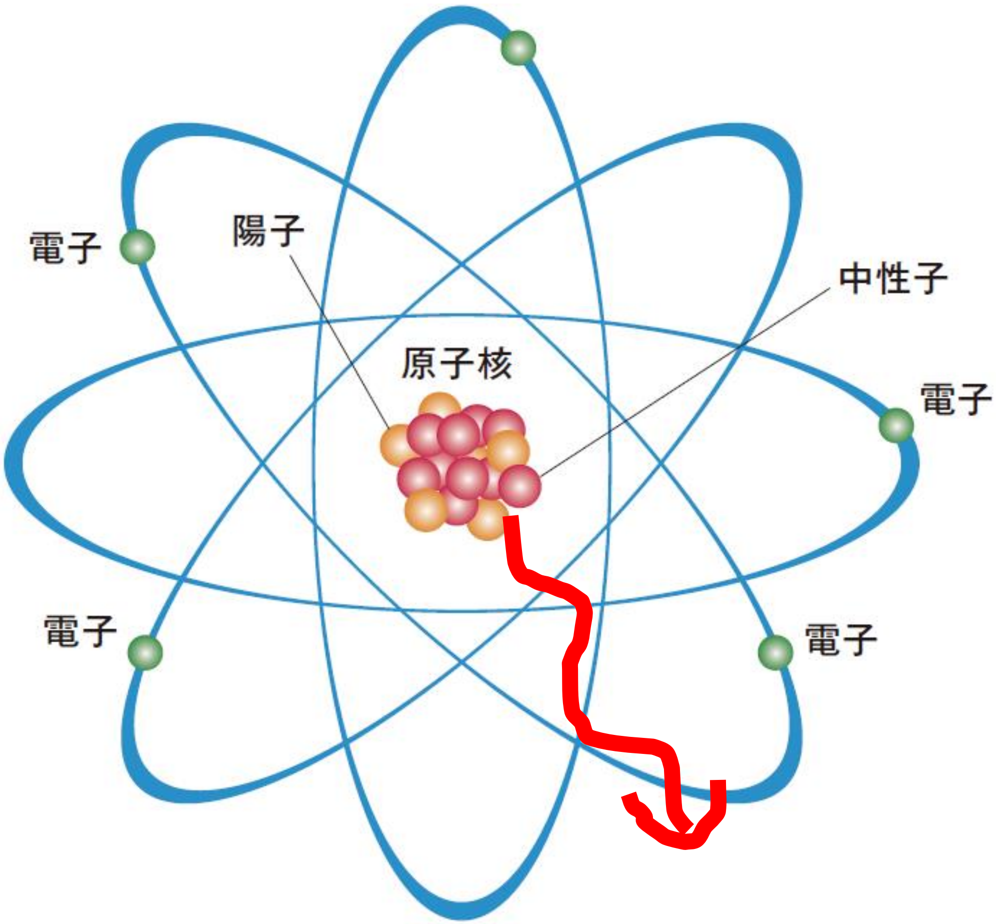
やさしい放射線計測と統計の話

やさしい放射線計測と統計の話

- やさしい放射線計測の話
- やさしい統計の話
- 放射線計測と統計の関係

やさしい放射線計測の話

放射線は目には見えない



【1】 出典：日本原子力文化財団「原子力・エネルギー図面集」

目に見えないからこそ、怖い。

放射線は目には見えない

怖いものと言えば幽霊

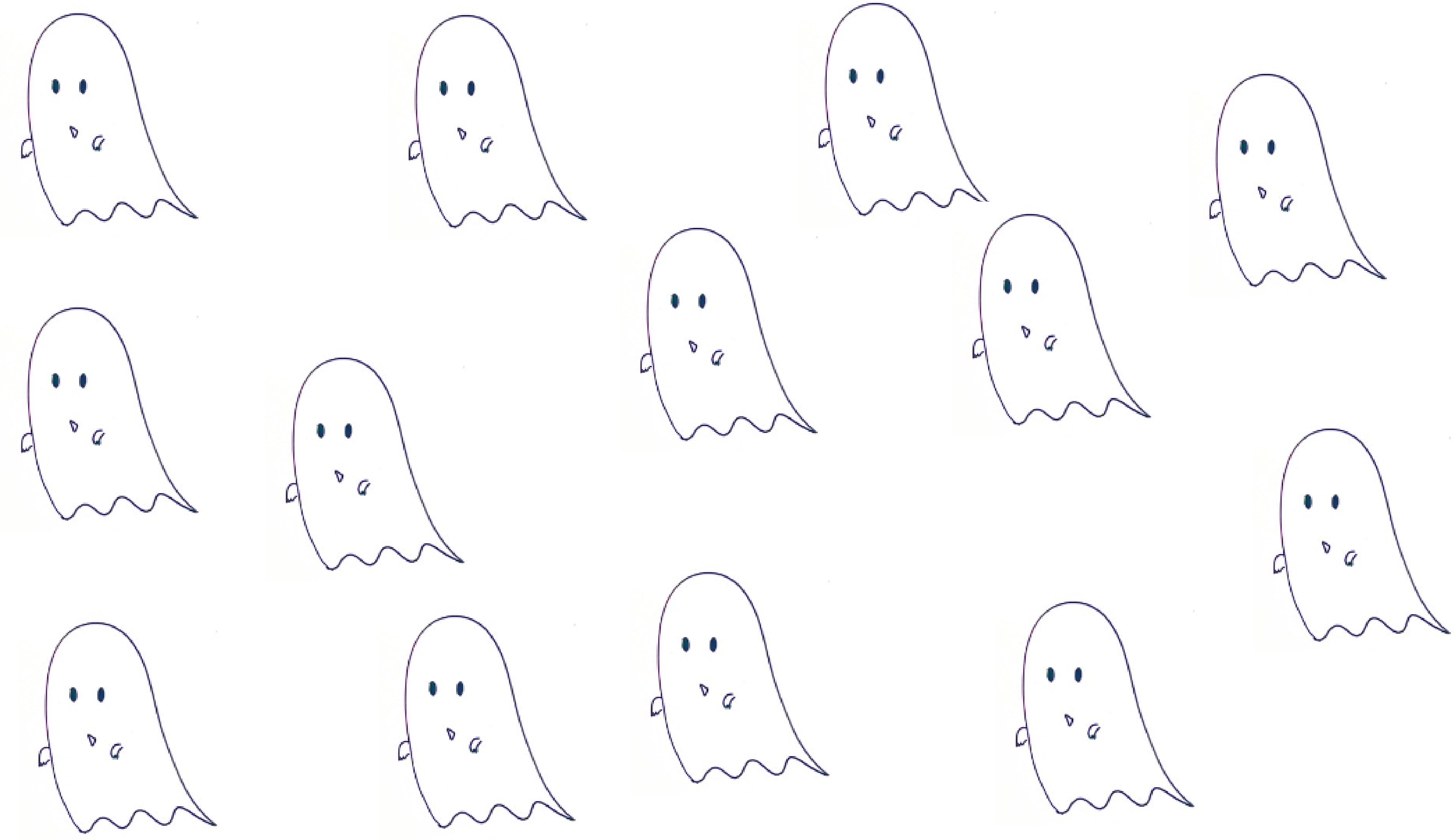
幽霊はどれくらいいるの？

幽霊が何体いるのか知りたい。

幽霊はどれくらいいるの？

でも見えない。

幽霊はどれくらいいるの？

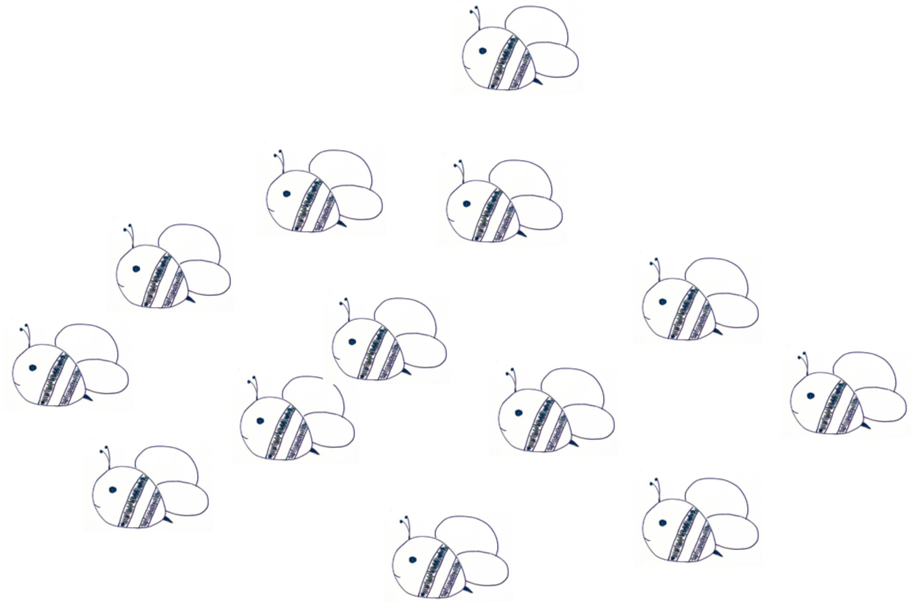


幽霊が何体いるのか知りたい。
どうしよう、、、。

幽霊はどれくらいいるの？

もし幽霊を好きな蜂がいるとしたら？

幽霊はどれくらいいるの？

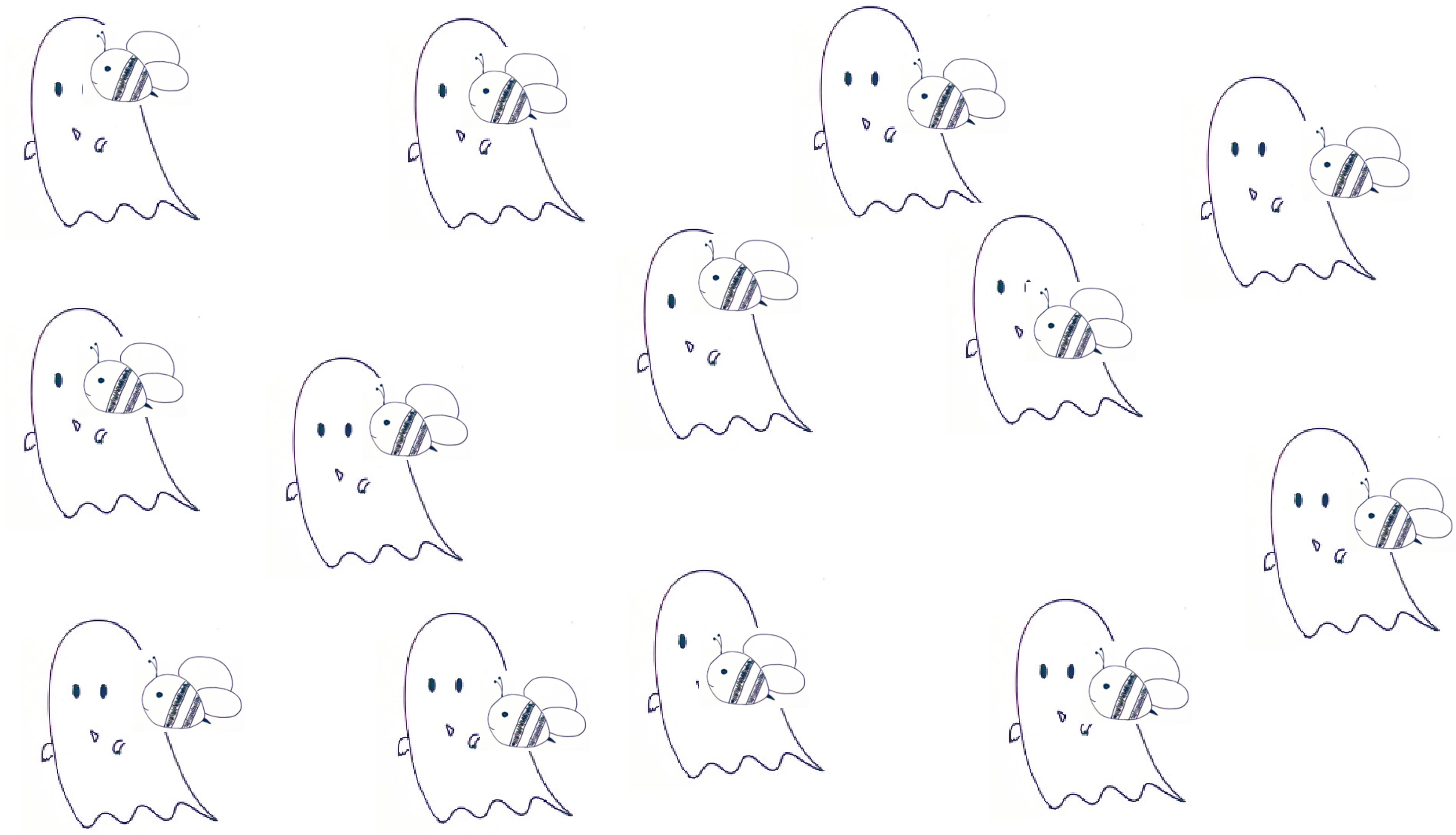


たくさんの蜂を放してやれば、、、

幽霊はどれくらいいるの？

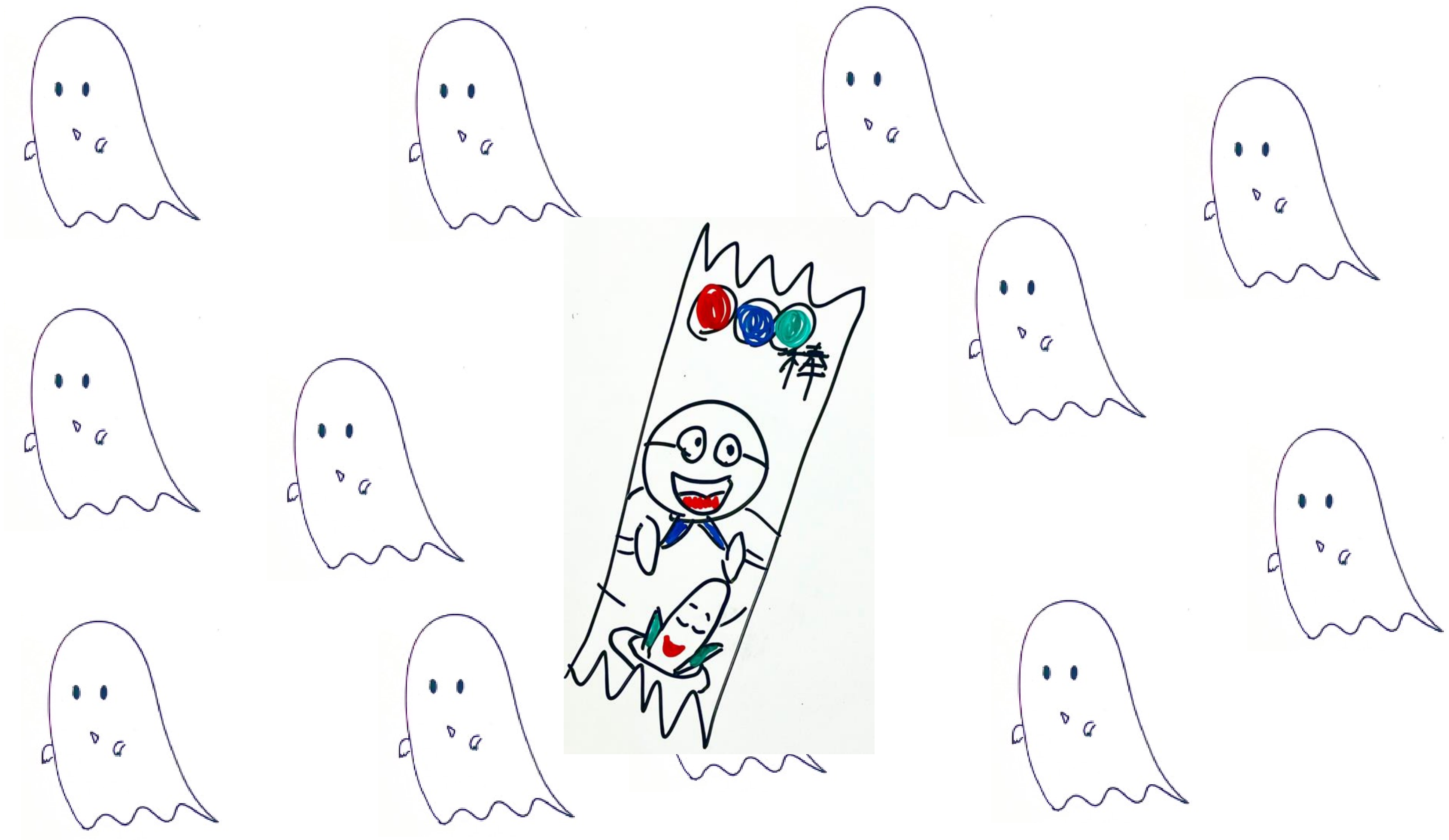
たくさんの蜂を放してやれば、
幽霊に寄っていくでしょう。

幽霊はどれくらいいるの？



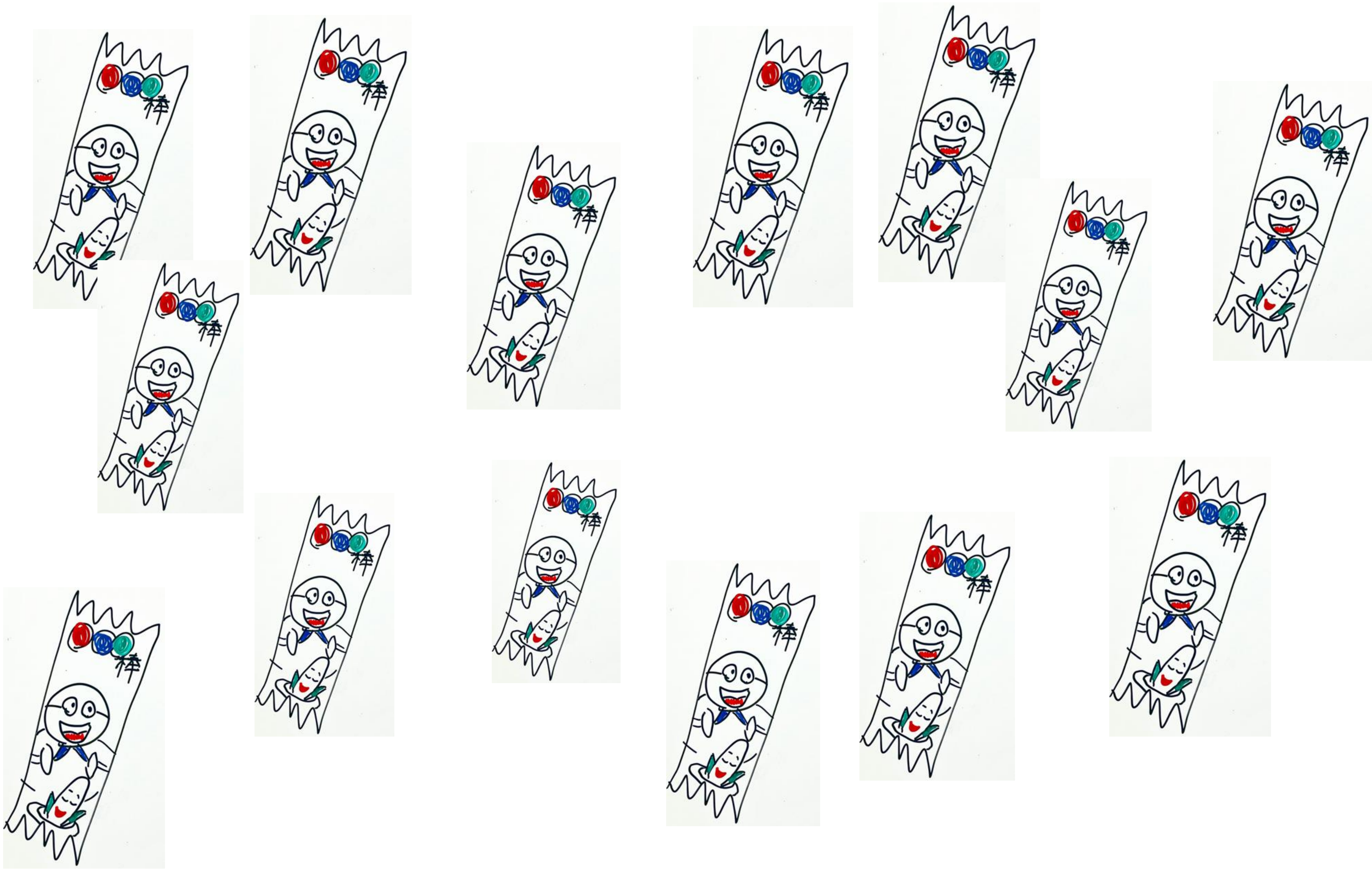
蜂の様子を観察することによって、幽霊に関する情報を間接的に得ることができるでしょう。

