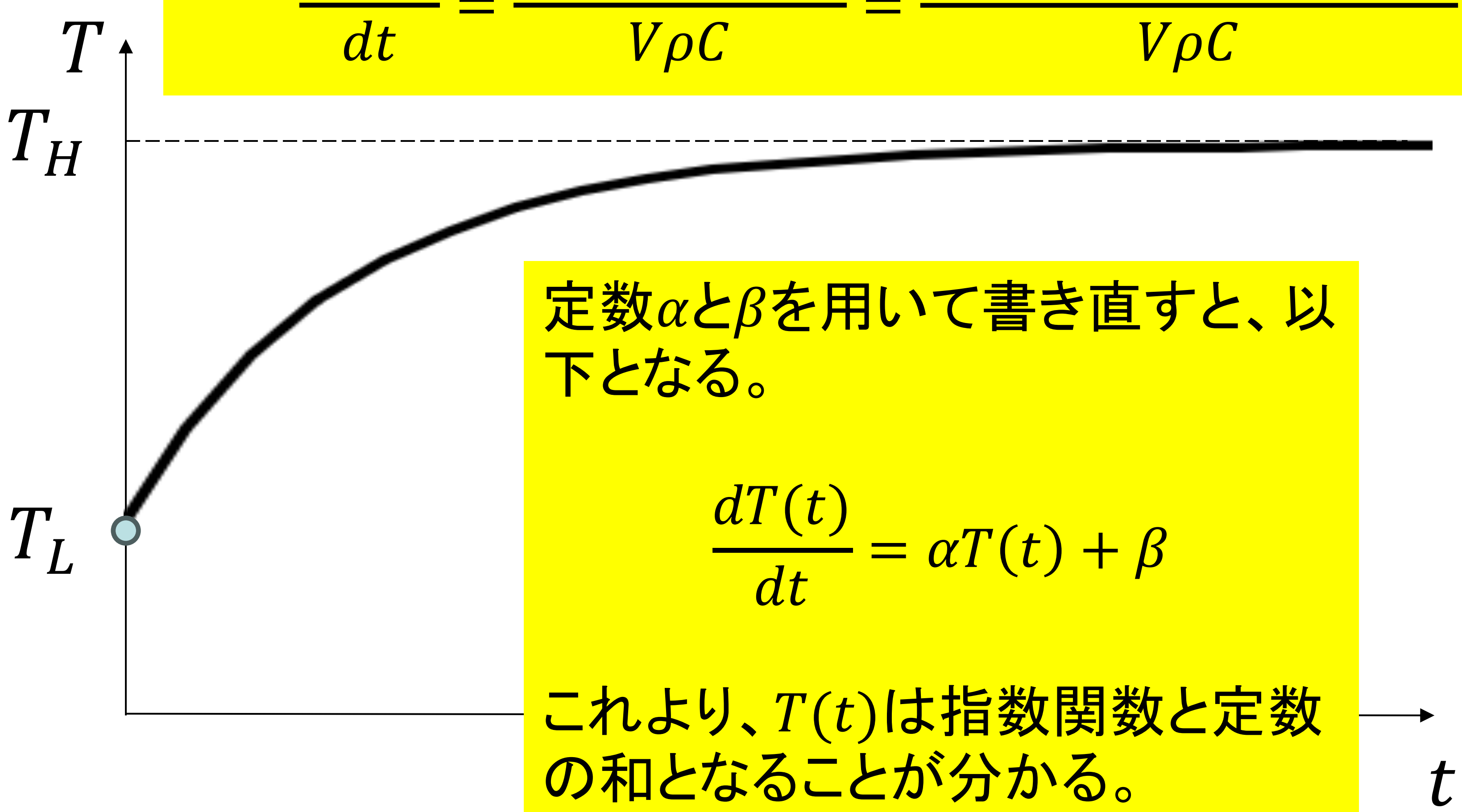


$qA = h(T_H - T_L)A = QV$を満足するT_H

対流熱伝達による伝熱

以下のように微分方程式を立てれば厳密な解が得られる:

$$\frac{dT(t)}{dt} = \frac{(QV - q(t)A)}{V\rho C} = \frac{(QV - h(T(t) - T_L)A)}{V\rho C}$$



定数αとβを用いて書き直すと、以下となる。

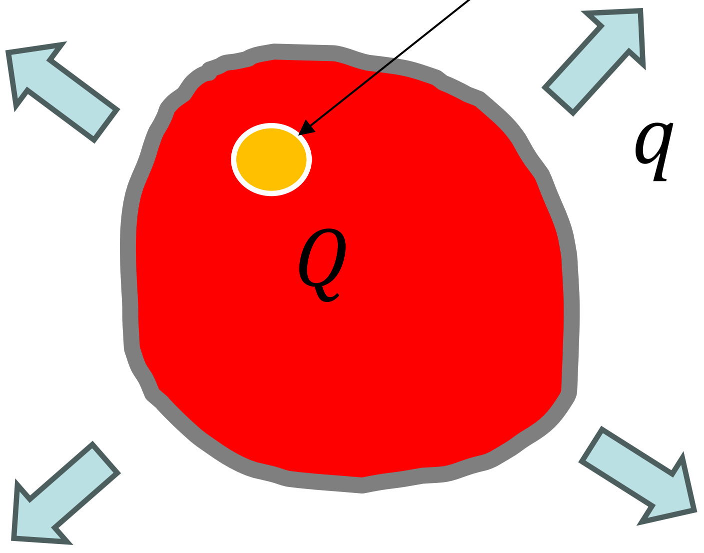
$$\frac{dT(t)}{dt} = \alpha T(t) + \beta$$

これより、$T(t)$は指数関数と定数の和となることが分かる。

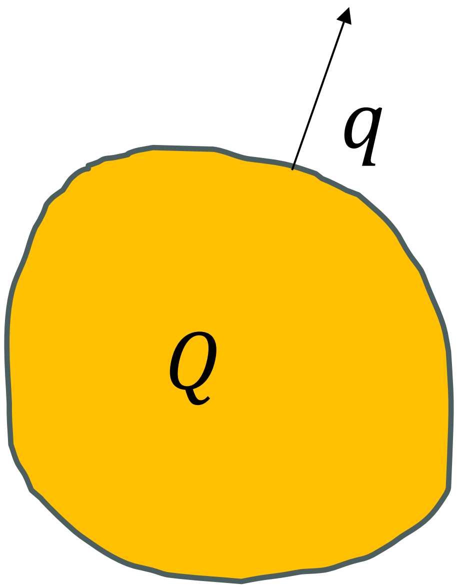
熱伝導の基礎

熱伝導の基礎

これまでは、発熱体の温度は空間的に一様に変化するものとしていたが、実際には発熱体の内部に温度分布が生じる。
このことを考えるために、この発熱体の内部の微小体積を考える。



熱伝導の基礎



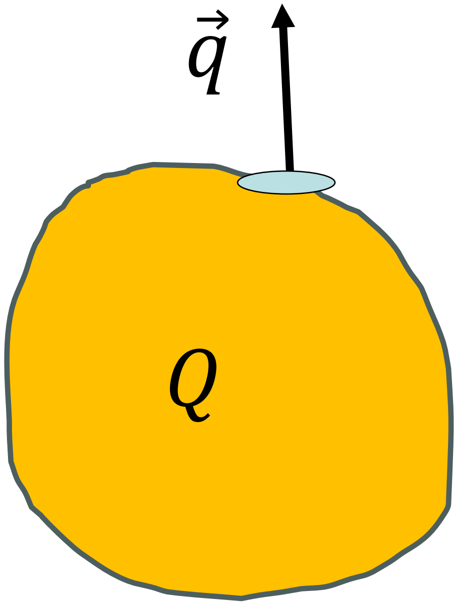
微小体積の、ある表面位置における熱流束qは、その位置での微小面積ΔAを（単位時間に）通過する熱量がΔQであるとき、

$$q = \frac{\Delta Q}{\Delta A}$$

と書ける。

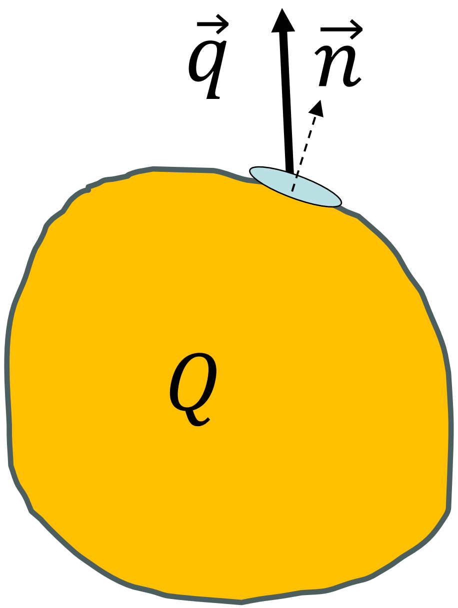
従って、熱流束は、「単位面積あたりの通過熱量」と理解できる、というのは正しくありません。

熱伝導の基礎



厳密には、熱流束はベクトル量であり、「熱流束ベクトルに対して直交する平面上の」単位面積あたりの通過熱量を示す。

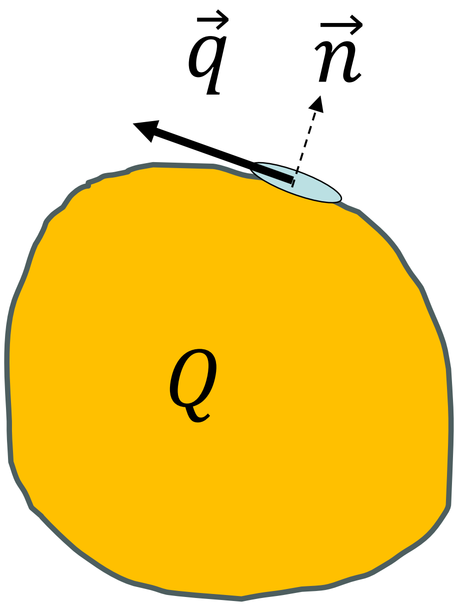
熱伝導の基礎



厳密には、熱流束はベクトル量であり、「熱流束ベクトルに対して直交する平面上の」単位面積あたりの通過熱量を示す。

従って、「物体表面の」単位面積あたりの通過熱量は、熱流束ベクトルを$\vec{q}$、物体表面の法線ベクトルを$\vec{n}$とすると、$(\vec{q} \cdot \vec{n})$と書ける。

熱伝導の基礎

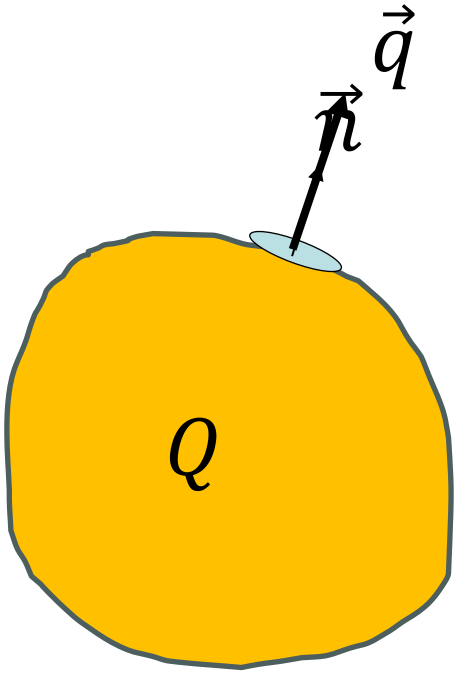


厳密には、熱流束はベクトル量であり、「熱流束ベクトルに対して直交する平面上の」単位面積あたりの通過熱量を示す。

従って、「物体表面の」単位面積あたりの通過熱量は、熱流束ベクトルを$\vec{q}$、物体表面の法線ベクトルを$\vec{n}$とすると、$(\vec{q}\cdot\vec{n})$と書ける。