幽霊はどれくらいいるの？



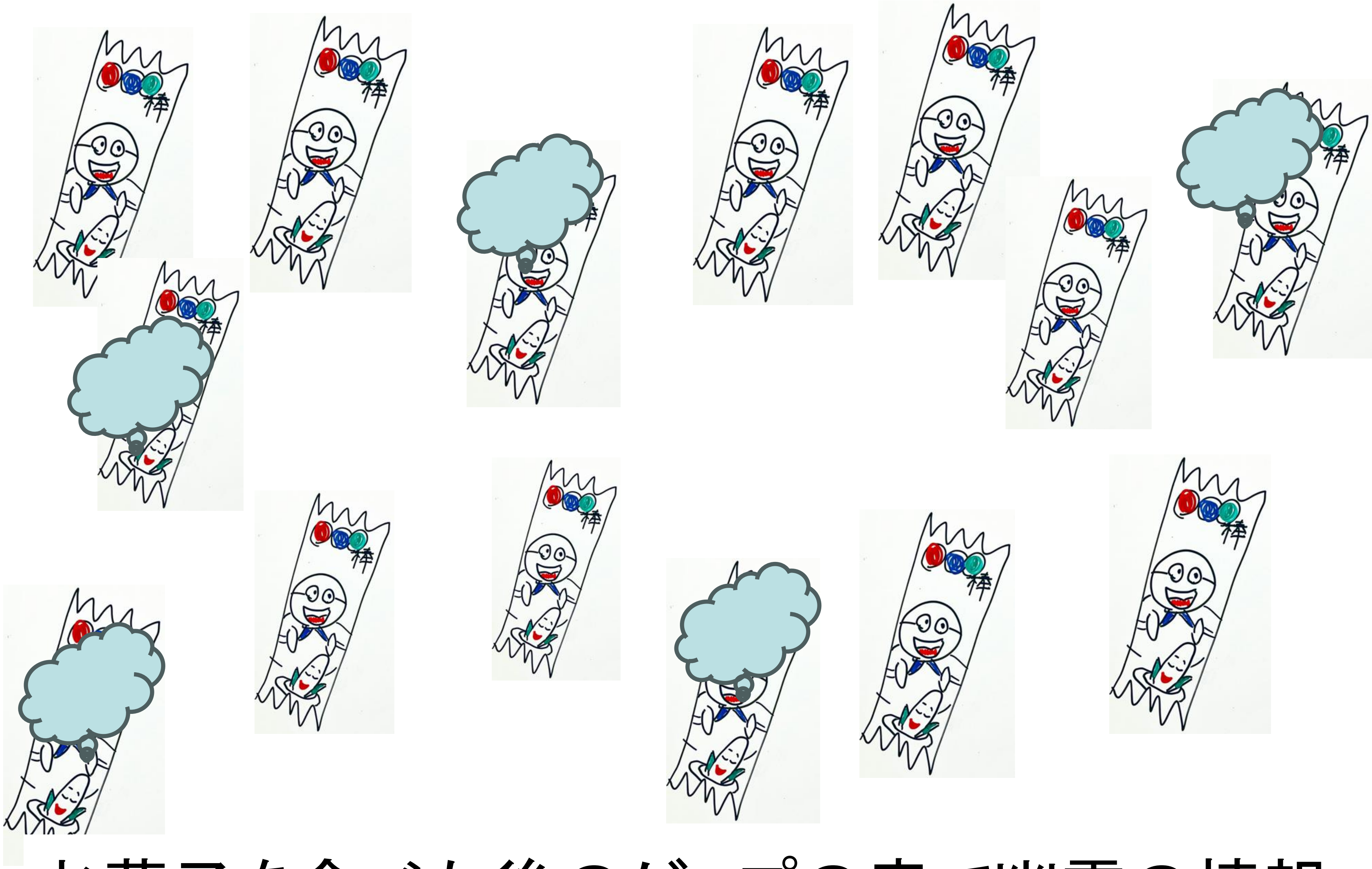
もし幽霊がお菓子を好きだったとしたら？

幽霊はどれくらいいるの？



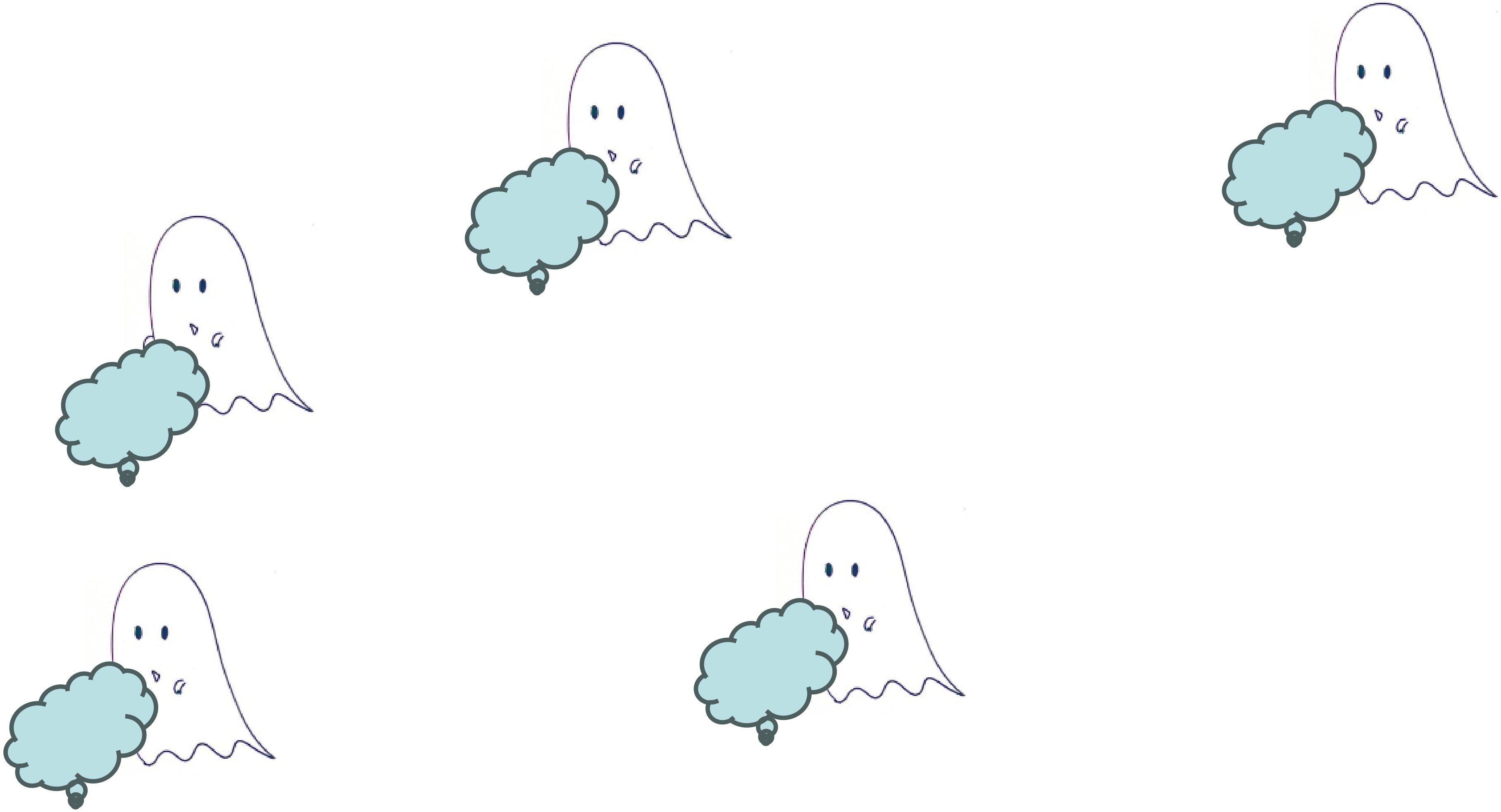
そこら中にお菓子をしかけておけば、、、

幽霊はどれくらいいるの？



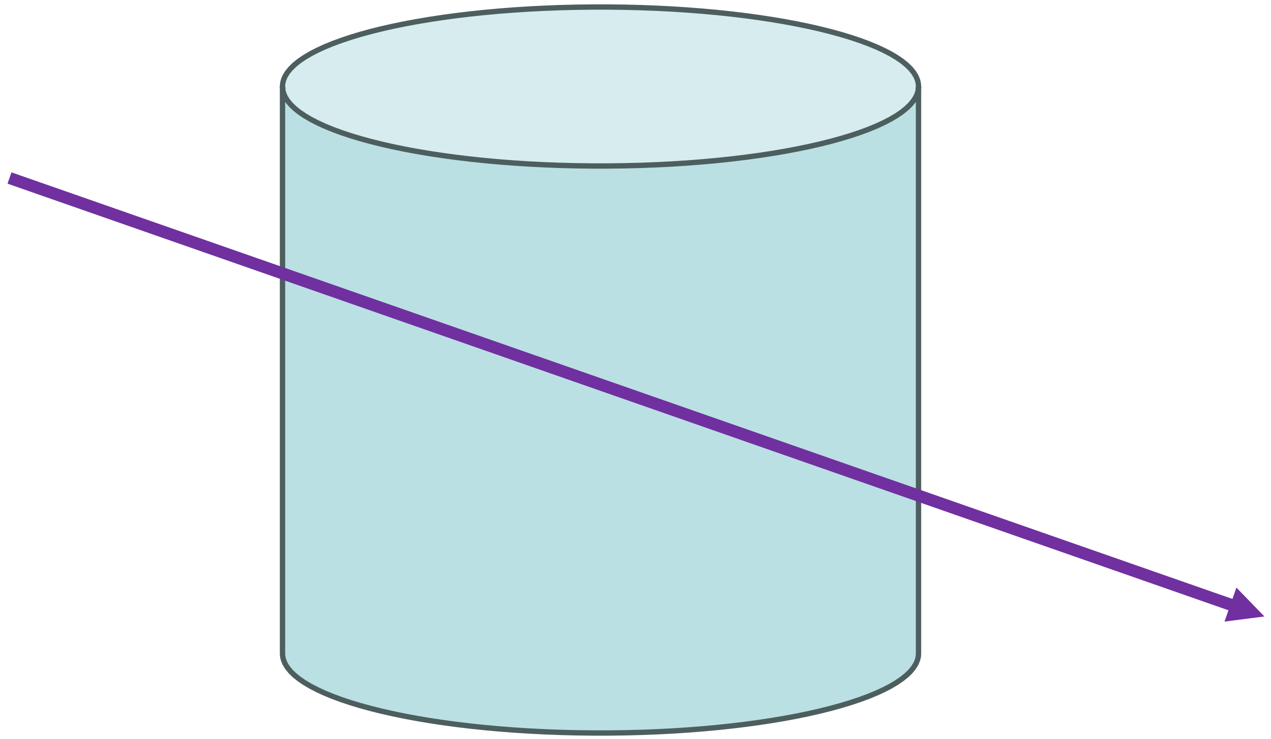
お菓子を食べた後のゲップの音で幽霊の情報を間接的に得ることができるでしょう。

幽霊はどれくらいいるの？



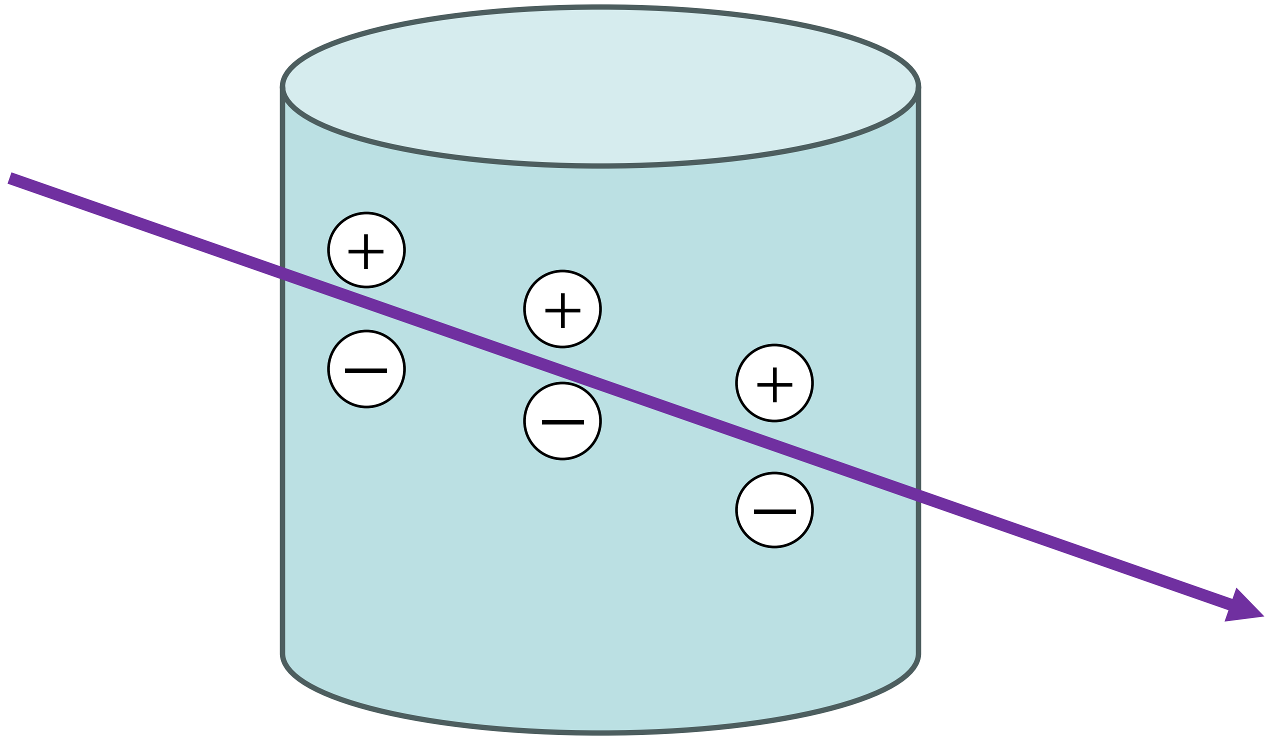
お菓子を食べた後のゲップの音で幽霊の情報を間接的に得ることができるでしょう。

電離放射線の計測



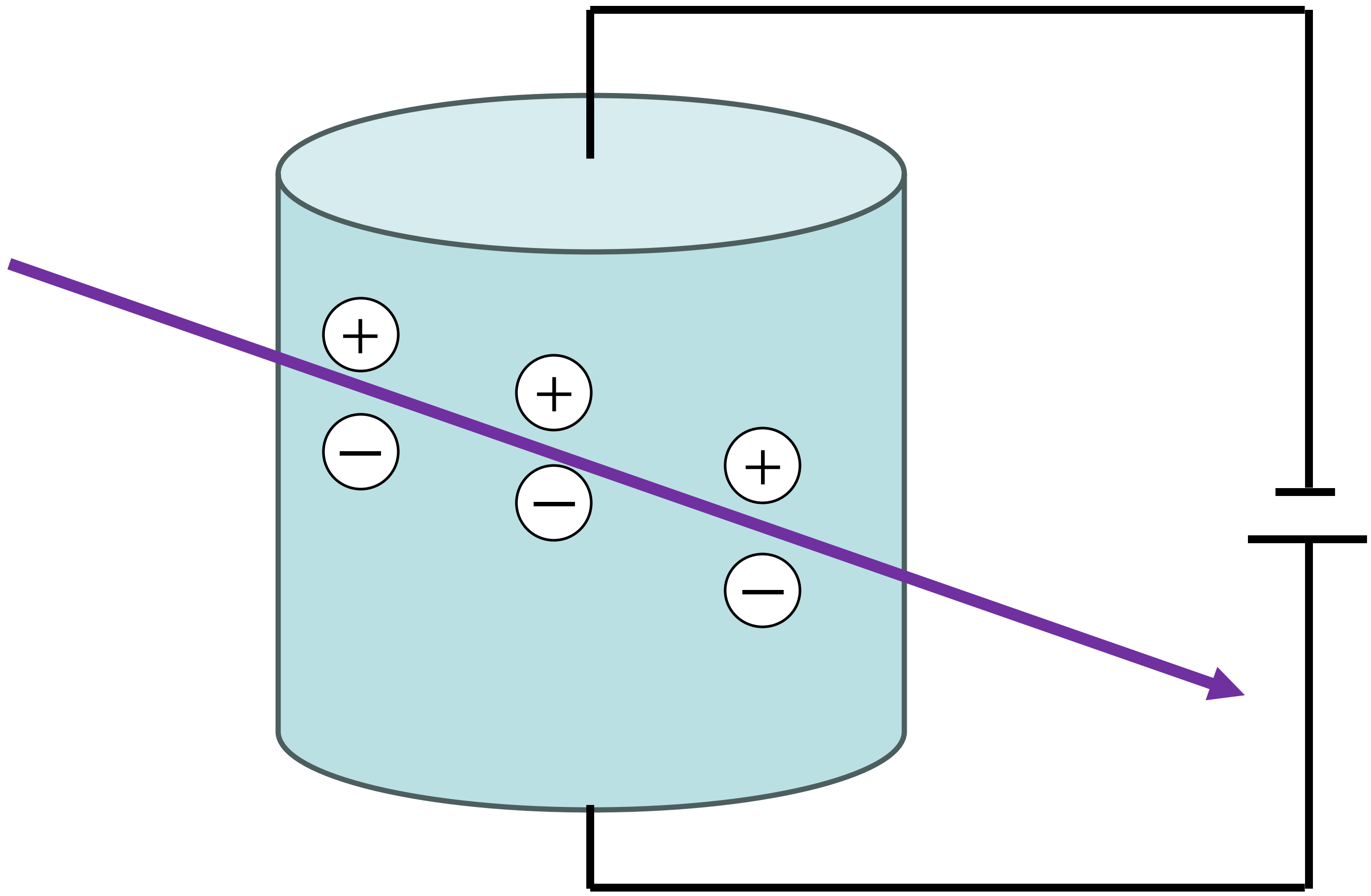
α線、β線は荷電粒子、γ線は電磁波なので、物質を通過していく際に、物質中の原子に電離作用を及ぼします。