このような場合は$\vec{q}\cdot\vec{n}=0$となり、この表面での通過熱量はゼロである。

熱伝導の基礎

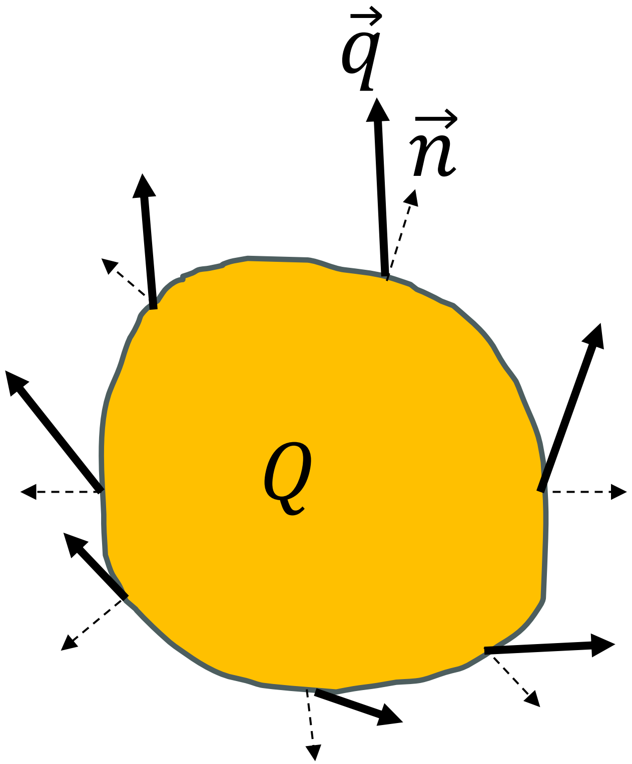


厳密には、熱流束はベクトル量であり、「熱流束ベクトルに対して直交する平面上の」単位面積あたりの通過熱量を示す。

従って、「物体表面の」単位面積あたりの通過熱量は、熱流束ベクトルを$\vec{q}$ 、物体表面の法線ベクトルを$\vec{n}$とすると、$(\vec{q}\cdot\vec{n})$と書ける。

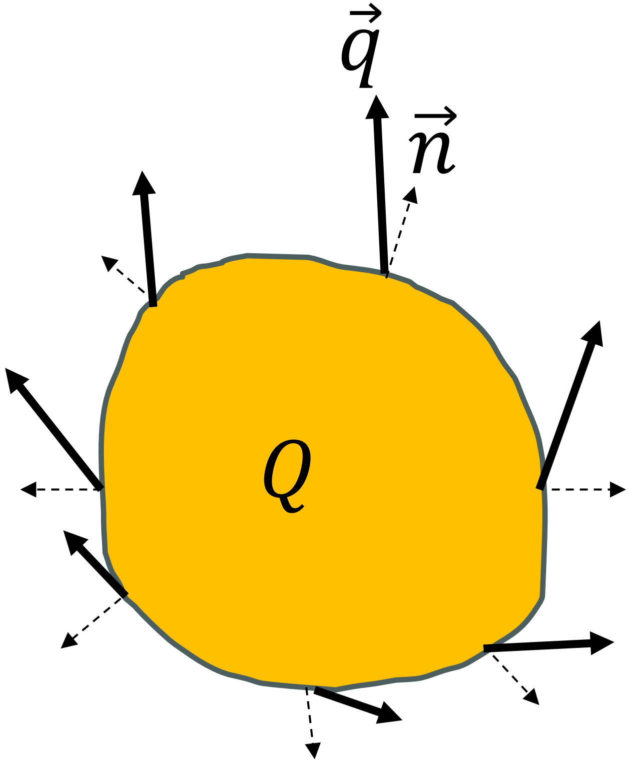
このような場合は
$\vec{q}\cdot\vec{n}=\vec{q}$となり、
熱流束ベクトルの大きさそのものが「物体表面の」単位面積あたりの通過熱量を示す。

熱伝導の基礎



左図のような場合、この物体表面から漏れていく総熱量はどのように記述されるか？

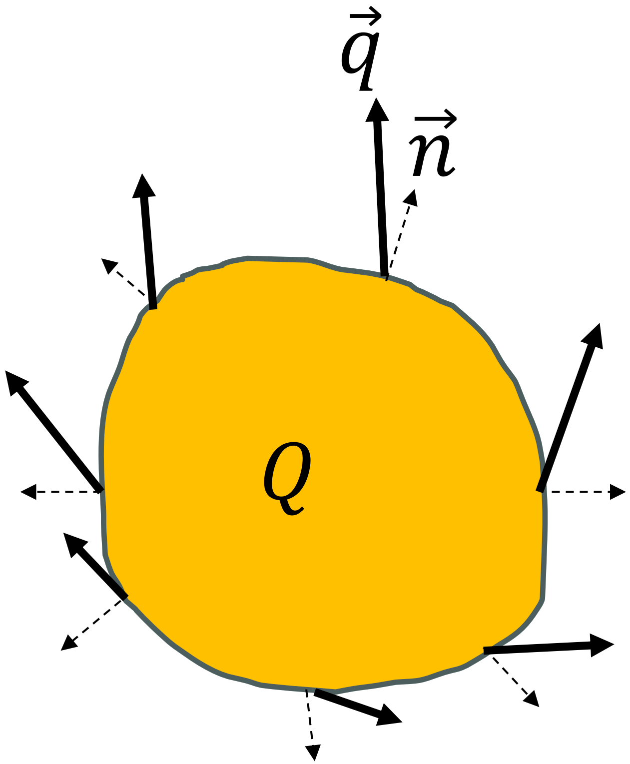
熱伝導の基礎



左図のような場合、この物体表面から漏れていく総熱量は以下のように$(\vec{q}\cdot\vec{n})$の表面積分で記述される。

$$\int(\vec{q}\cdot\vec{n})dA$$

熱伝導の基礎



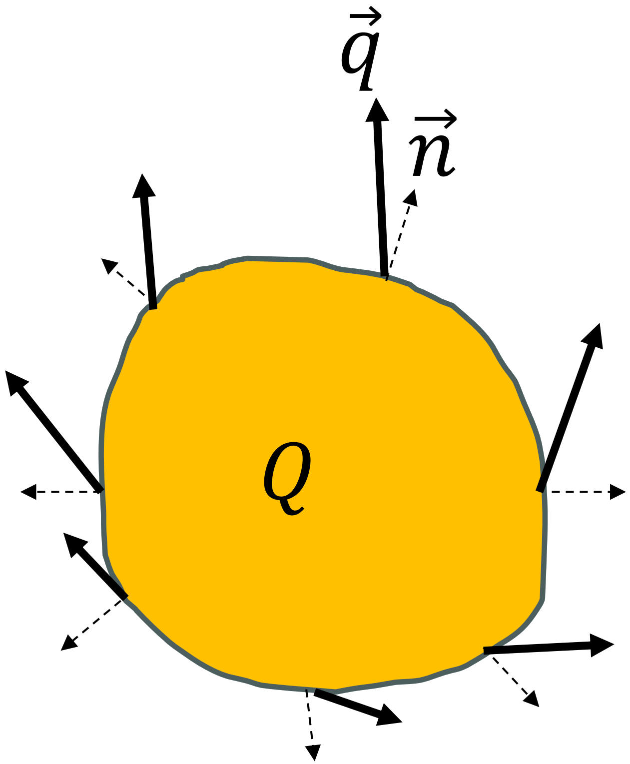
左図のような場合、この物体表面から漏れていく総熱量は以下で記述される。

$$\int (\vec{q} \cdot \vec{n}) dA$$

この表面積分は、ガウスの発散定理を用いると、以下の体積積分に置き換わる。

$$\int (\vec{q} \cdot \vec{n}) dA = \int (\nabla \cdot \vec{q}) dV = \int \mathrm{div}\, \vec{q} dV$$