電離放射線の計測



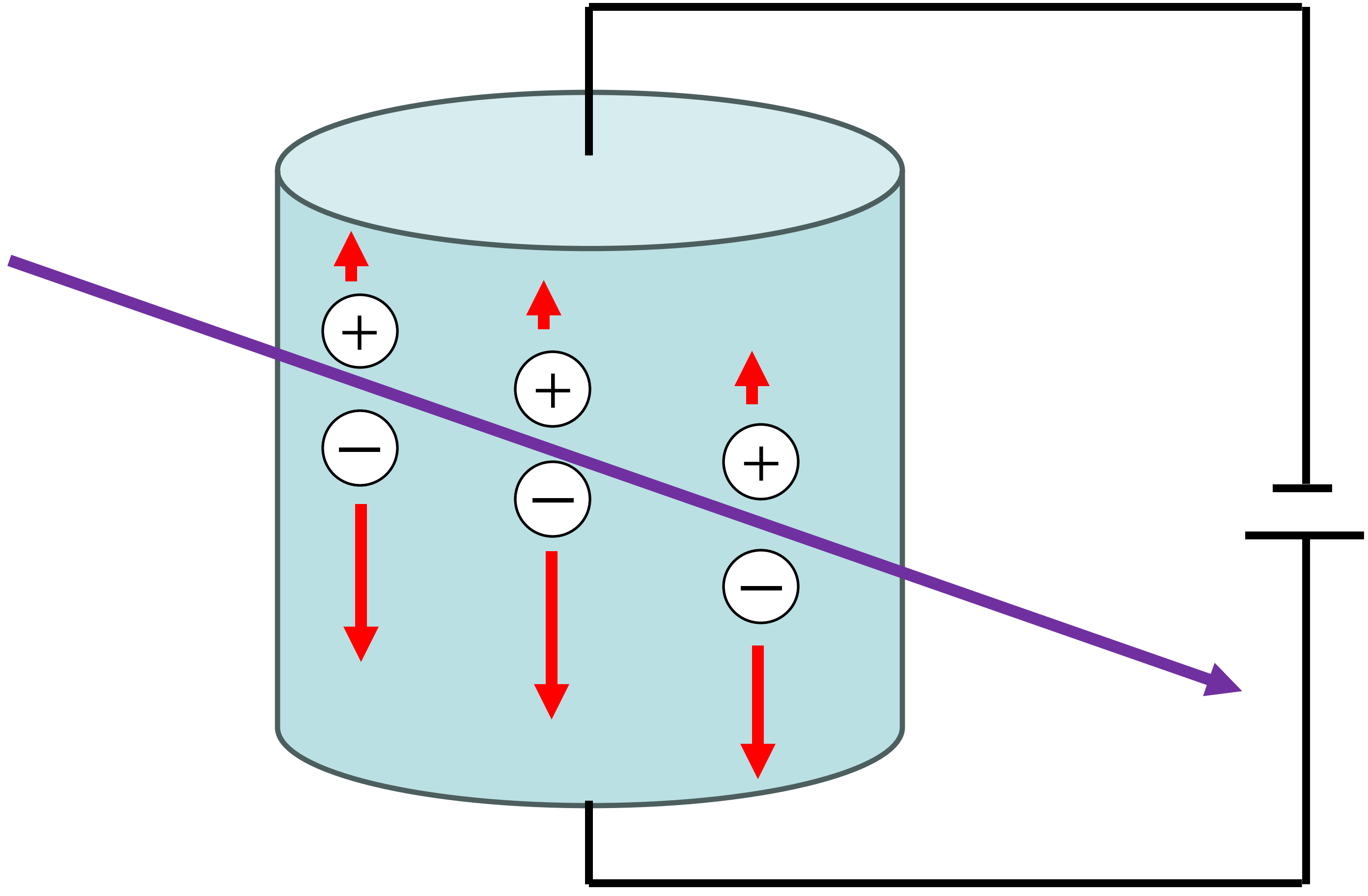
その結果、イオンと電子が複数生成します。

電離放射線の計測



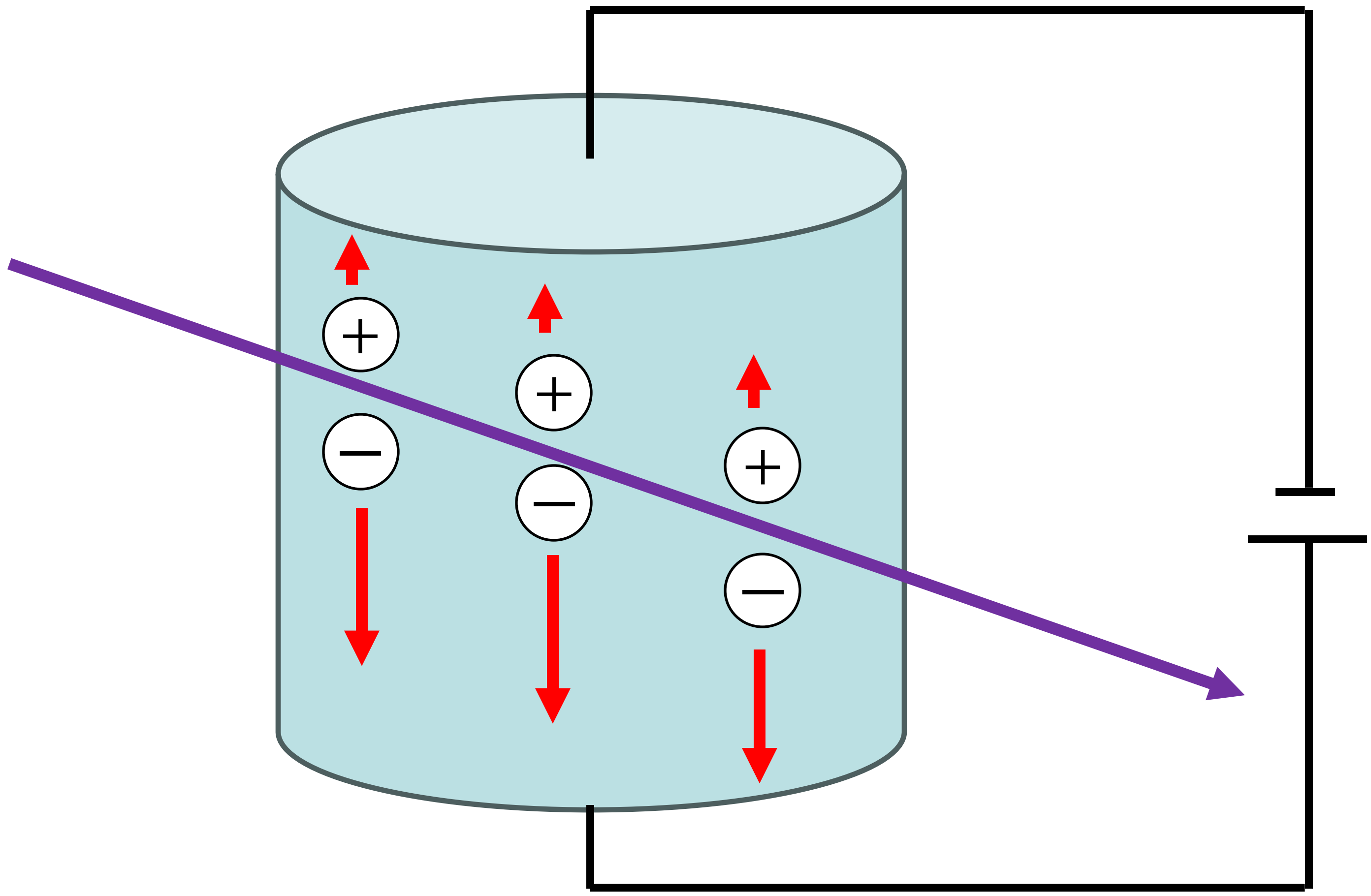
この空間に大きな電位差を生じさせておきます。

電離放射線の計測



軽い電子は電場により加速され、電離をさらに促進させます。これが繰り返されることで、電子の数が加速度的に増加する「電子雪崩」が起き、電圧パルスが生じます。生じたパルスの回数が「放射線を検知した回数」に対応します。

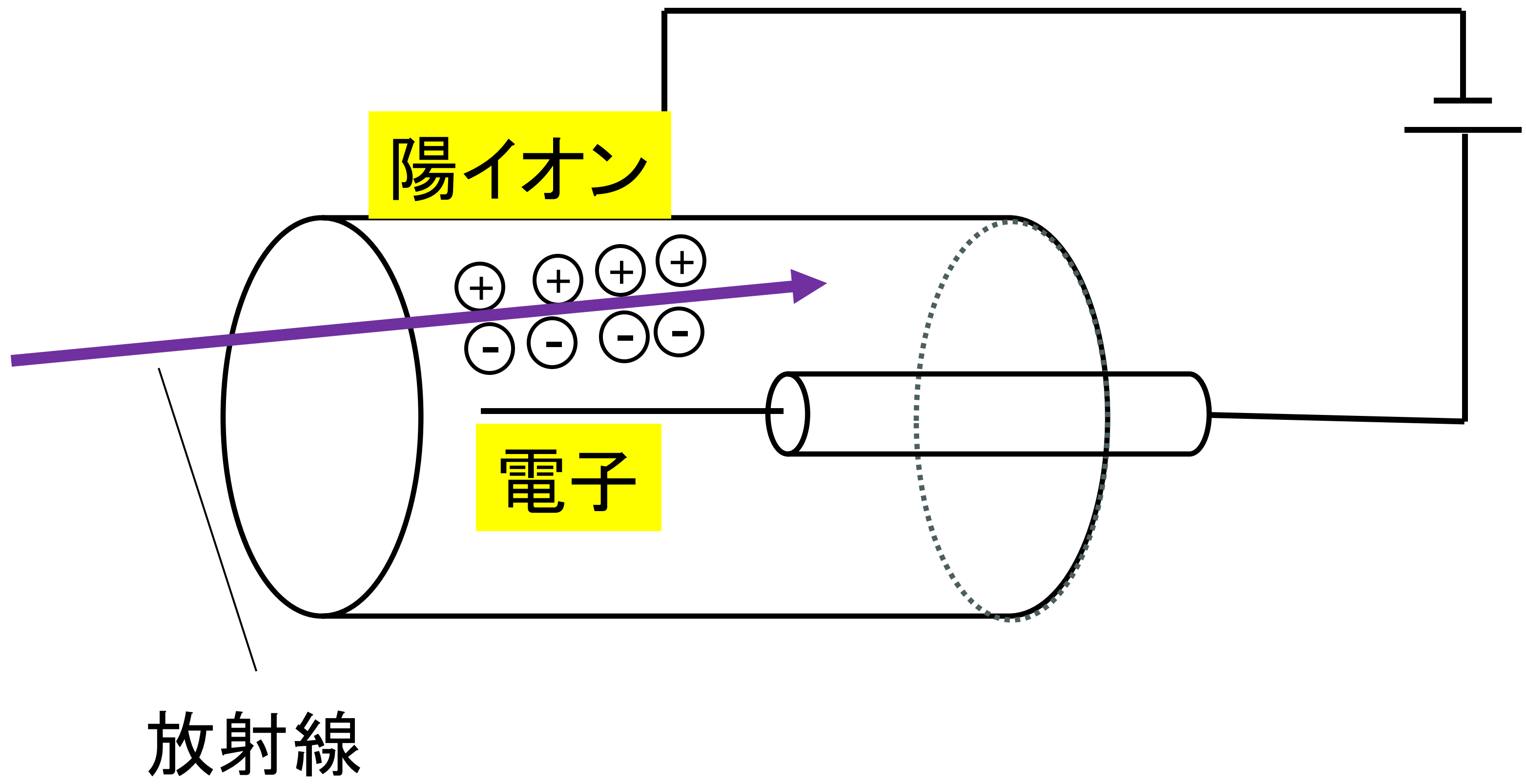
電離放射線の計測



かける電圧が小さいと電子雪崩が起きません。かける電圧が大きすぎてもよくありません。適切な電圧の範囲があるので、その範囲を把握することが重要です。

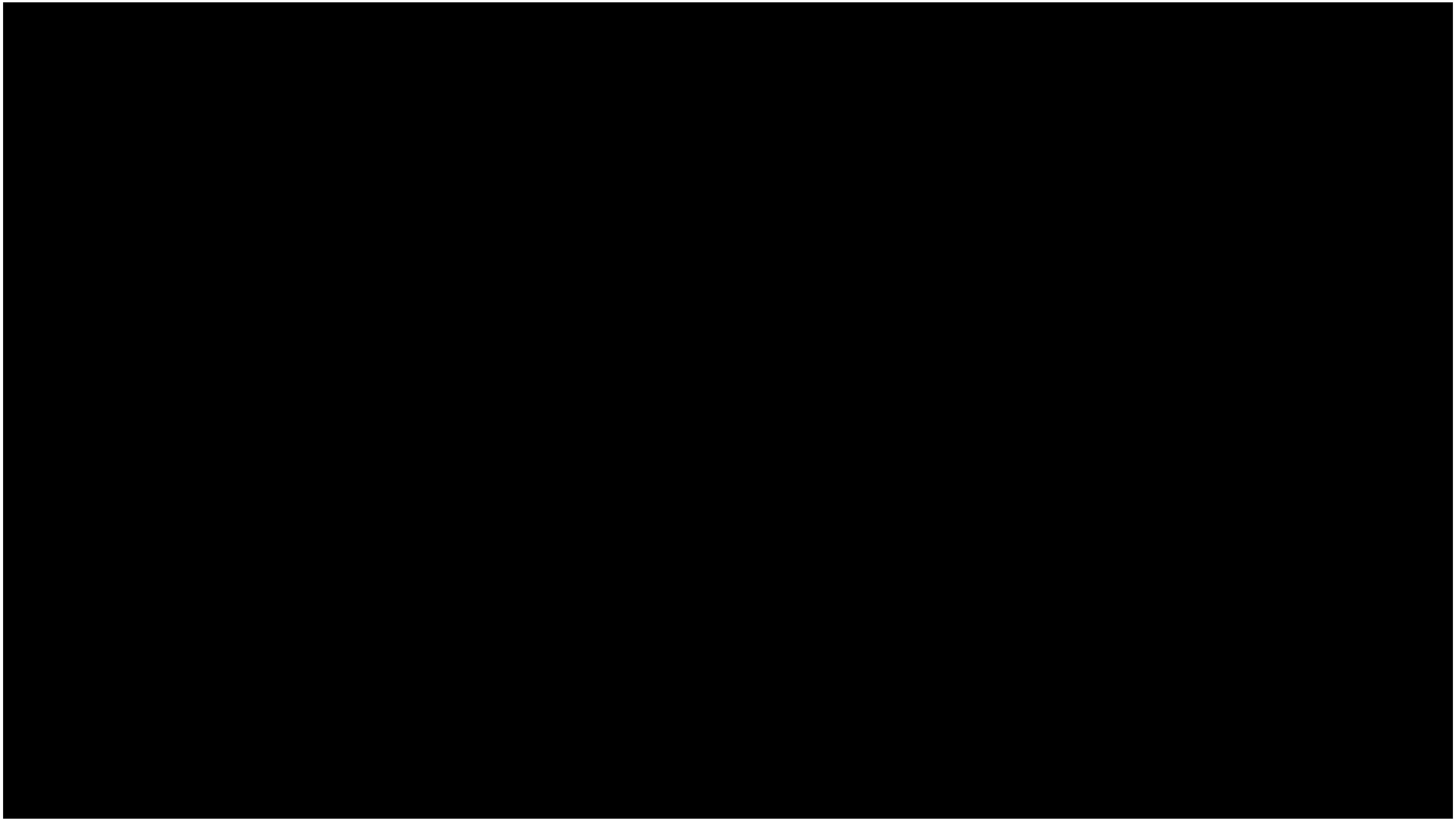
GM計数管による電離放射線の計測

GM計数管:
GeigerとMuellerが1928年に作った放射線検出器。



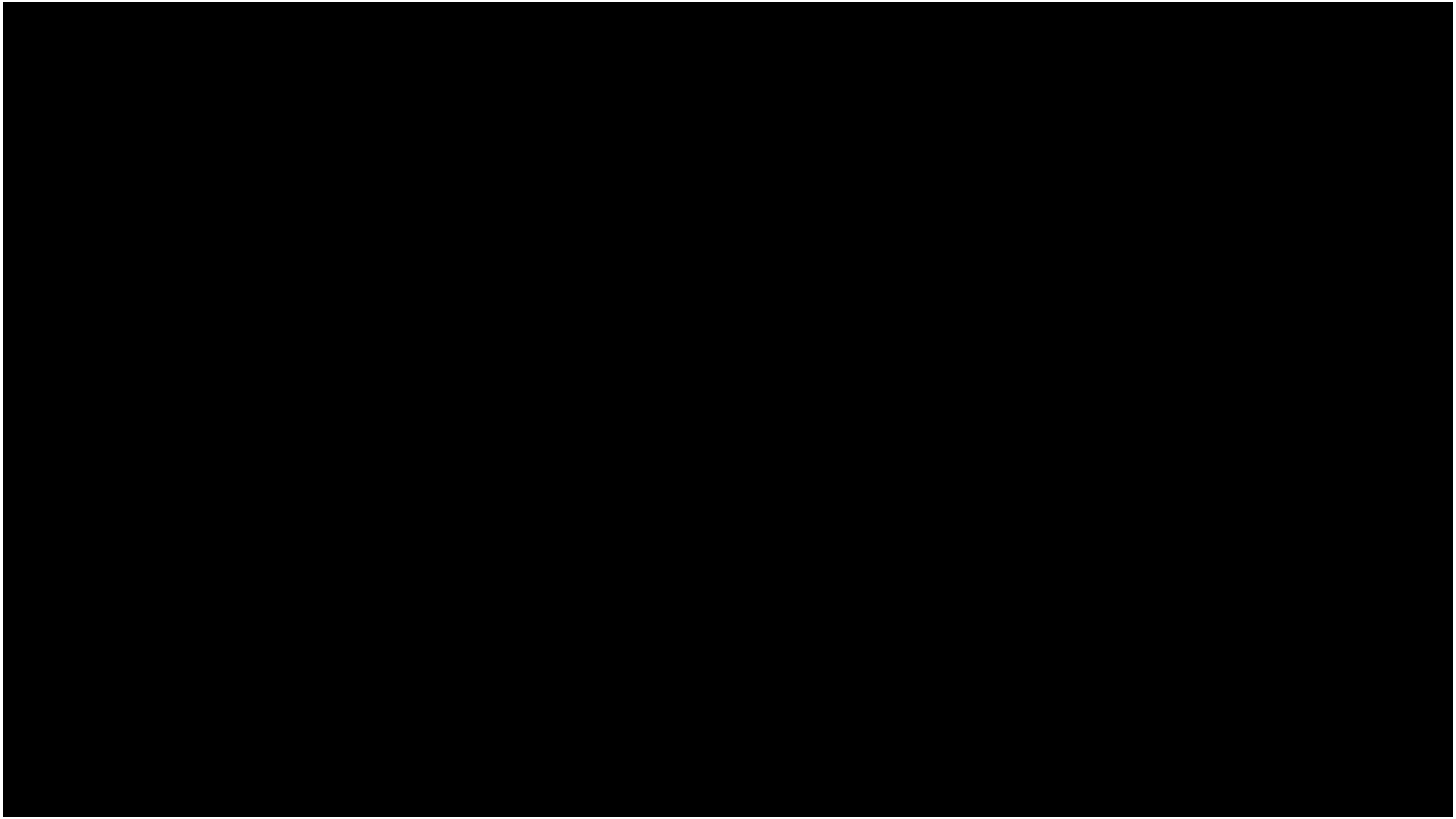
GM計数管による電離放射線の計測

霧箱による放射線の観察（α線）



α線は太く直線的な軌跡が特徴。

霧箱による放射線の観察（β線）



β線は霧箱内の分子にぶつかるたびに進路を曲げるので
ジグザグな飛跡となる。

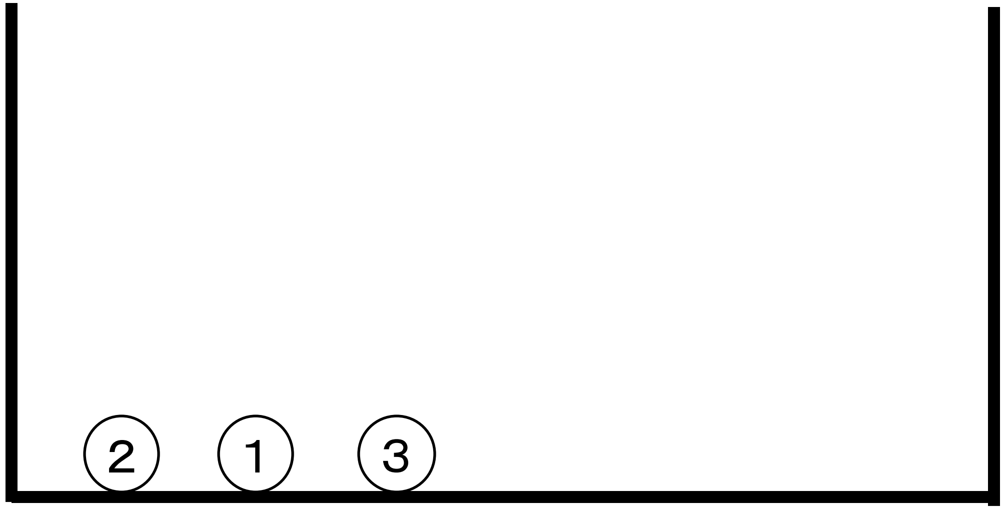
霧箱による放射線の観察（γ線）

霧箱による放射線の観察（γ線）

β線との違いは分かり辛いが、
さきほどよりも放射線の数が少ないことは分かる。

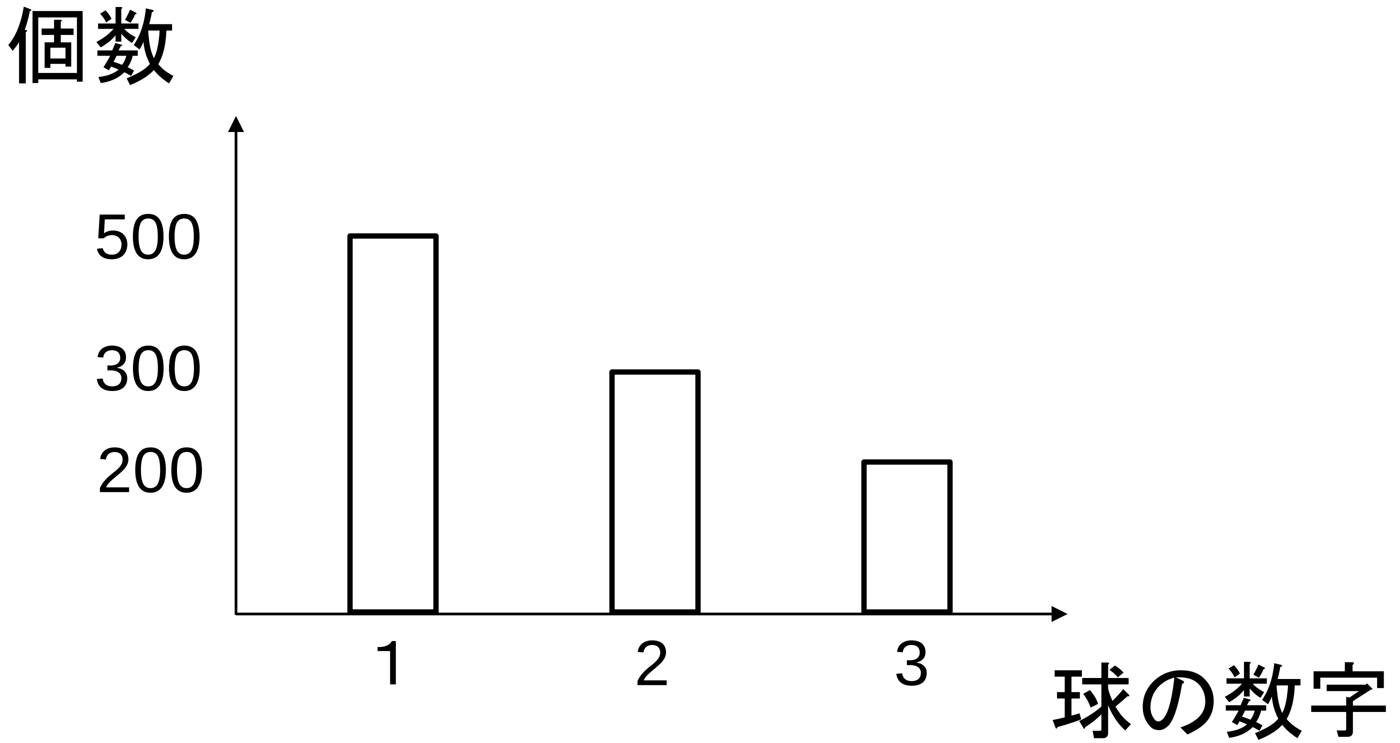
やさしい統計の話

母集団と標本



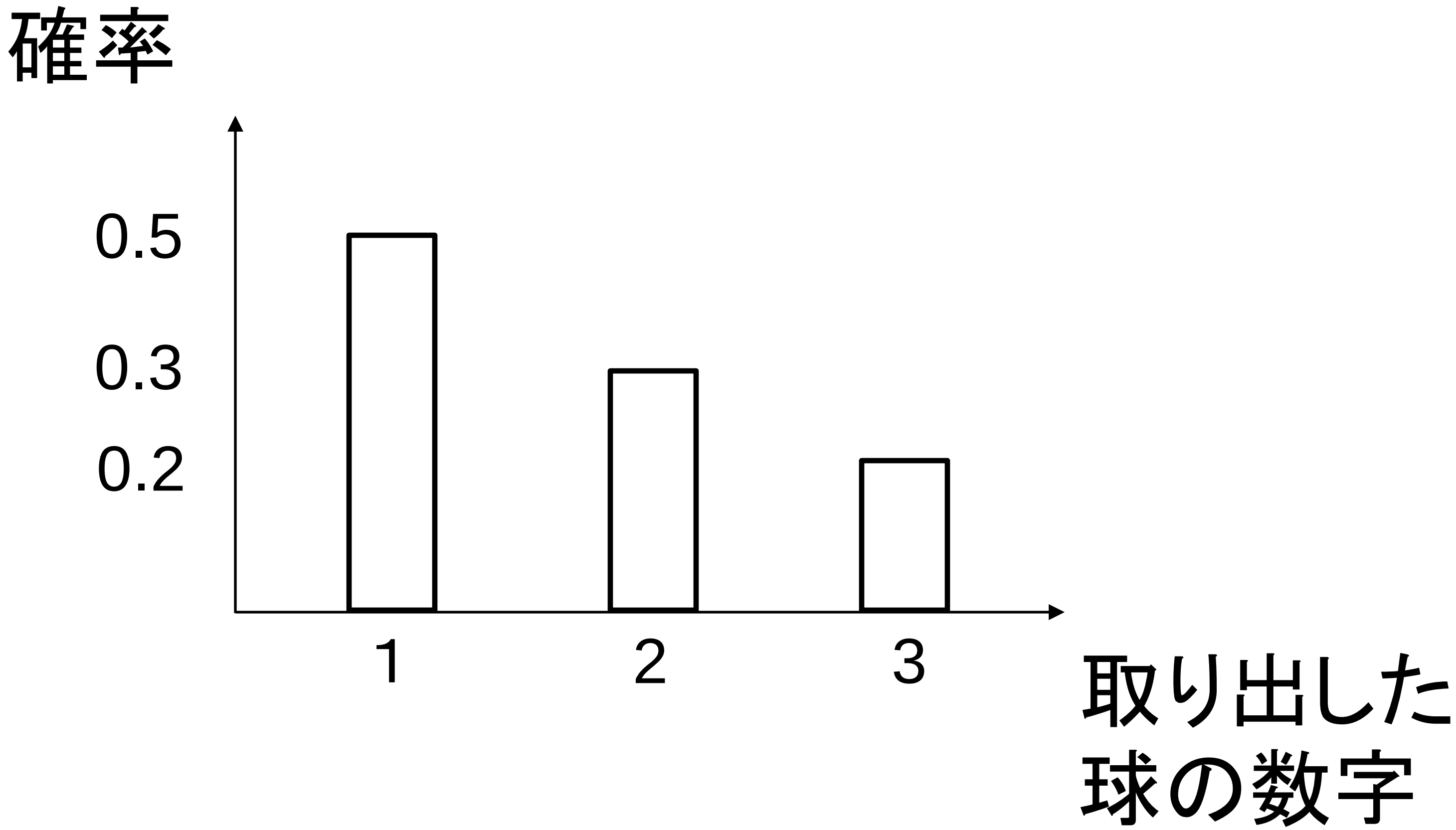
箱の中に1から3までの整数が書かれた球が1,000個入っていて、1が500個、2が300個、3が200個であったとする。

母集団と標本



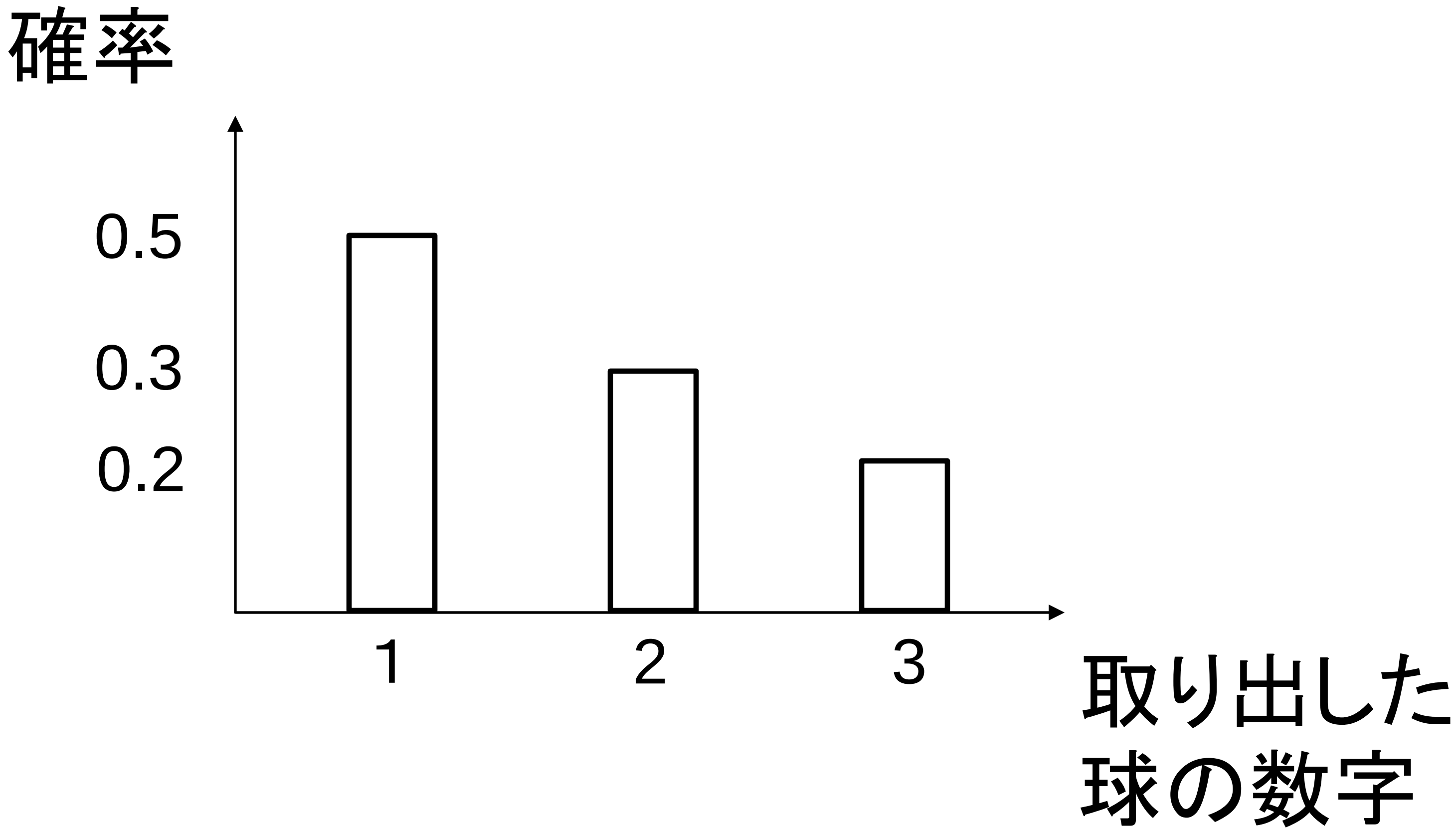
次に、この箱から球を1個取り出すことを考え、
その球に書かれている数字がとる「確率」を考える。