熱伝導の基礎



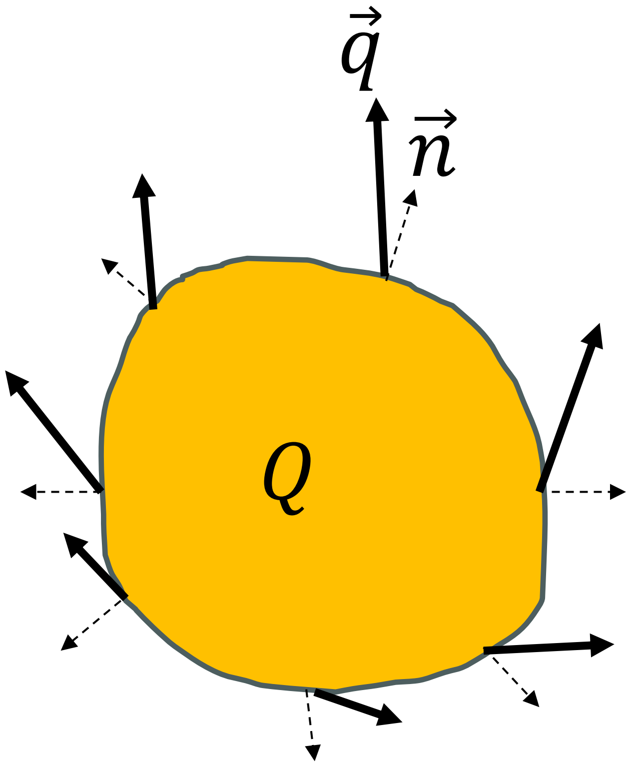
熱流束$\vec{q}$は、フーリエの法則により、温度分布$T(\vec{r})$と以下のように関連付けられる。

$$\vec{q}(\vec{r}) = -\lambda \nabla T(\vec{r})$$

ここで、λは物体の熱伝導率を示す。

以降の議論では、熱伝導率λは物体内で一定値をとるものとする。

熱伝導の基礎



熱流束$\vec{q}$は、フーリエの法則により、温度分布$T(\vec{r})$と以下のように関連付けられる。

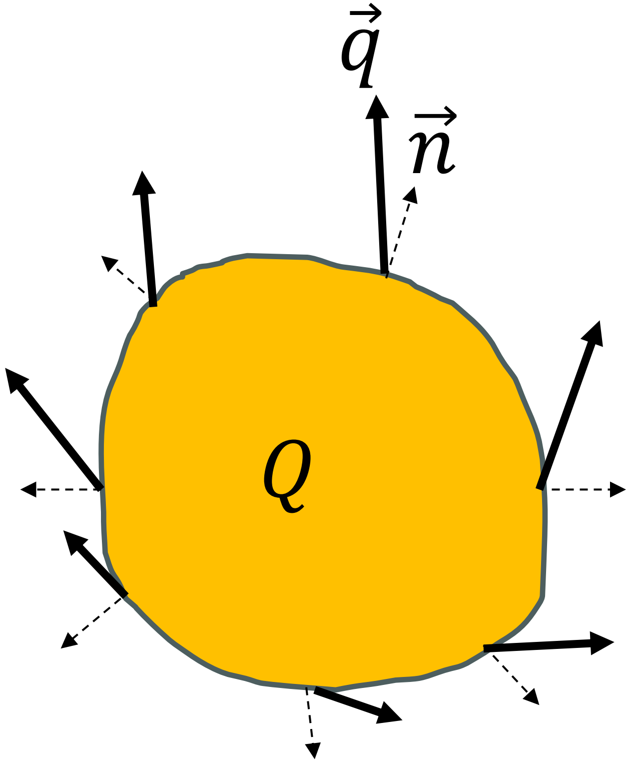
$$\vec{q}(\vec{r}) = -\lambda \nabla T(\vec{r})$$

以上より、表面から漏れていく熱の総量は以下で書き直せる。

$$\int (\vec{q} \cdot \vec{n}) dA = \int (\nabla \cdot \vec{q}) dV$$

$$= \int -\lambda \nabla^2 T dV$$

熱伝導の基礎



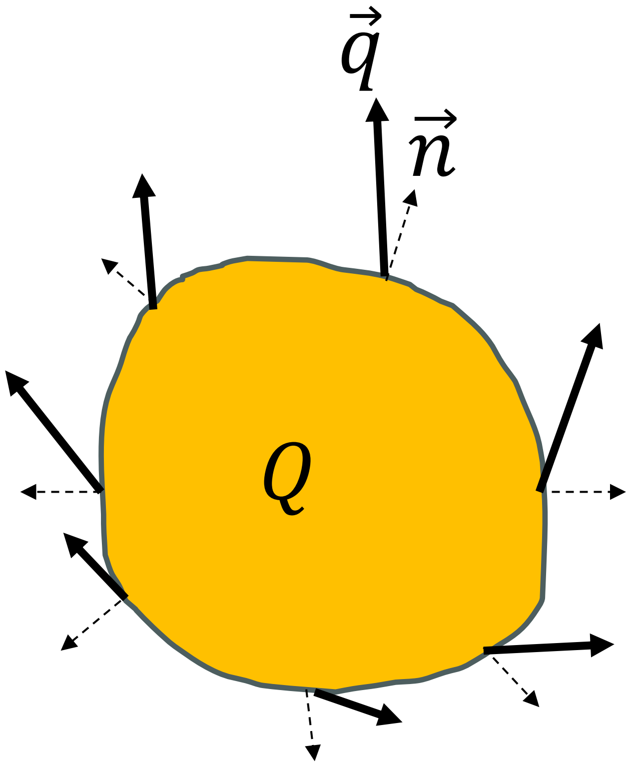
表面からの熱の漏れの総量 $\int -\lambda\nabla^2 T dV$ が発熱量 $\int Q dV$ と釣り合っているとき、以下が成り立つ。

$$\int -\lambda\nabla^2 T dV = \int Q dV$$

この式は以下のようにも書ける。

$$\int (-\lambda\nabla^2 T - Q) dV = 0$$

熱伝導の基礎



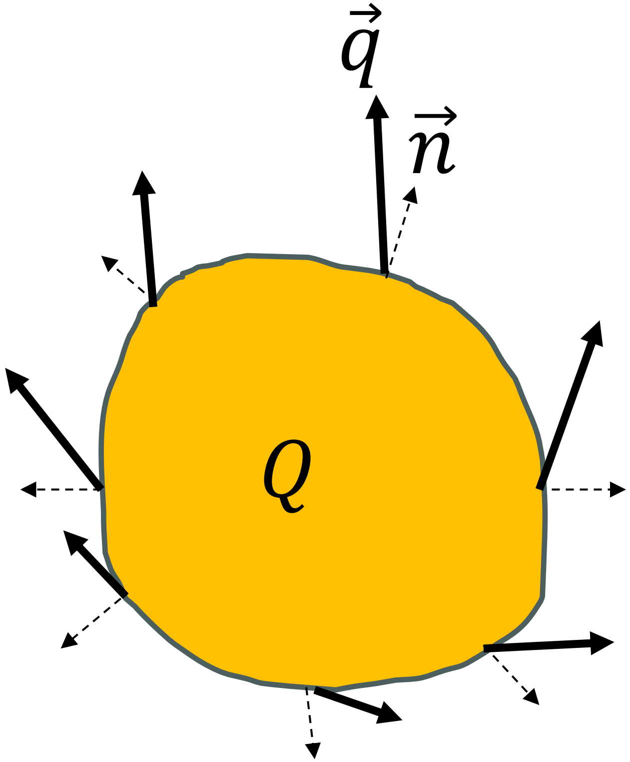
$$\int (-\lambda \nabla^2 T - Q) dV = 0$$

体系を構成する全ての微小領域でこの熱バランスが成り立っているとするならば、以下の式が物体内の全ての位置で成り立つと言える。

$$-\lambda \nabla^2 T = Q$$

これが定常の熱伝導方程式である。

熱伝導の基礎

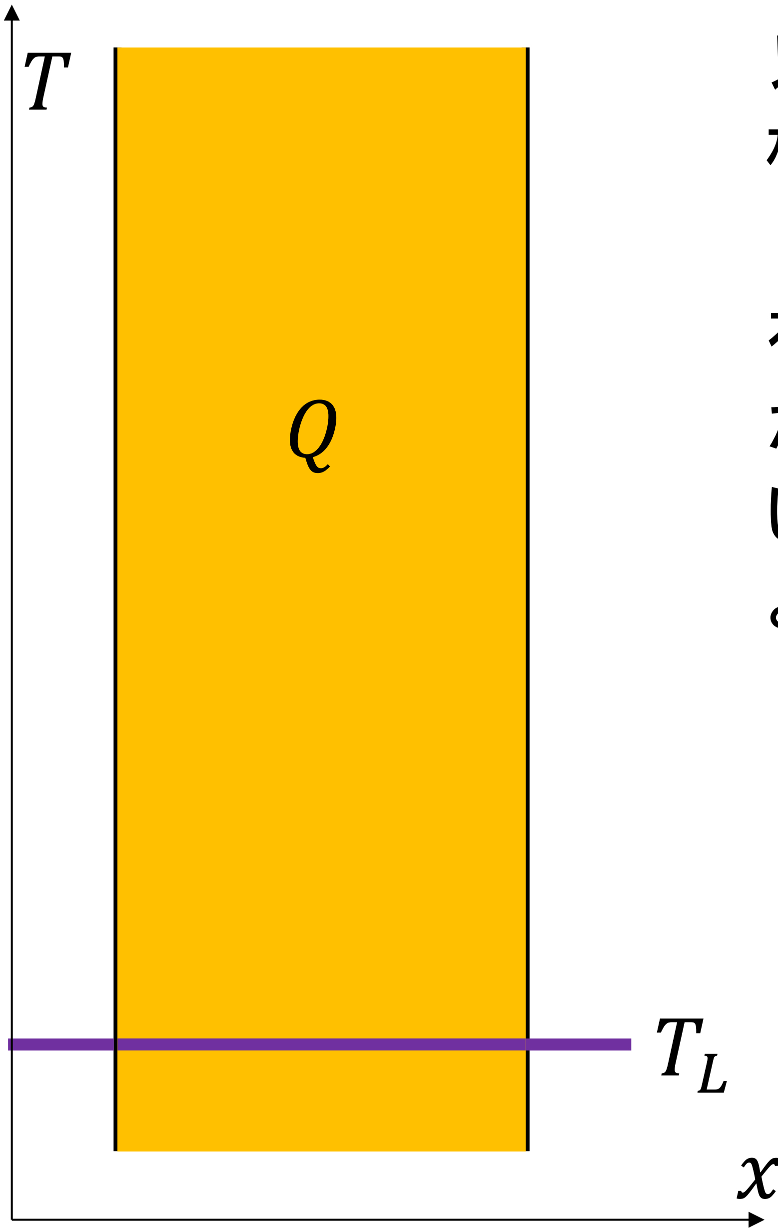


表面からの熱の漏れの総量 $\int -\lambda\nabla^2 T dV$ と発熱量 $\int Q dV$ が釣り合っていないときには、その差分だけ、その位置での媒質の温度が変化する。