母集団と標本



「箱から取り出した球の数字」は、その度に変わり得る。このような数を確率変数と呼ぶ。

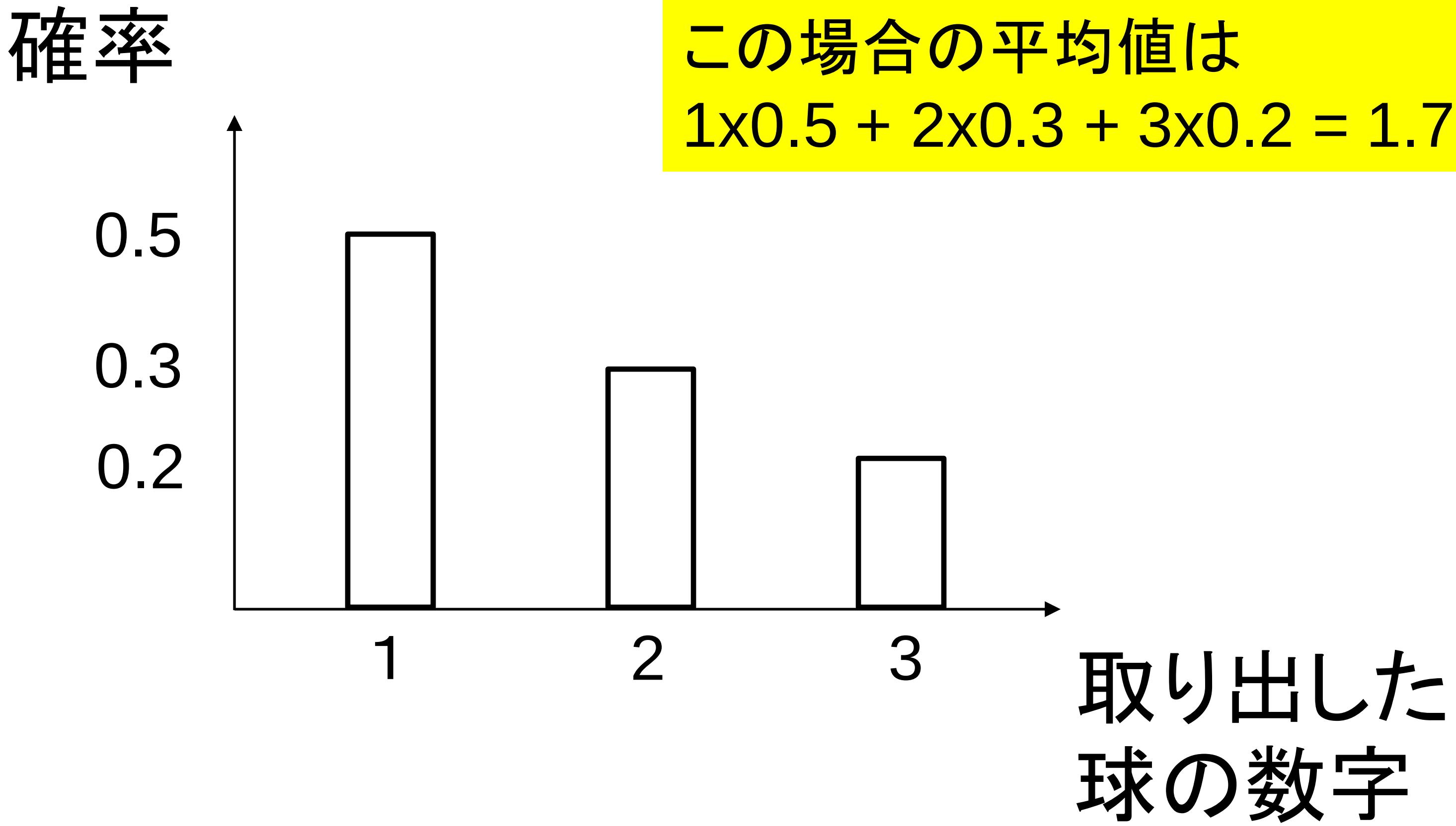
母集団と標本



確率変数には、とりうる値のそれぞれに対して確率が与えられる。その分布を確率分布と呼ぶ。
また、それを関数として表したものを確率密度関数と呼ぶ。

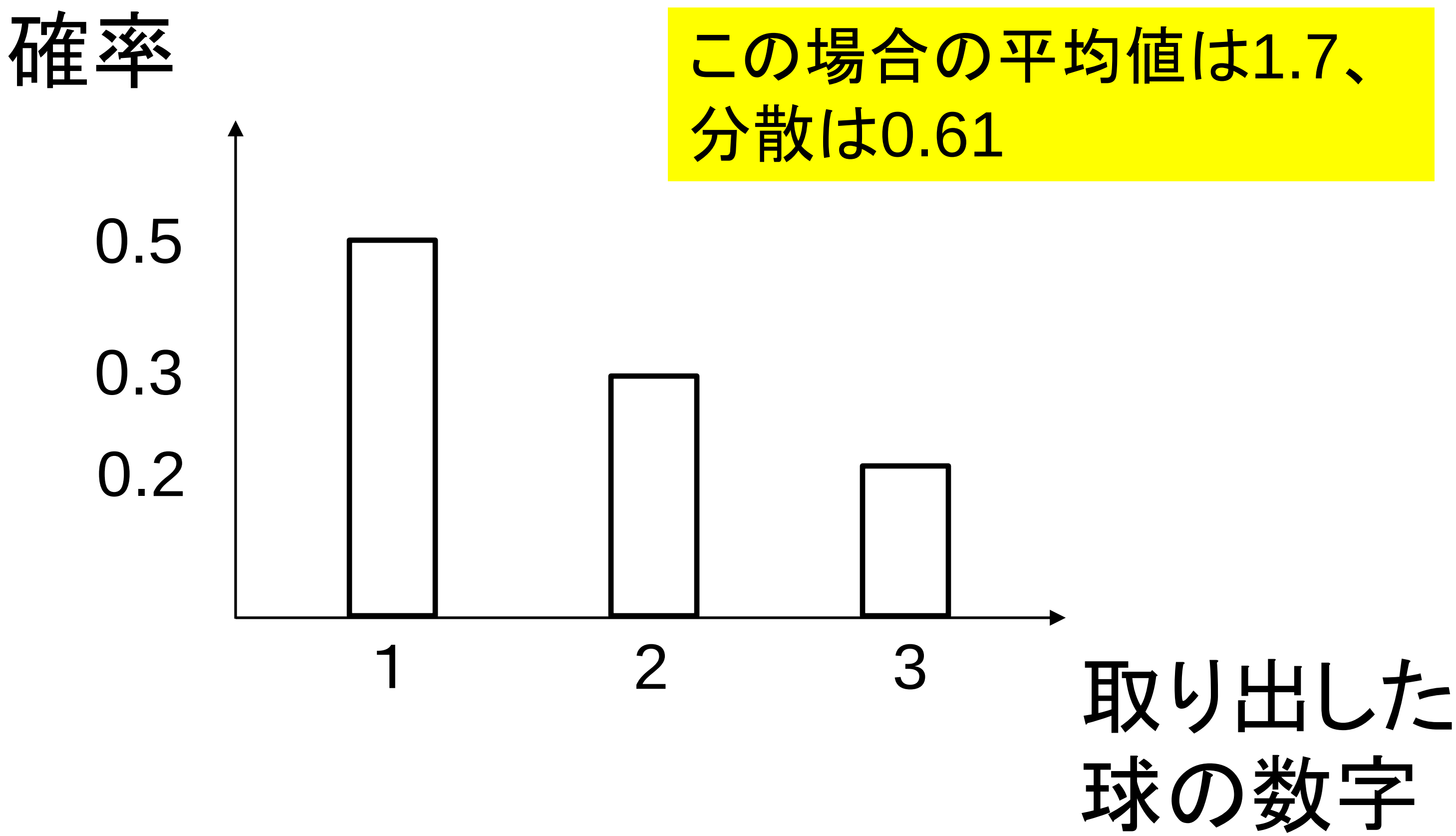
母集団と標本

この場合の平均値は
1x0.5 + 2x0.3 + 3x0.2 = 1.7



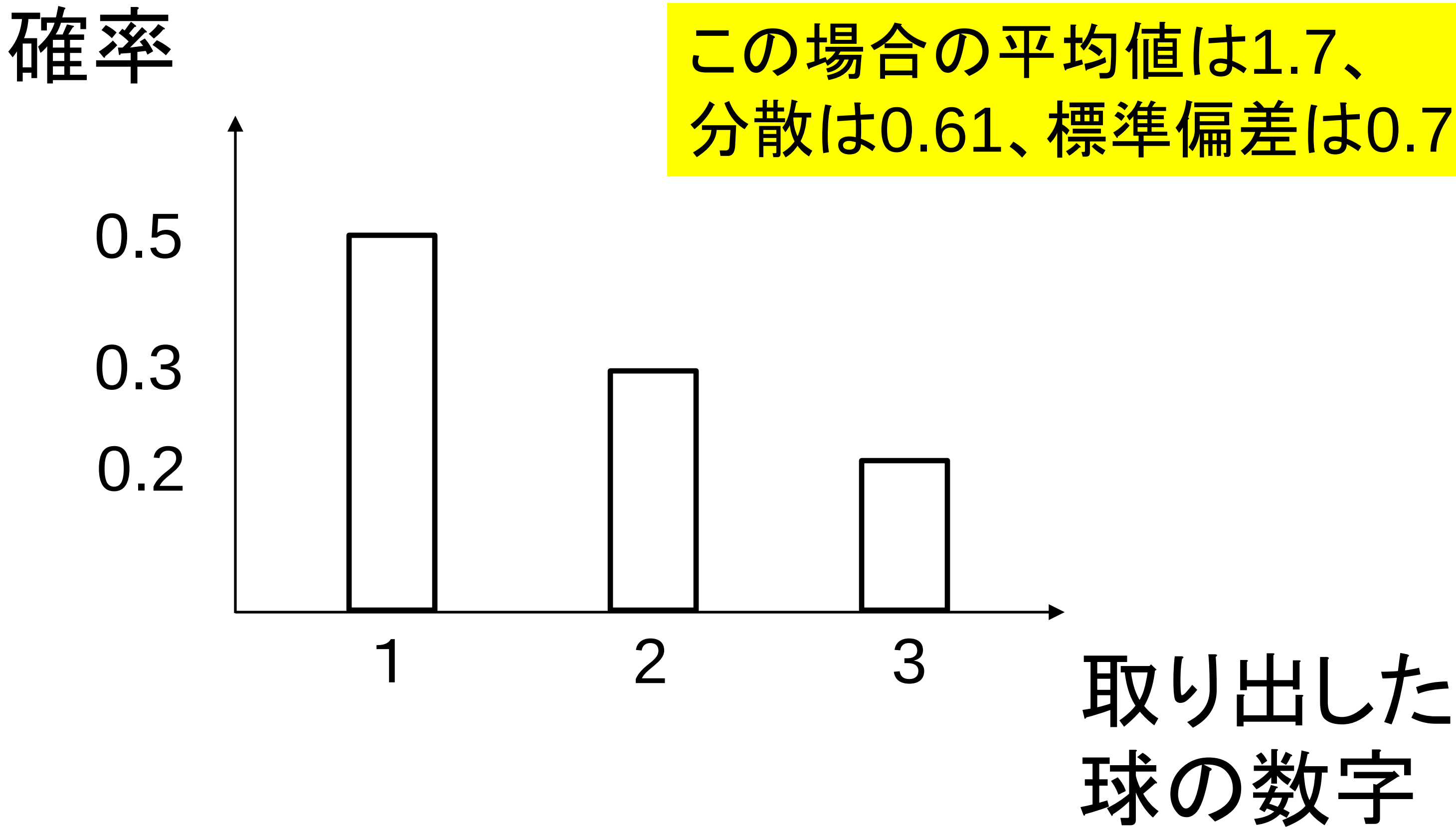
確率変数の平均値は、確率変数の値がxであるときの確率密度関数を$f(x)$としたとき、$\sum xf(x)$として与えられる。

母集団と標本



確率分布の「拡がり」を定義する統計量として分散がある。確率変数の分散は、平均値を$\bar{x}$としたとき、$\sum(x-\bar{x})^2 f(x)$として与えられる。

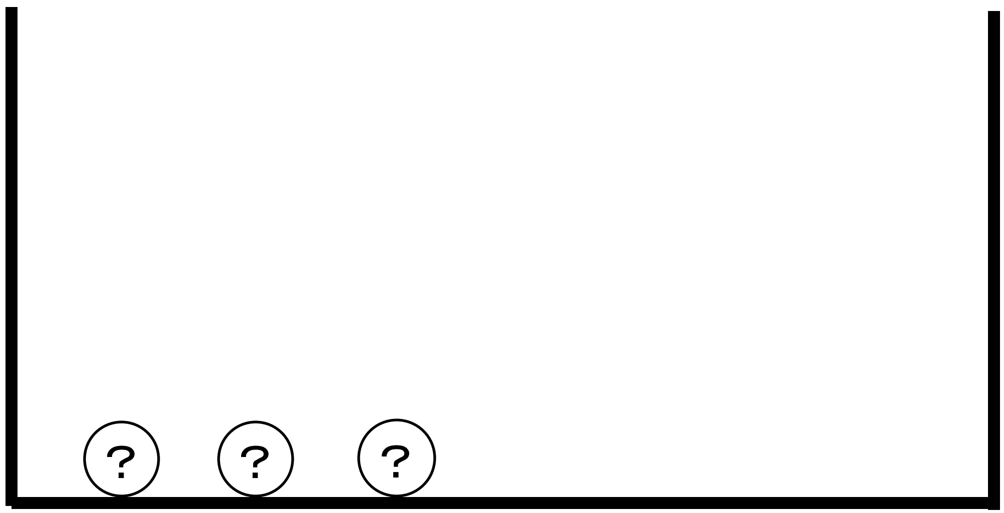
母集団と標本



この場合の平均値は1.7、
分散は0.61、標準偏差は0.78

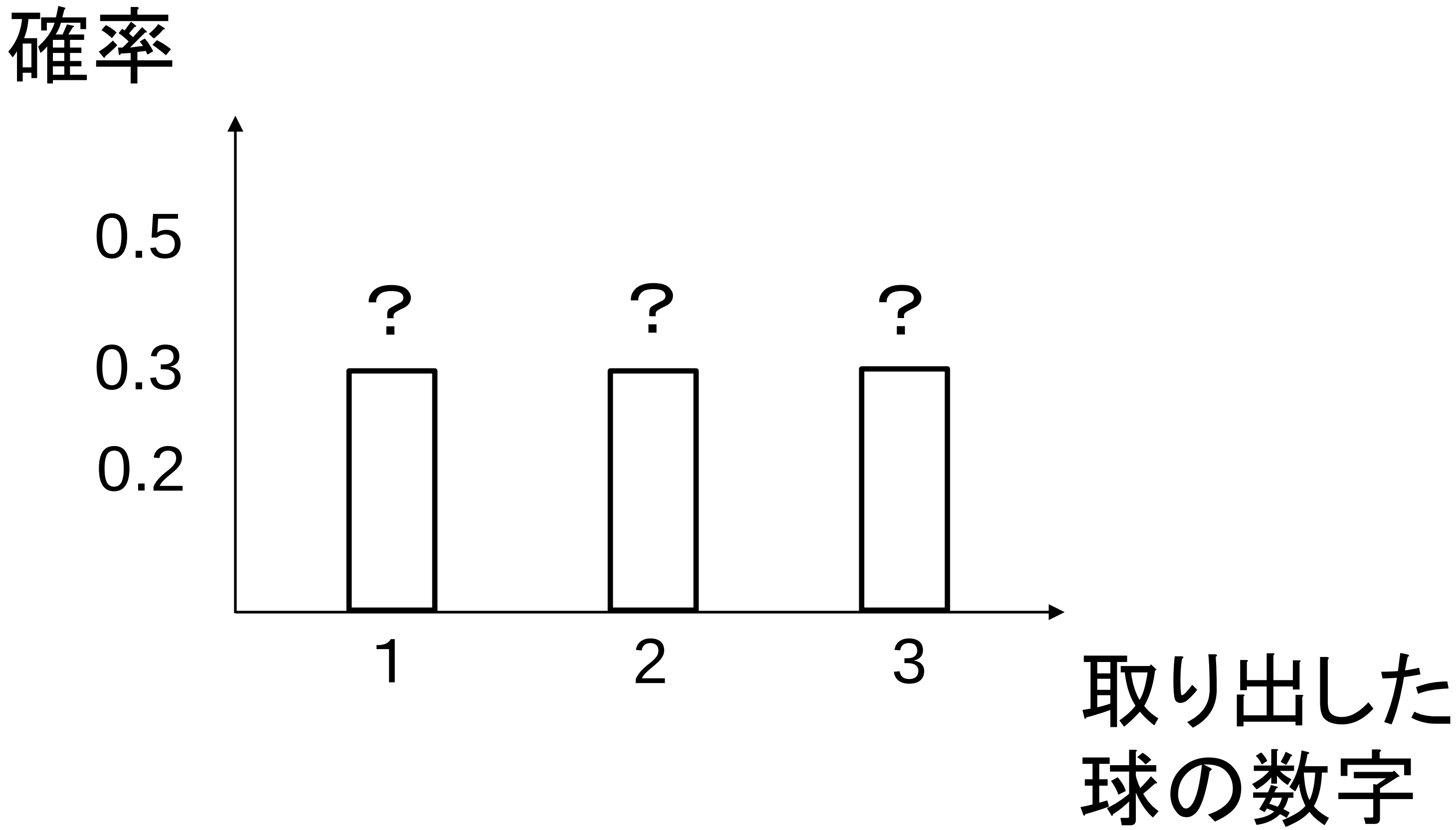
確率変数の分散をVとしたとき、その平方根を標準偏差σ（$=\sqrt{V}$）として定義する。確率変数と次元が一致するのは、分散・標準偏差のうち、標準偏差である。

母集団と標本



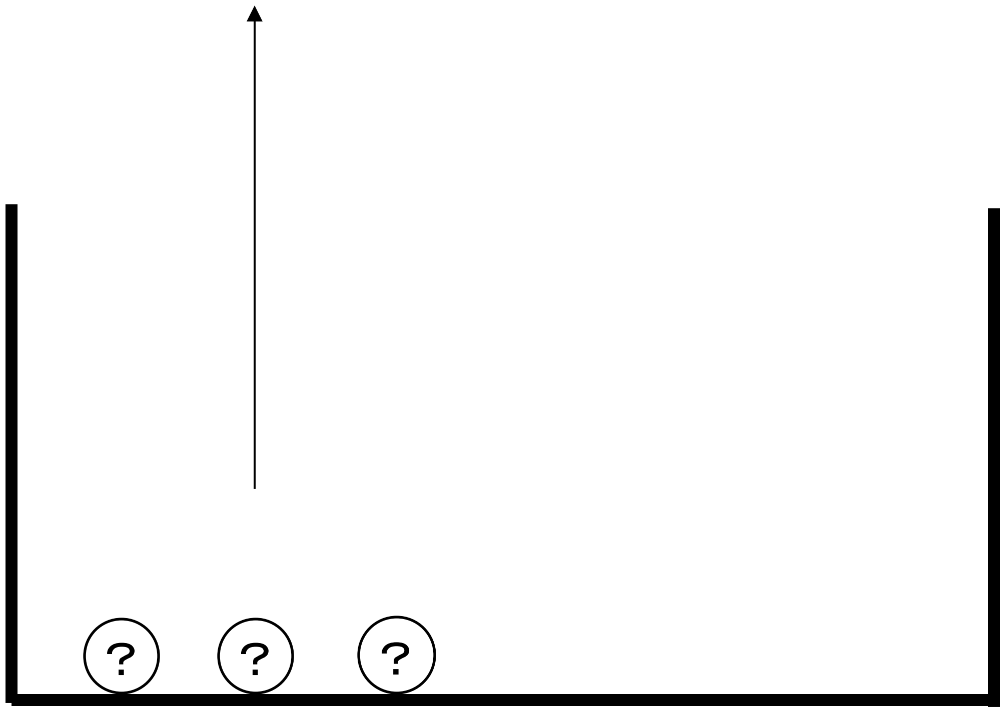
箱の中に1から3までの整数が書かれた球が1,000個入っていて、1が500個、2が300個、3が200個であったとするが、この内訳が我々にとっては未知であったとする。

母集団と標本



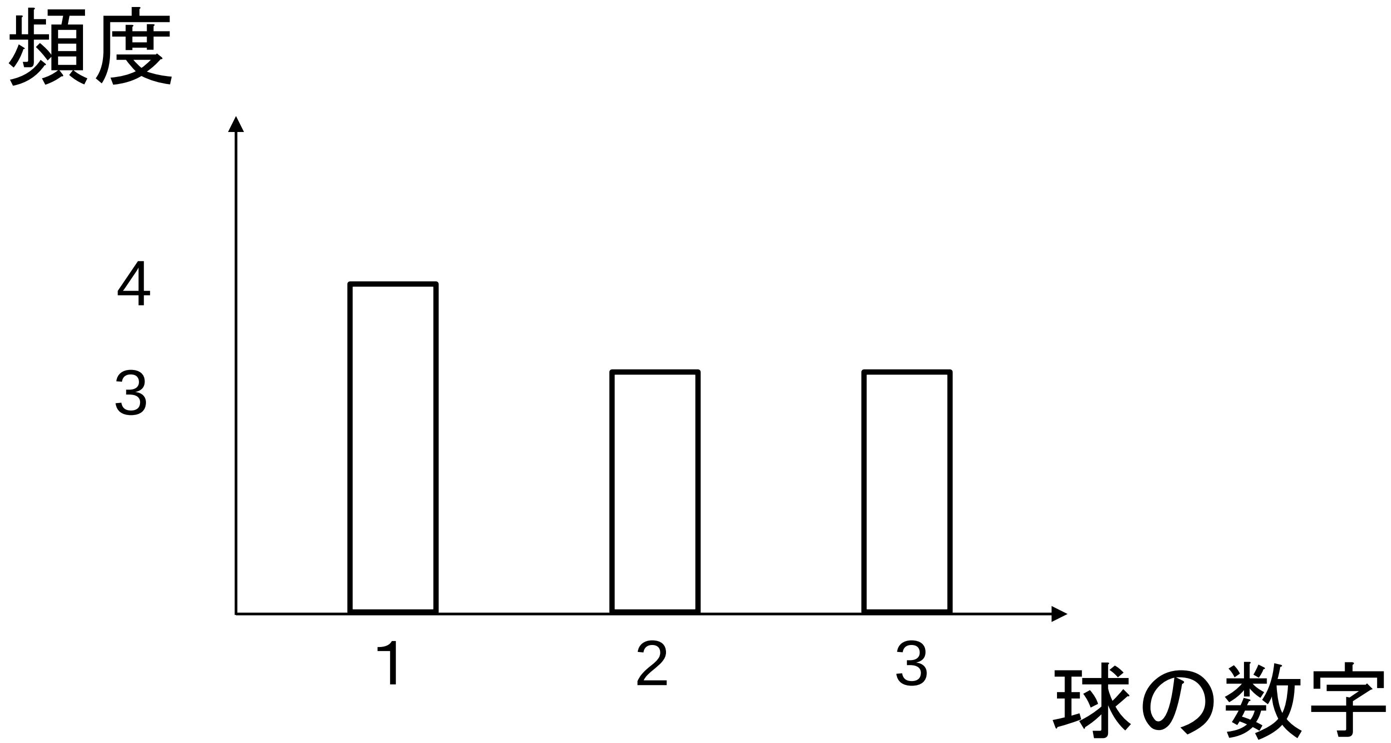
従って、我々にとっては、確率変数「箱から取り出した球の数字」の確率分布は不明である。
→　では、どのように推定するか？

母集団と標本



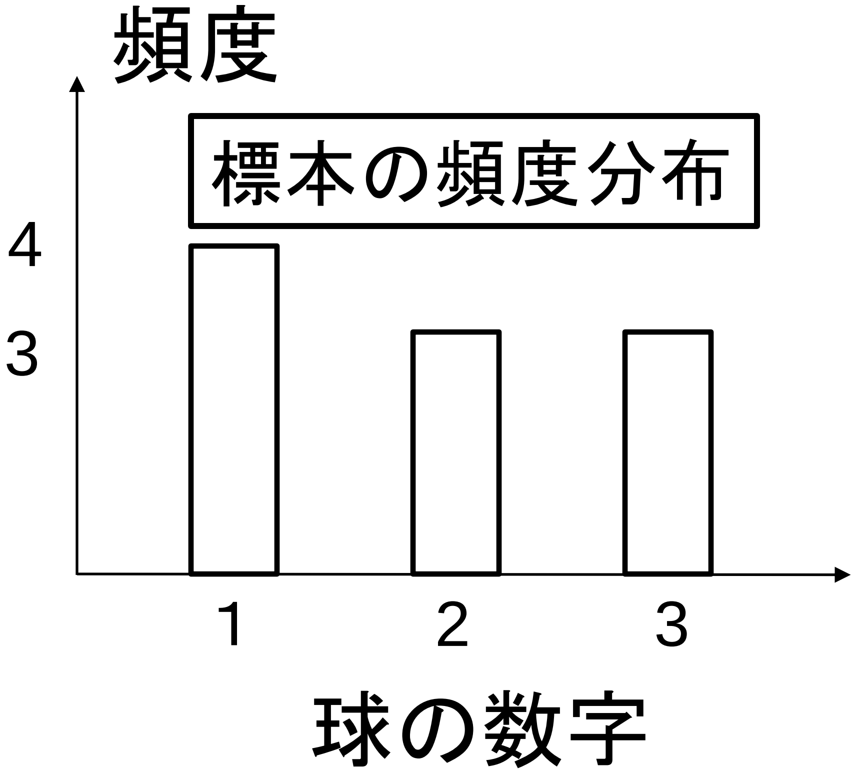
1個づつ取り出しては戻す、ということを何度か繰り返し、その結果（標本）から推定することを考える。

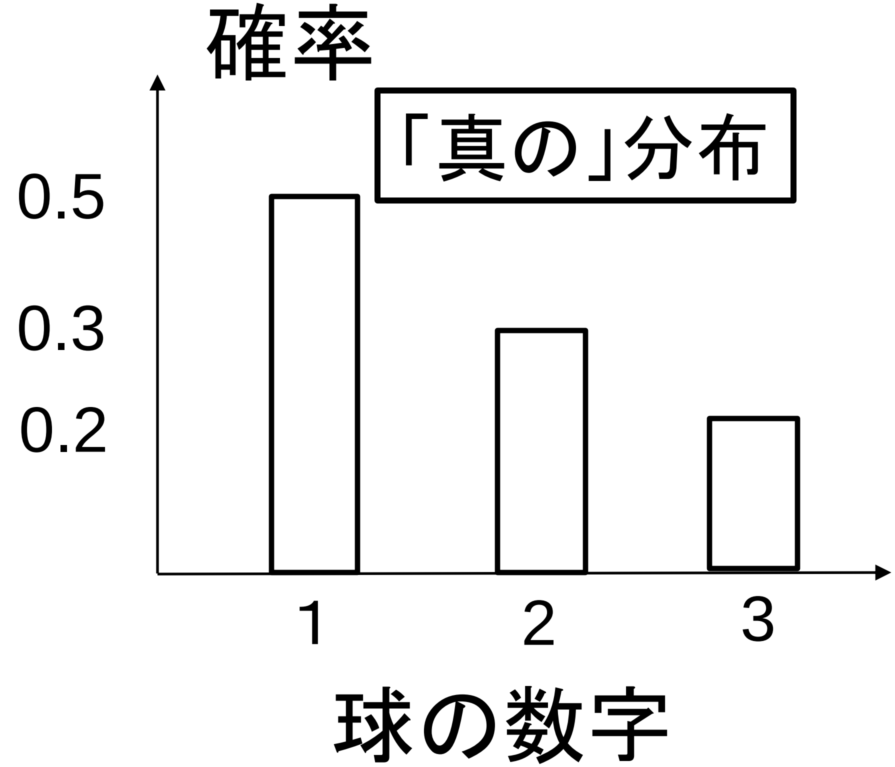
母集団と標本



10回の取り出しの結果、上のような結果が得られたとする。我々は、この結果から、確率変数「箱から取り出した球の数字」が従う確率分布を推定する。

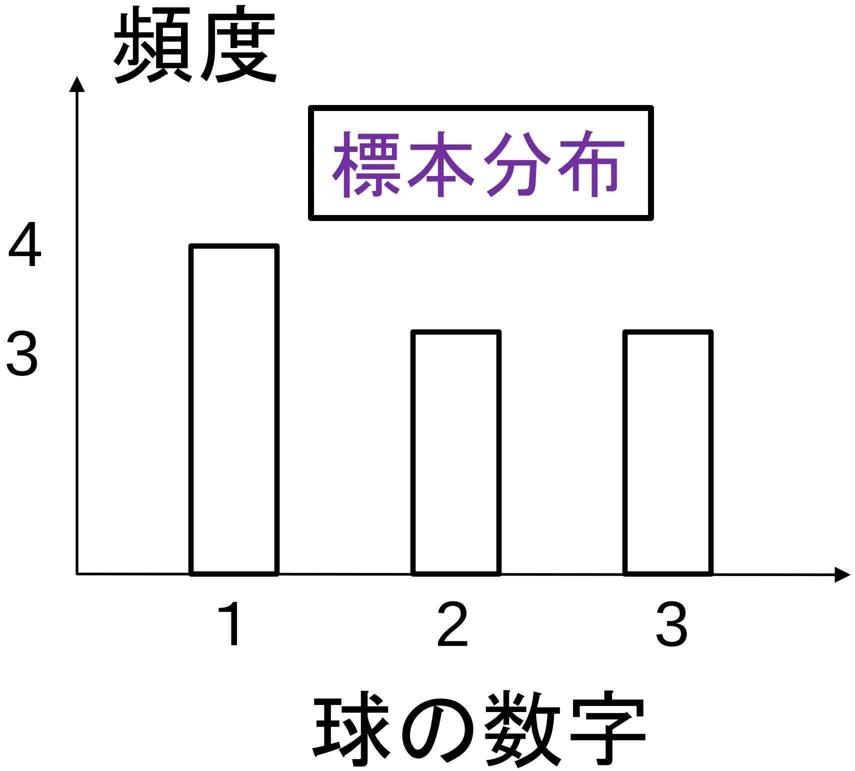
母集団と標本

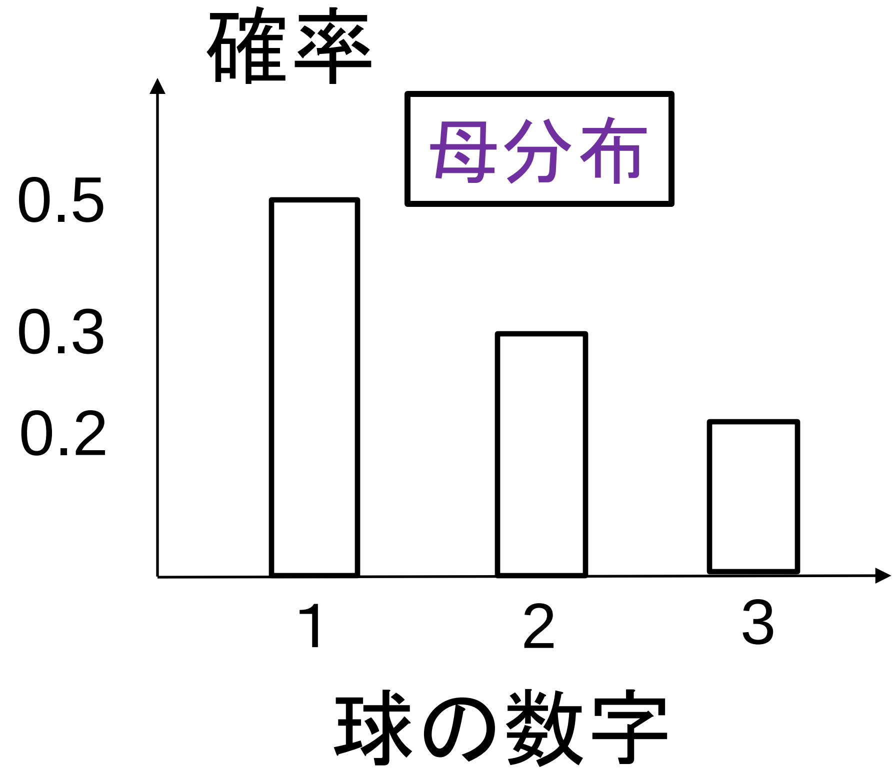




10回の取り出しの結果、上のような結果が得られたとする。我々は、この結果から、確率変数「箱から取り出した球の数字」が従う確率分布を推定する。

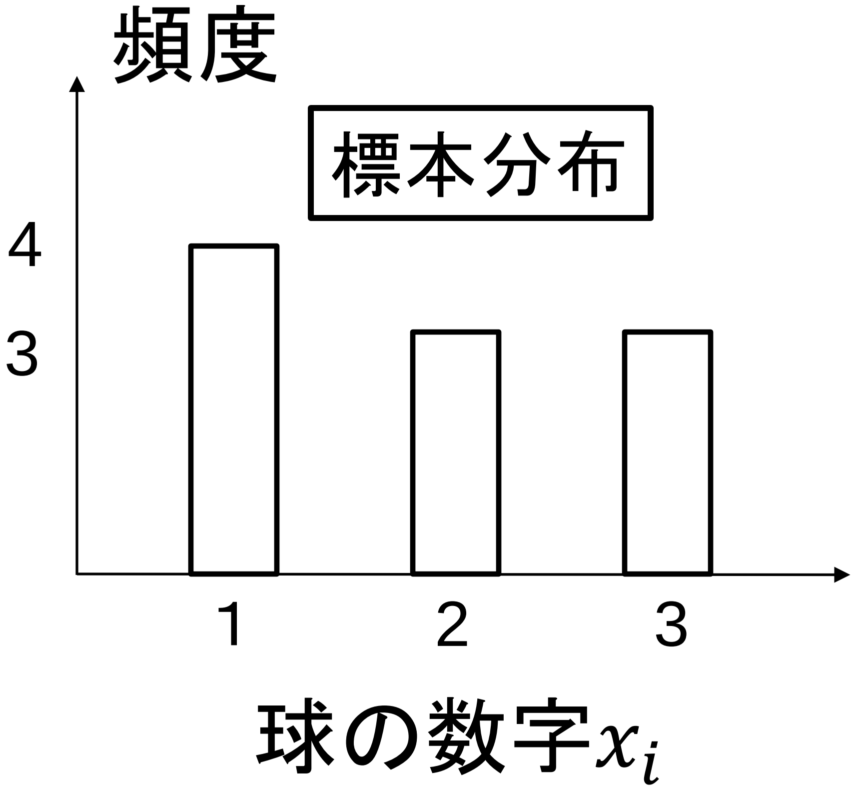
母集団と標本

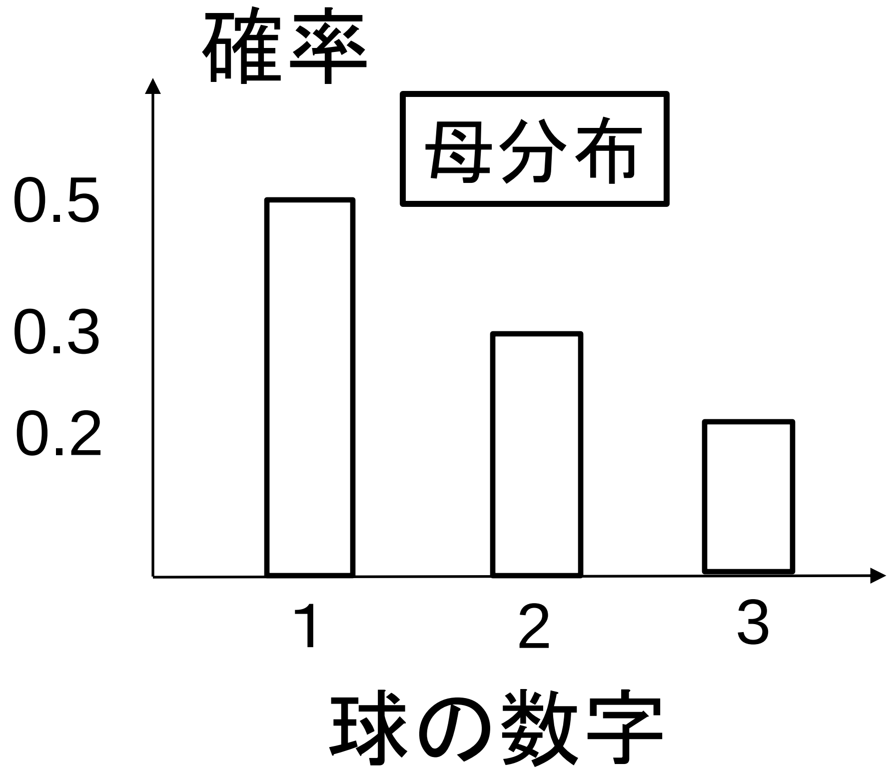




10回の取り出しの結果、上のような結果が得られたとする。我々は、この結果から、確率変数「箱から取り出した球の数字」が従う確率分布を推定する。

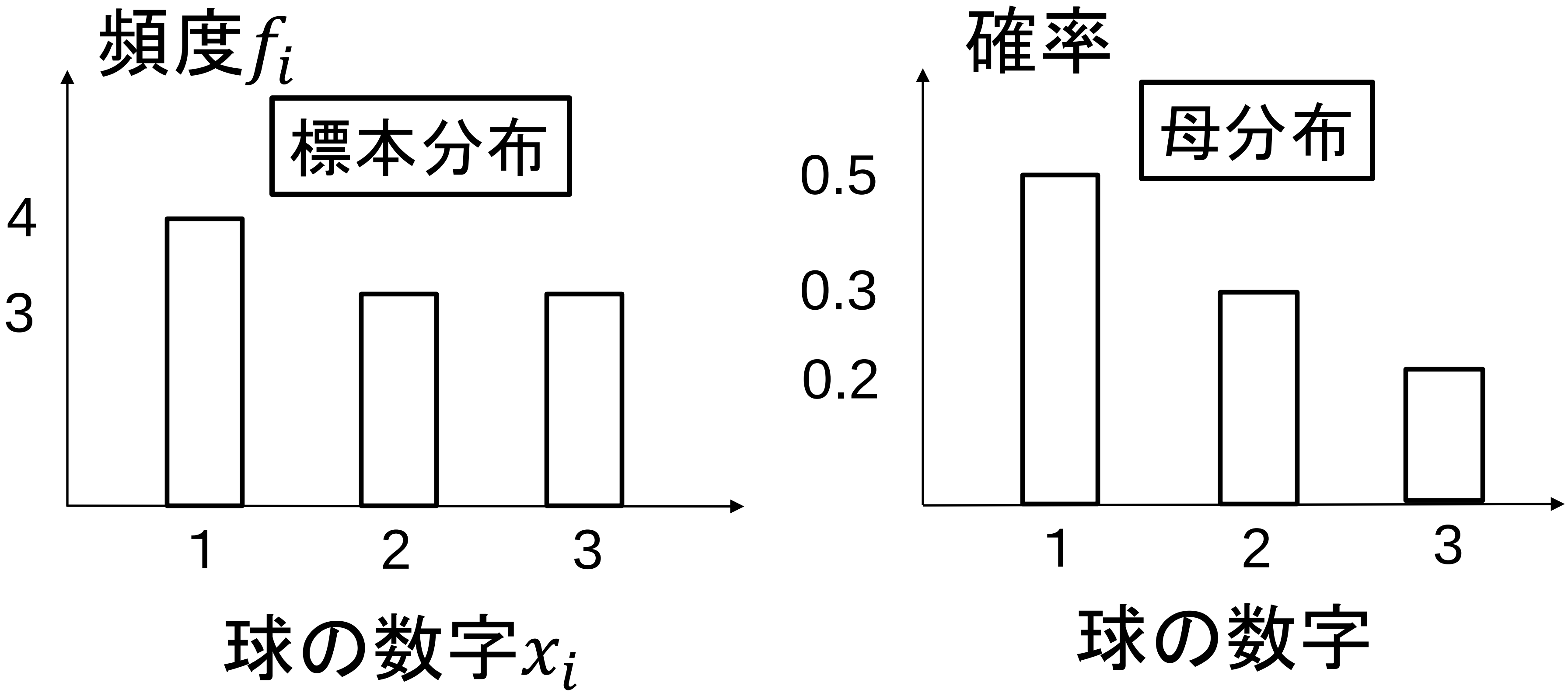
母集団と標本





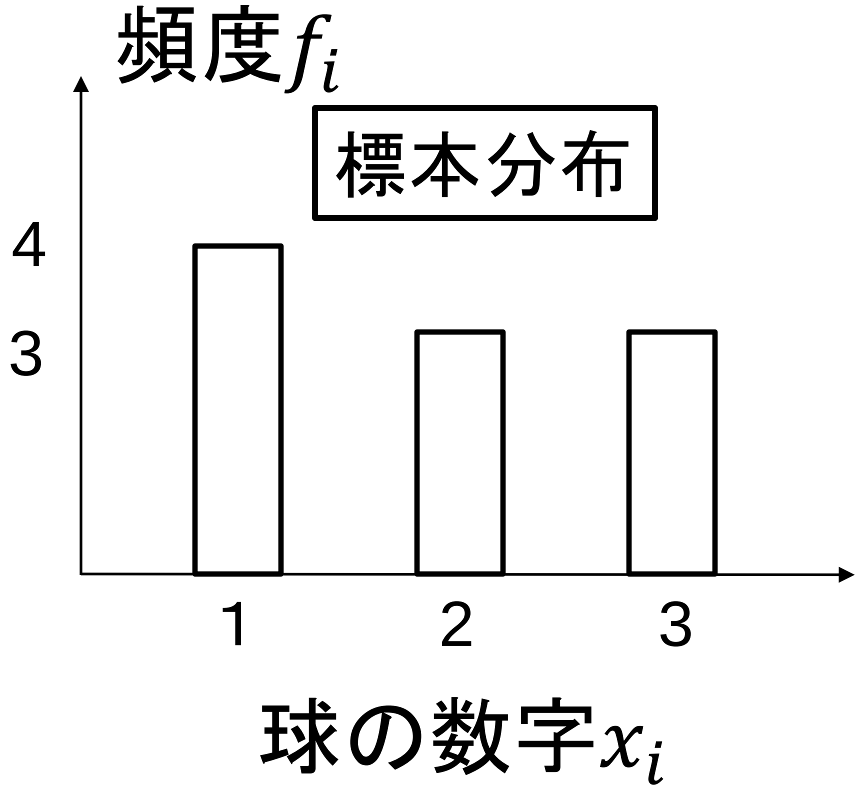
まずは、母分布の平均値（母平均）を推定することを考えよう。標本に基づくどのような情報から推定できるだろうか？

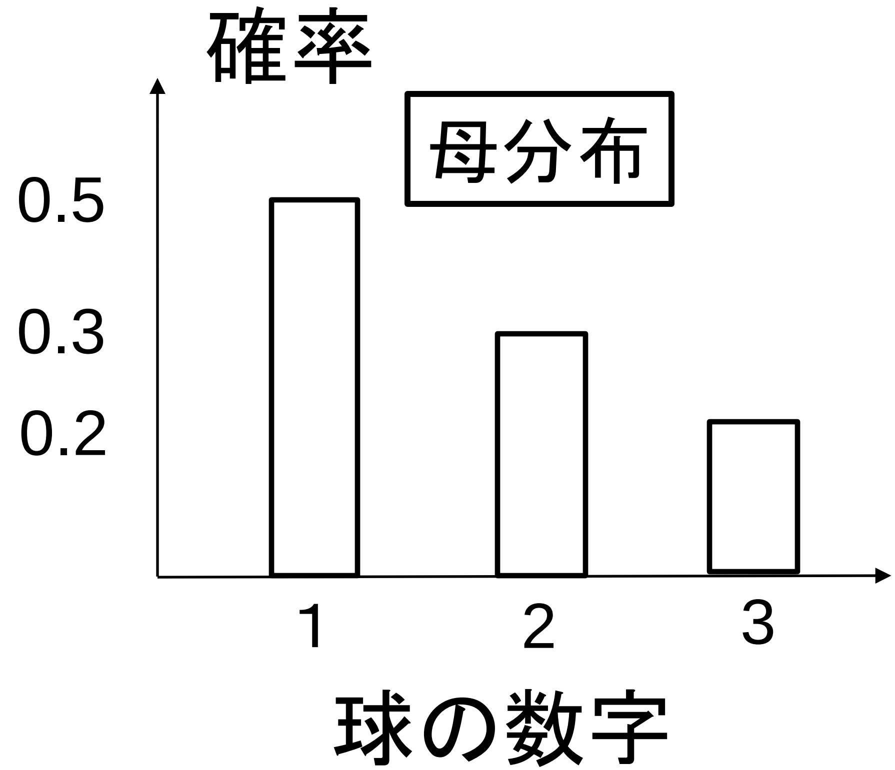
母集団と標本



母分布の平均値(母平均)の推定には、標本分布の平均値$(\sum x_i f_i)/N$を用いる。ここで、Nは標本数$(\sum f_i)$を示す。標本分布の平均値を標本平均と呼ぶ。