$\int -\lambda\nabla^2 T dV < \int Q dV$ のとき:
→ 温度は増加

$\int -\lambda\nabla^2 T dV > \int Q dV$ のとき:
→ 温度は減少

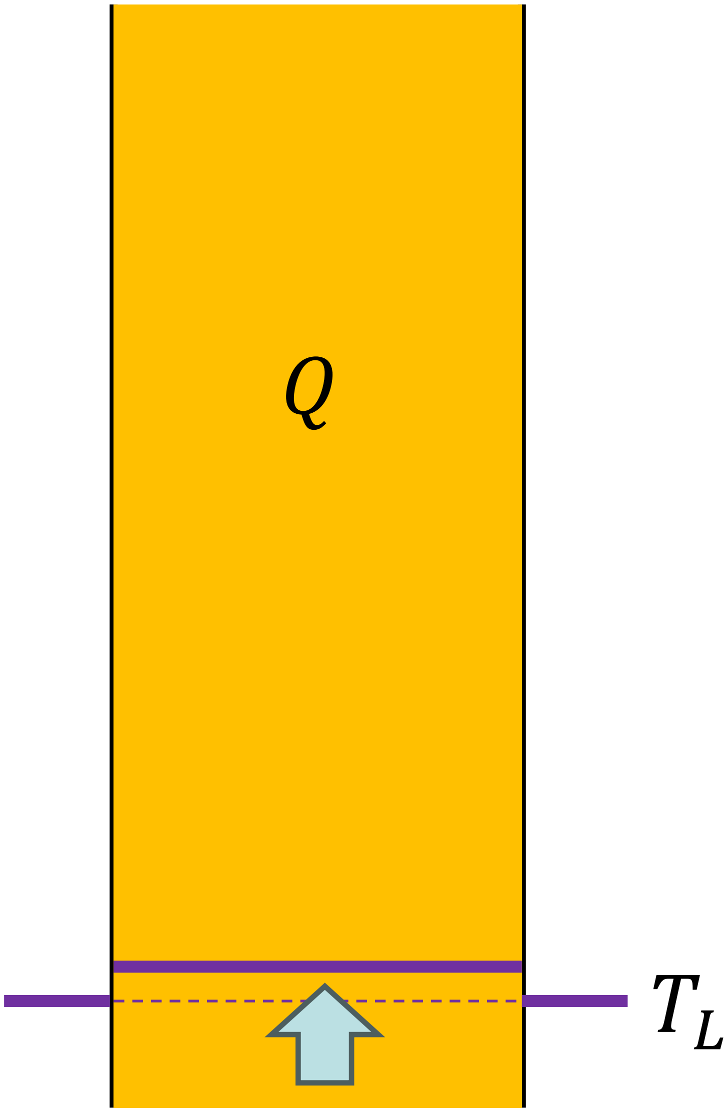
熱伝導の基礎



以降では一次元で考える。
横軸が位置、縦軸が温度を示す。

初期状態では、発熱物質の温度が外側流体のバルク温度T_Lと等しいものとして、以降の進展を考えよう。

熱伝導の基礎

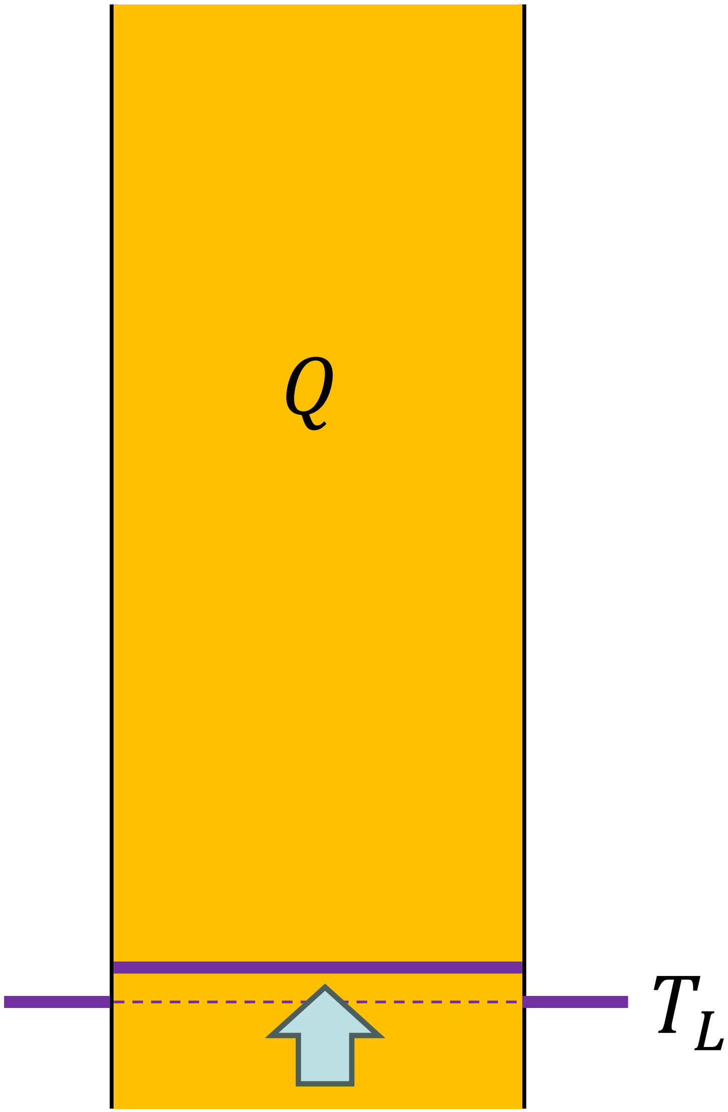


以降では一次元で考える。

初期状態では、発熱物質の温度が外側流体のバルク温度T_Lと等しいものとして、以降の進展を考えよう。

このとき、物体表面と外側流体との間に温度差は無く、物体内の温度勾配も無いので、熱は移動せず、物体の温度上昇のみに使われる。

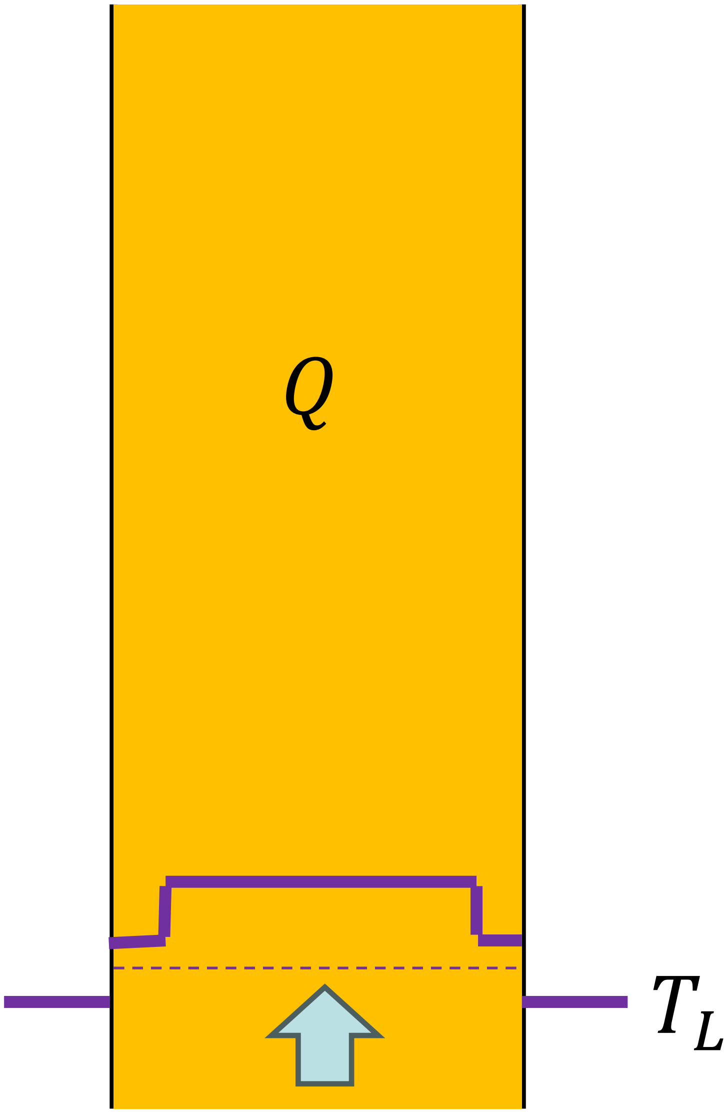
熱伝導の基礎



すると、物体表面と外側流体との間に温度差が生じるため、対流熱伝達による熱の移動が発生し、表面付近での物質の温度上昇は抑えられる。

一方、物体内では温度勾配が無いので、熱は移動せず、物体の温度上昇のみに使われる。