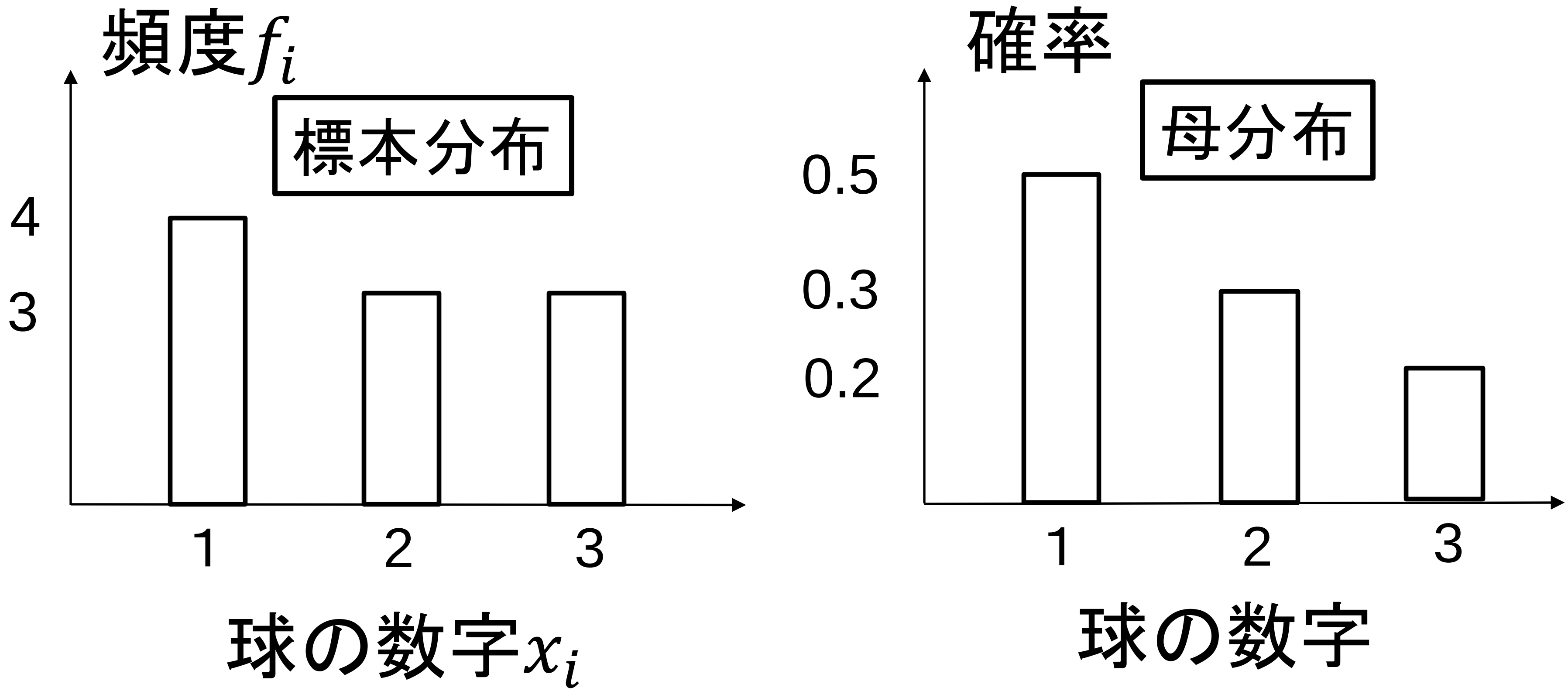
母集団と標本





同様に、母分布の分散（母分散）を推定することを考えよう。標本に基づくどのような情報から推定できるだろうか？

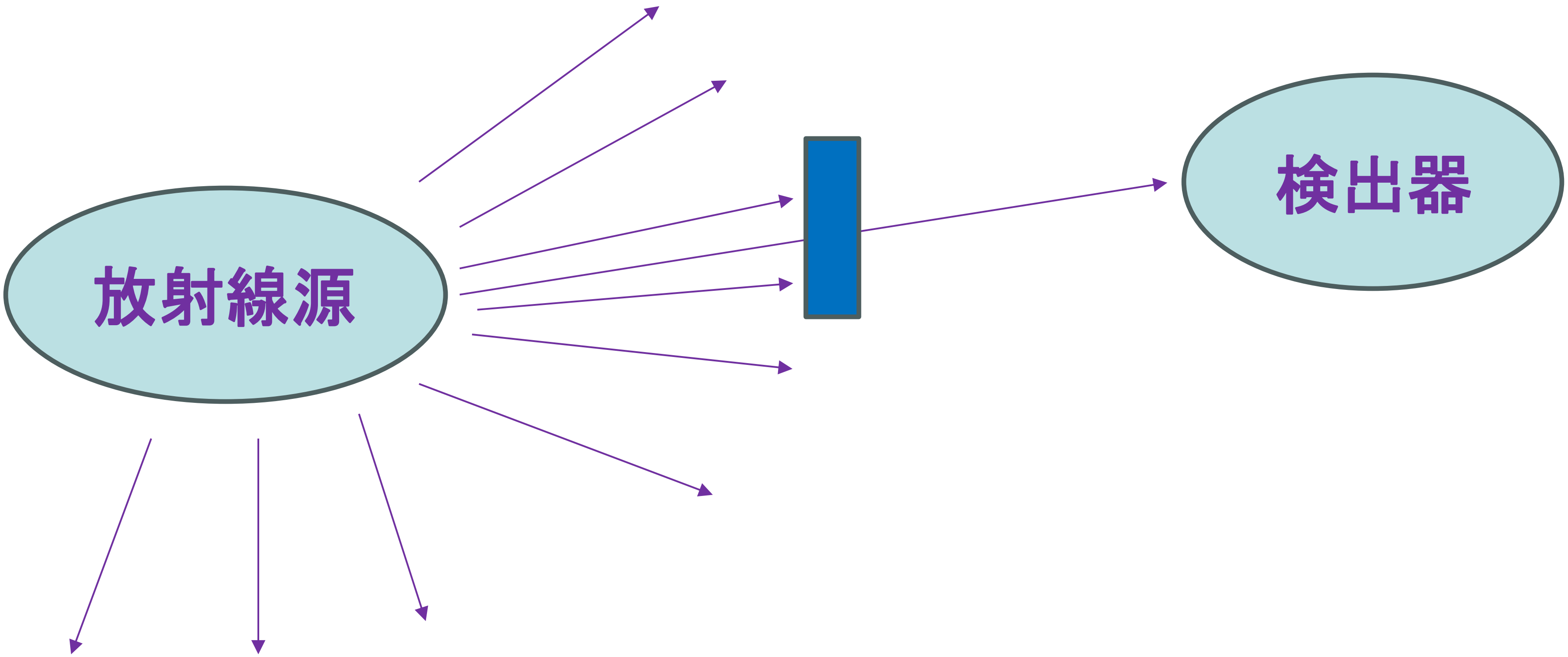
母集団と標本



母分布の分散(母分散)の推定には、標本分布の分散$(\sum(x_i - \bar{x}_N)^2 f_i)/(N-1)$を用いる。ここで、$\bar{x}_N$は標本平均を示す。この分散を標本分散と呼ぶ。

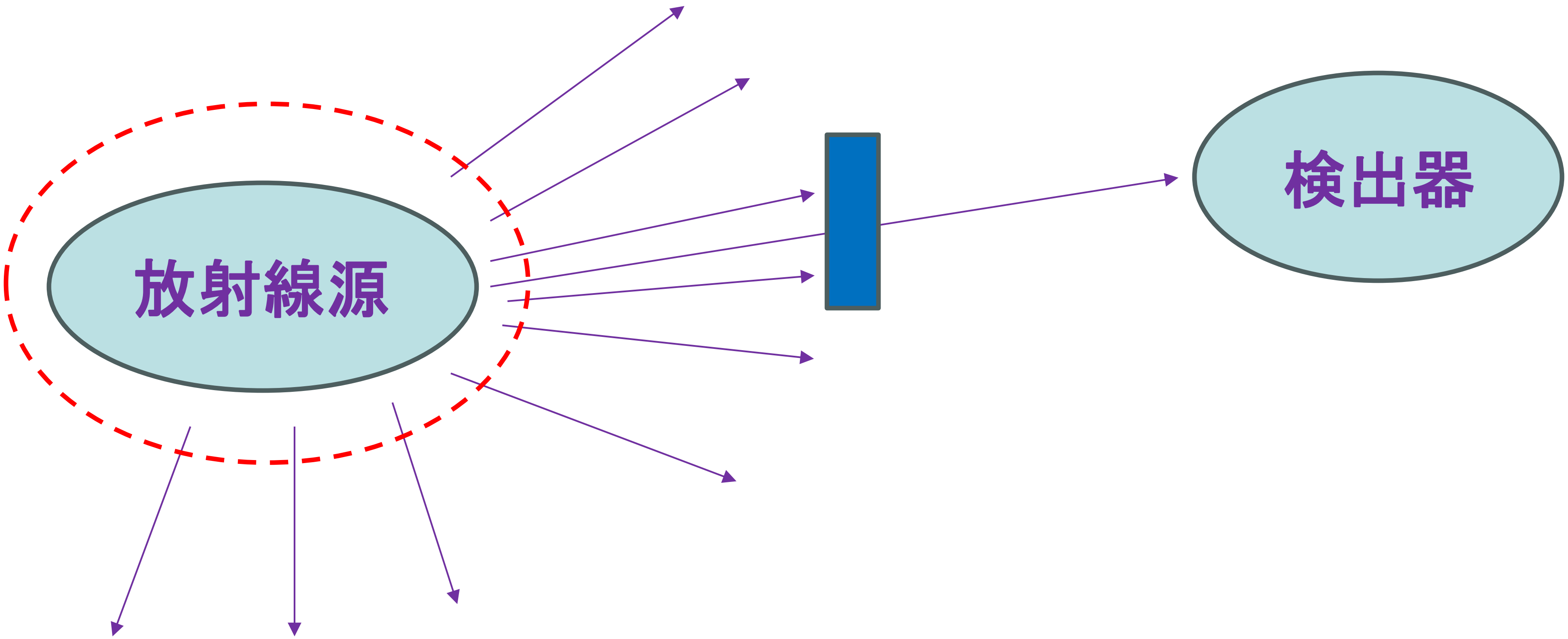
放射線計測と統計の関係

測定するということ



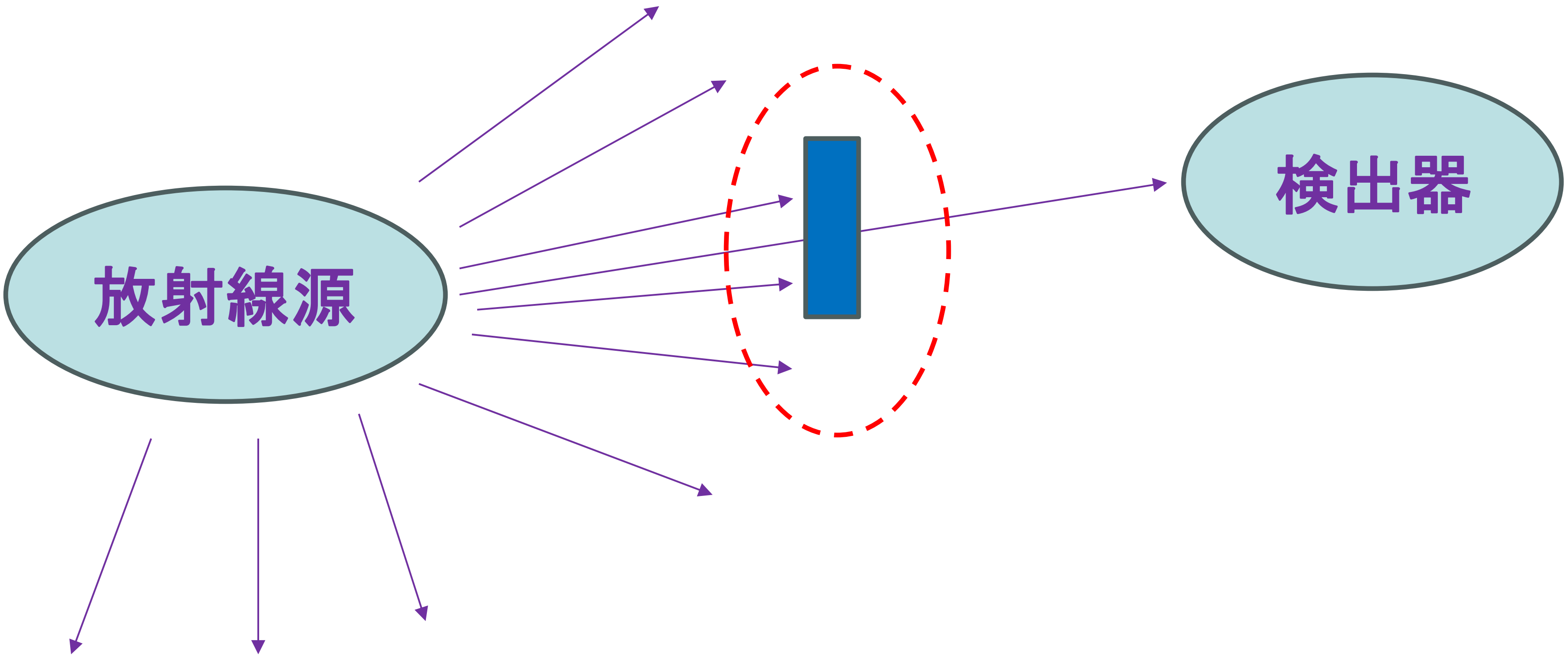
「ある時間内での、放射線源に含まれる不安定原子核が崩壊して放射線を放出し、それが物質を透過し、最終的に検出器で検知される回数」に関心があるものとする。
この回数は、「正しく」測定できれば、常に一定となるべきものか？

測定するということ



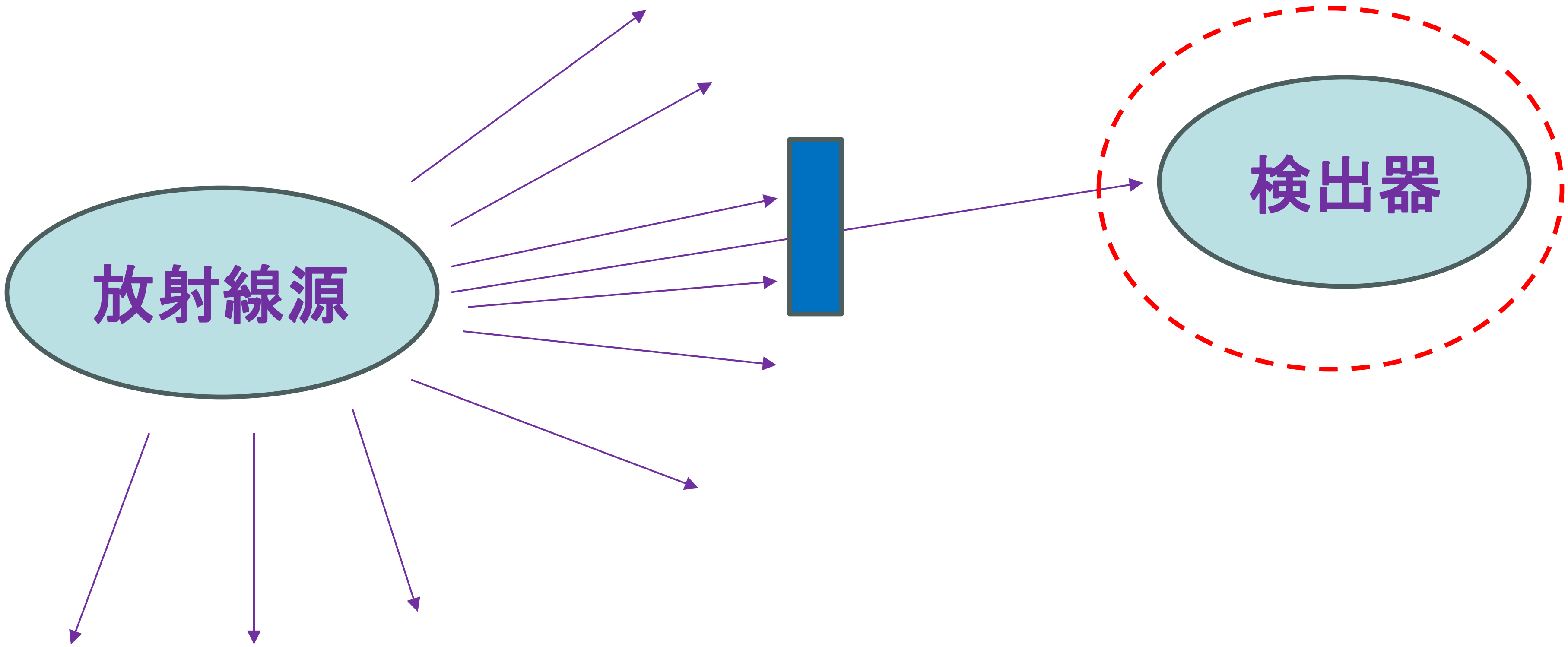
放射線源での原子核の崩壊は確率事象であるため、ある時間内に起こる崩壊の回数は何らかの確率分布に従う確率変数である。

測定するということ



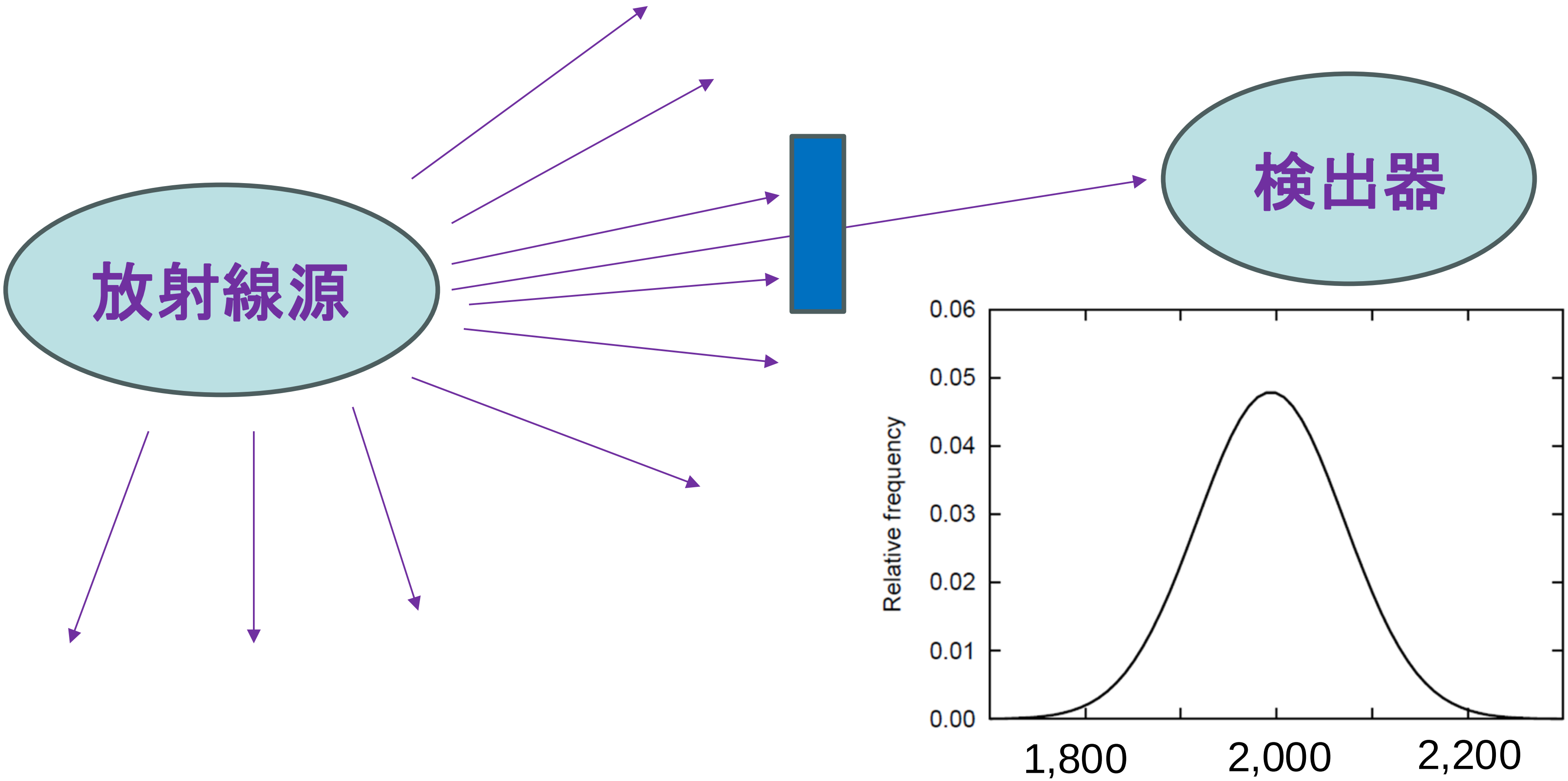
放射線と物質の相互作用も確率事象であるため、ある時間内での放射線と物質の相互作用回数も、何らかの確率分布に従う確率変数である。