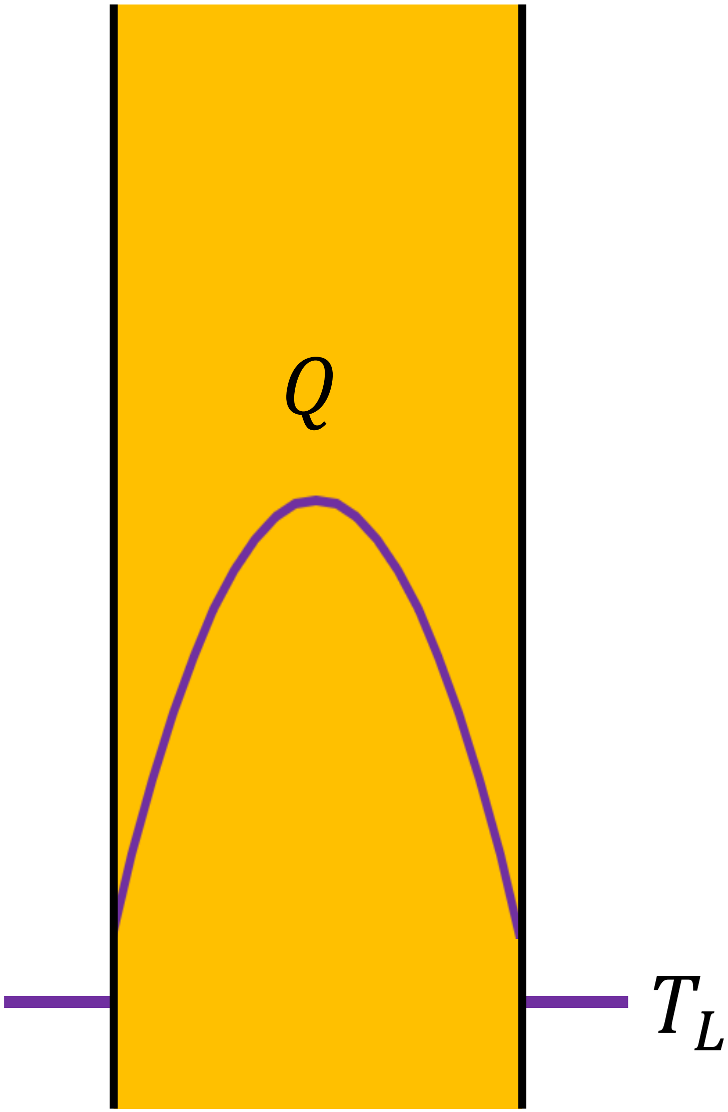
熱伝導の基礎



物体の表面付近では、温度上昇により対流熱伝達がさらに促進され、温度上昇はさらに抑えられる。

物体内でも温度勾配が生じはじめ、特に外側では熱伝導による正味の熱の漏れがあるため、その位置での物体の温度上昇が抑えられる。

熱伝導の基礎

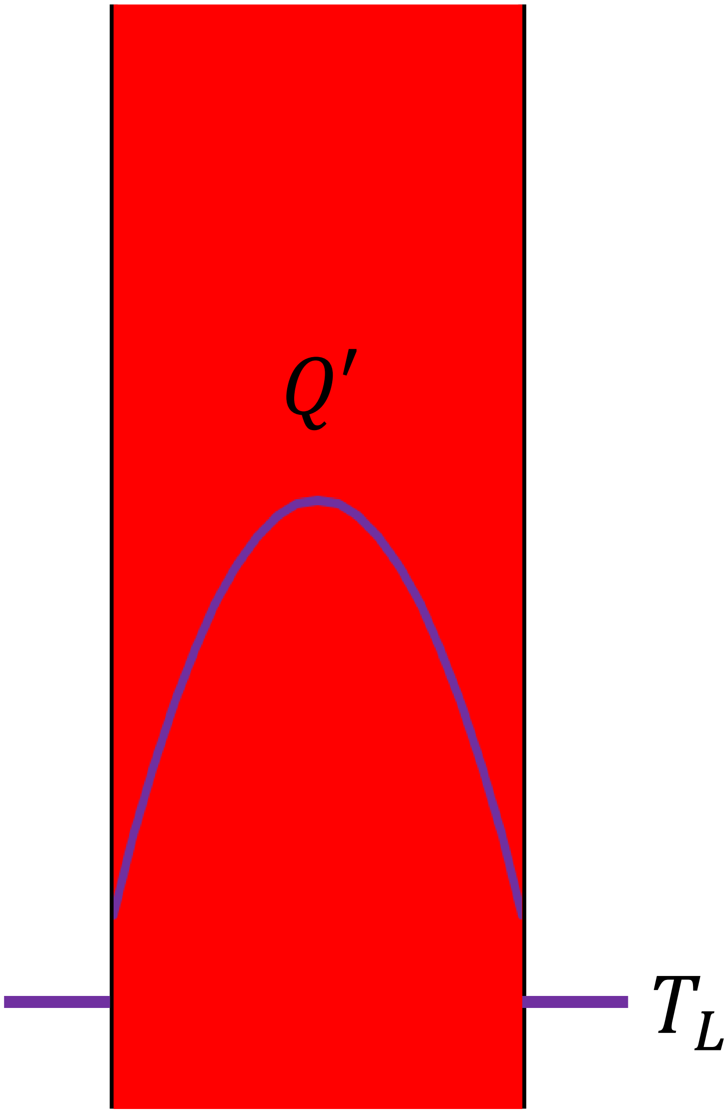


最終的にはある一定の温度分布をとる。この分布のもとでは、物体内の全ての位置において、発熱量と熱の漏れが釣り合っている状態となっており、熱は温度上昇には使われず、移動するのみとなる。

また、物質内の発熱量と、表面からの対流熱伝達による熱の移動量も釣り合っている。

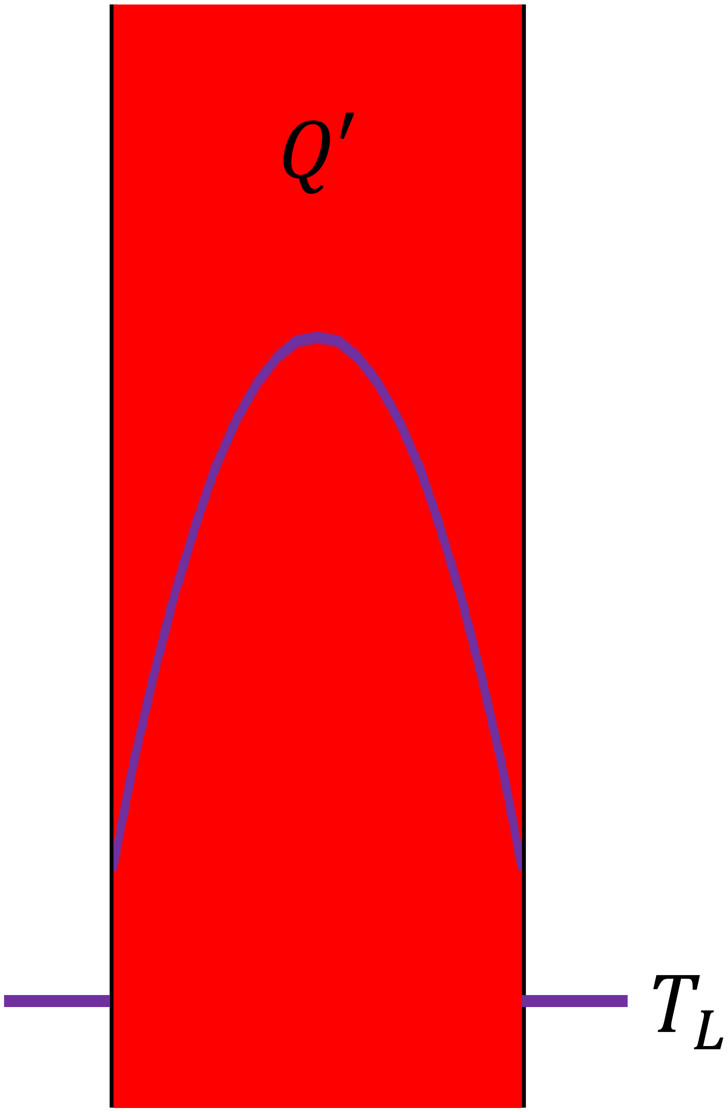
「熱的な定常状態」とはこのような状態を表している。

熱伝導の基礎



ここで、仮に発熱量をQからQ'（$Q' > Q$）に変化させた場合を考えよう。

熱伝導の基礎



ここで、仮に発熱量をQからQ'($Q' > Q$)に変化させた場合を考えよう。

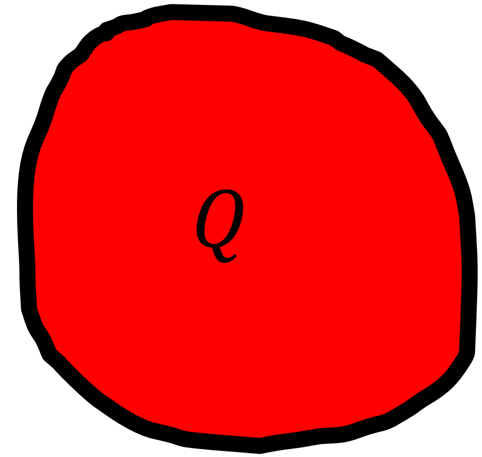
全ての位置で、熱バランスが崩れ、発熱量＞除熱量となるため、その差分が温度上昇に使われる。

そのため、温度分布は高い側にシフトする。

そして、発熱量＝除熱量となる新たな定常状態に落ち着く。

断熱下での発熱

比熱がC[J/kg/K]、密度がρ[kg/cm^3]、体積がV[cm^3] 、表面積がA[cm^2]の物体を考え、それが出力密度Q[W/cm^3]で発熱しているとする。



微小時間Δtにおける発熱量は$QV\Delta t$[J]である。

一方、Δtにおける温度上昇をΔTとしたとき、この温度上昇に必要な熱量は$C\rho V\Delta T$[J]である。

従って、$C\rho V\Delta T = QV\Delta t$であることが分かり、以下の微分方程式が得られる。

$$\frac{dT(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{QV}{C\rho V}$$

よって、$T(t) = \frac{Q}{C\rho} t + D$となり、$T(0) = T_0$であるとするならば、

$T(t) = \frac{Q}{C\rho} t + T_0$となり、温度が一次関数状に増加することが分かる。