測定するということ



検出器で放射線を検知できるか否かも確率事象であるため、ある時間内での検出器による放射線検知回数も、何らかの確率分布に従う確率変数である。

測定するということ

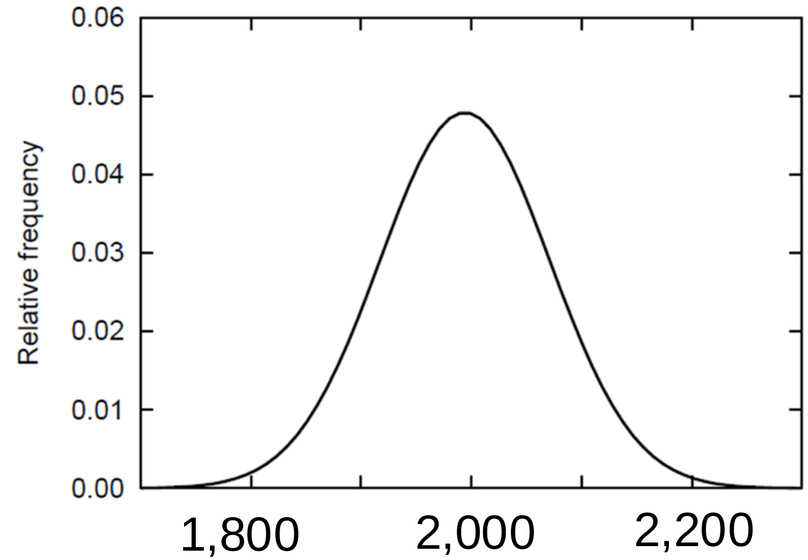


「ある時間内での、放射線源に含まれる不安定原子核が崩壊して放射線を放出し、それが物質を透過し、最終的に検出器で検知される回数」は何らかの確率分布に従う確率変数である。

測定するということ

1回目：1,912
2回目：2,030
3回目：2,198

標本平均：2,047

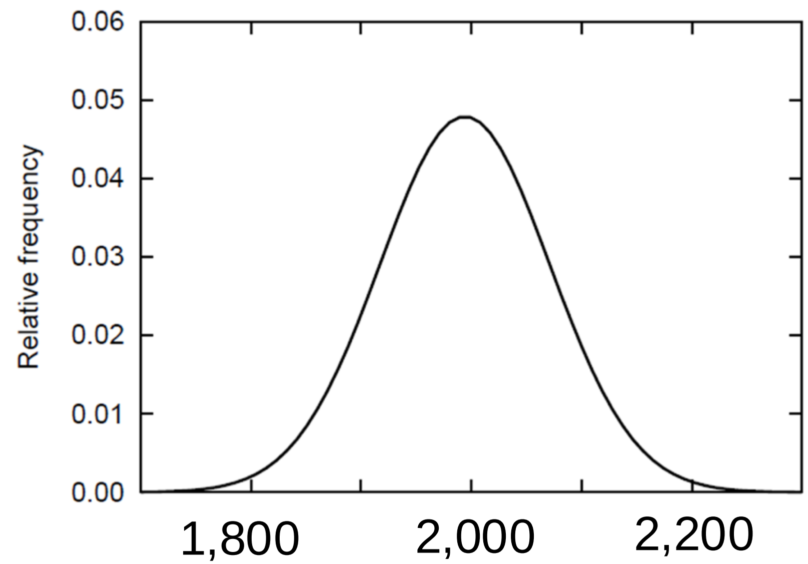


測定とは、「ある確率分布に従う確率変数についての標本をランダムに抽出する行為」と考えることができる。
そして、得られた標本を利用することで、母平均や母分散を推定する。

標本平均による母平均の推定

1回目 : 1,912
2回目 : 2,030
3回目 : 2,198

標本平均 : 2,047



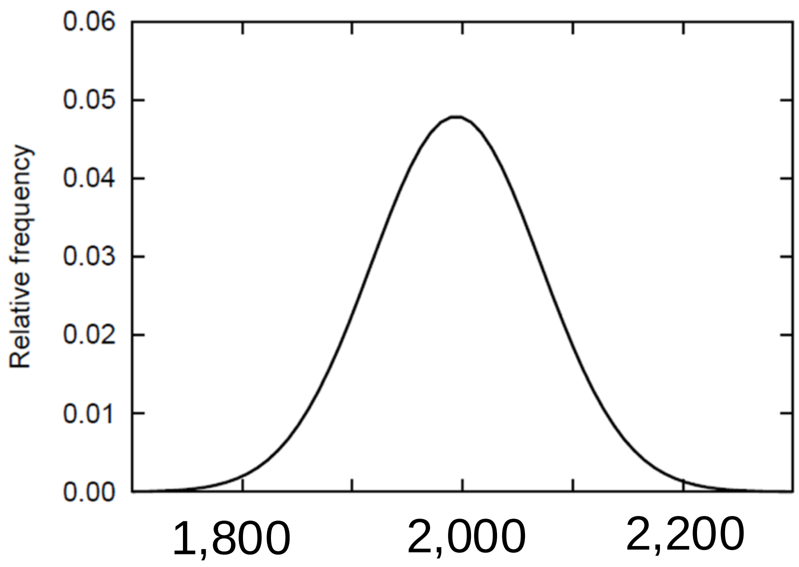
3回の測定から上のように標本平均を得たとする。

これとは独立に別の3回の測定を行ったときの標本平均は、これと同一の値となるであろうか？

標本平均による母平均の推定

1回目：1,813
2回目：2,160
3回目：2,093

標本平均：2,022



３回の測定から上のように標本平均を得たとする。

これとは独立に別の３回の測定を行ったときの標本平均は、これと同一の値となるであろうか？

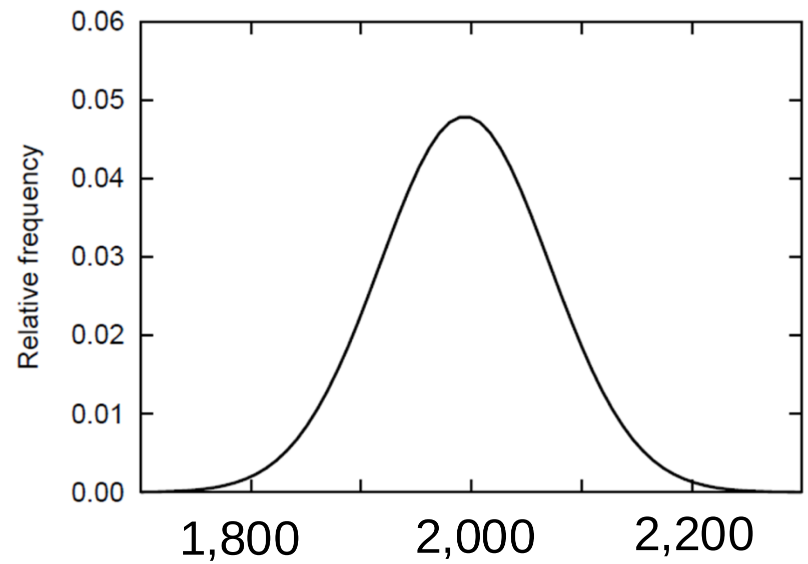
→　同一となる保証はない：標本平均も確率変数である。

では、標本平均が従う確率分布はどのようなものになるか？

標本平均による母平均の推定

1回目：1,813
2回目：2,160
3回目：2,093

標本平均：2,022

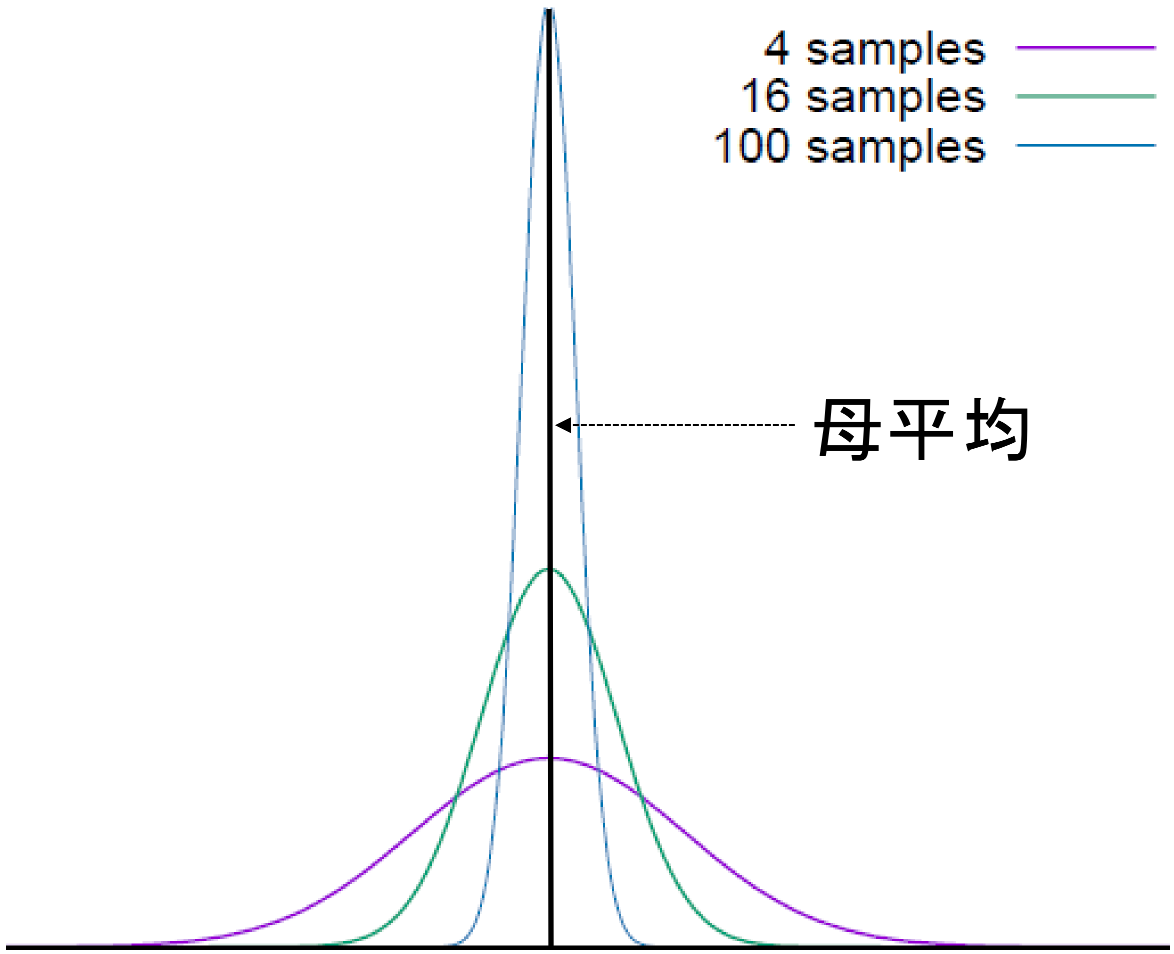


右上の母分布からの、4個の標本に基づく標本平均、16個の標本に基づく標本平均、100個の標本に基づく標本平均が従う確率分布はどのようなものになるか？

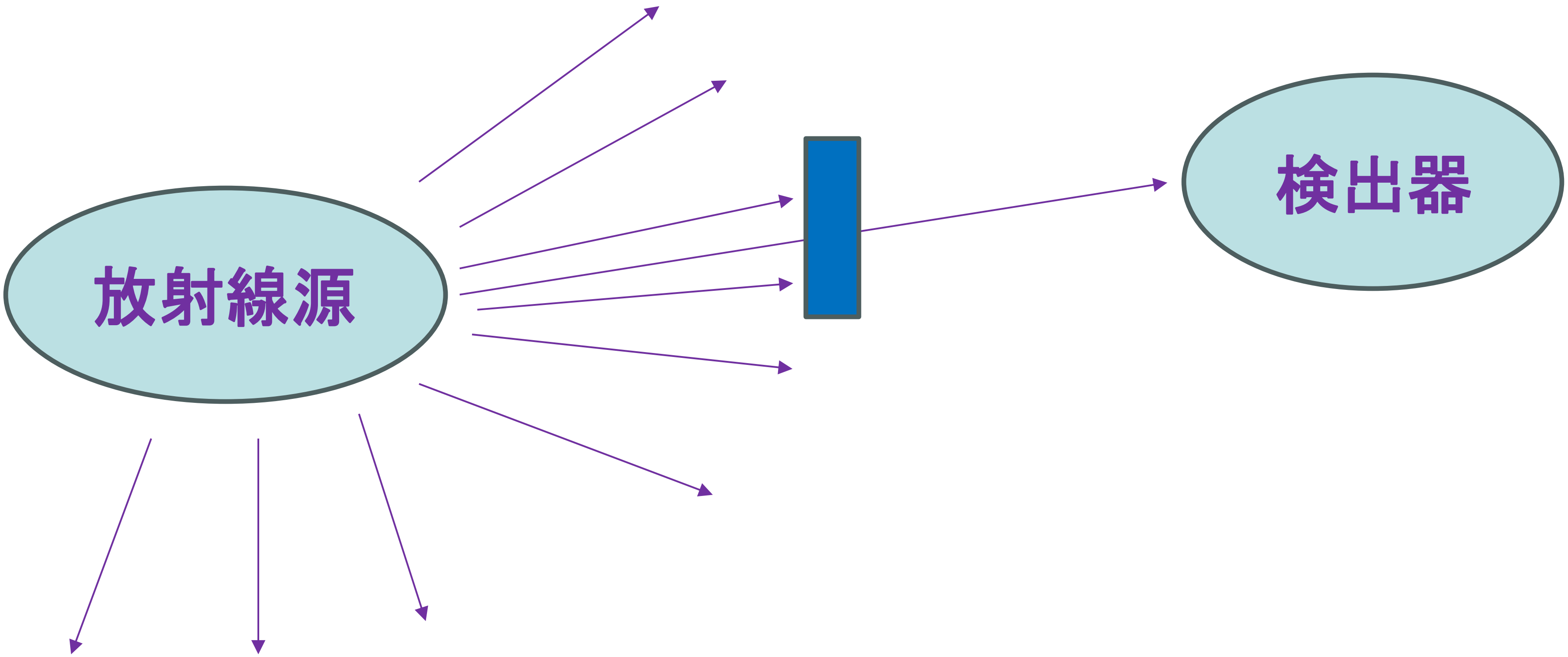
1個の標本に基づく標本平均、無限個の標本に基づく標本平均を考えてみるとよいであろう。

標本平均による母平均の推定

右上の母分布からの、4個の標本に基づく標本平均、16個の標本に基づく標本平均、100個の標本に基づく標本平均が従う確率分布はどのようなものになるか？

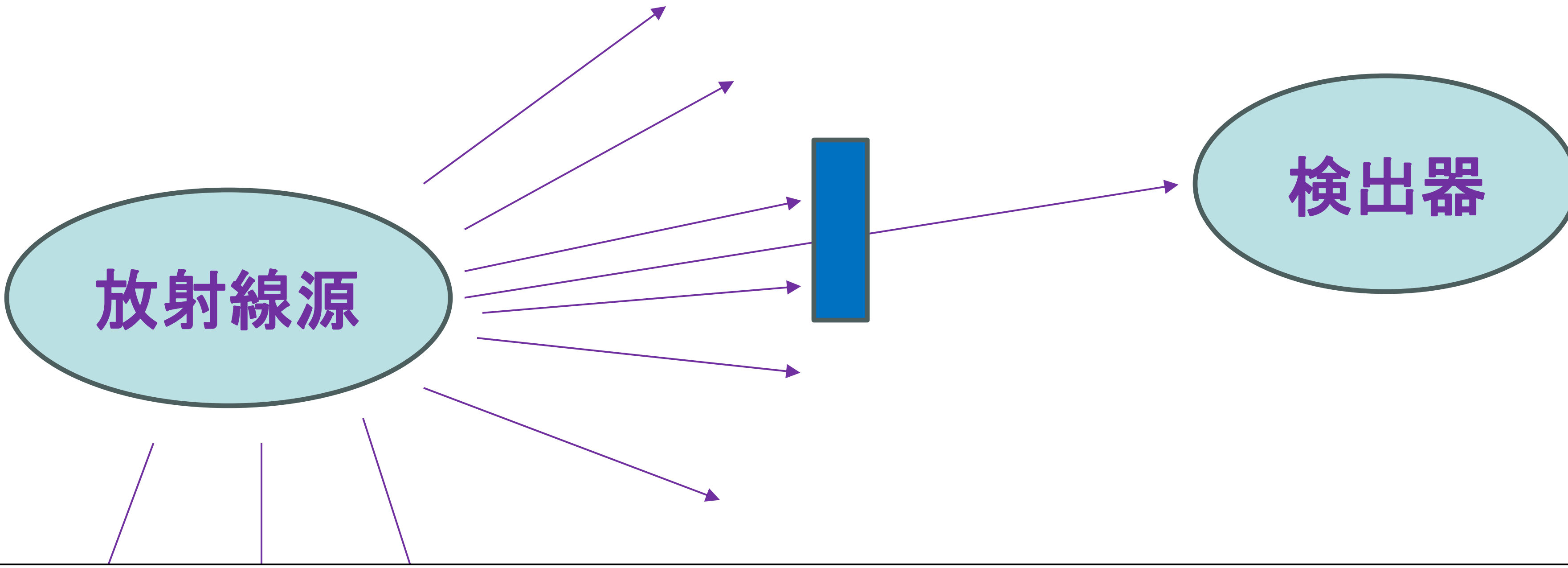


ポアソン分布



「ある時間内での、放射線源に含まれる不安定原子核が崩壊して放射線を放出し、それが物質を透過し、最終的に検出器で検知される回数」の話に戻る。

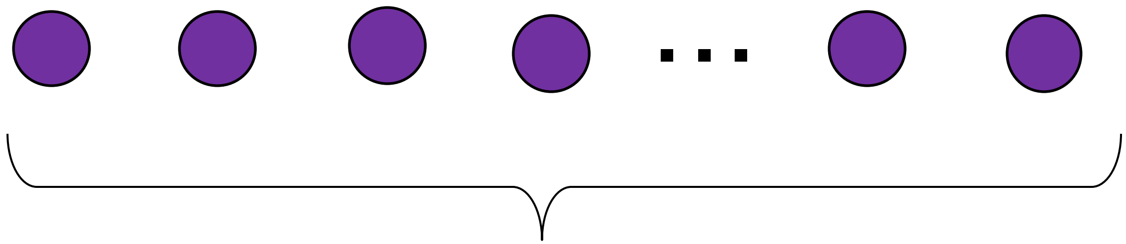
ポアソン分布



この回数は、膨大な個数が存在する原子核のうち、それが崩壊して放射線を放出し、その放射線が物質を透過し、さらにそれが検出器に検知された個数に対応する。このような、「大量に存在する対象に対して、その個々が引き起こす事象の確率が小さいときの、事象の発生回数」はポアソン分布に従うことが分かっている。

二項分布とポアソン分布

個々について事象が起こる確率 : p

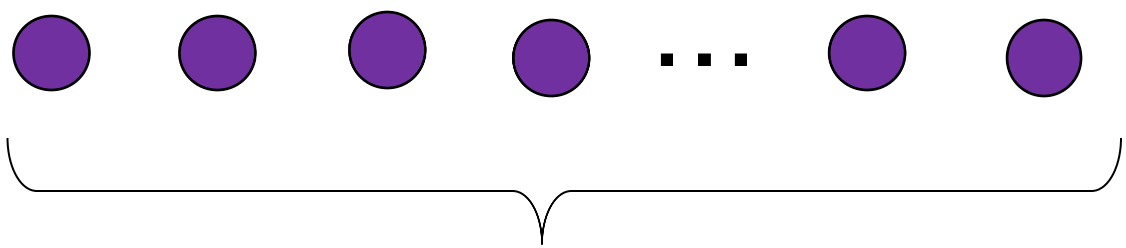


事象が起こりうる個数 : n

総数 n のうち、その事象が起こった個数は確率変数であり、
個数 x に対応する確率が確率密度関数 $f(x)$ に従うものとする。

二項分布とポアソン分布

個々について事象が起こる確率 : p



事象が起こりうる個数 : n

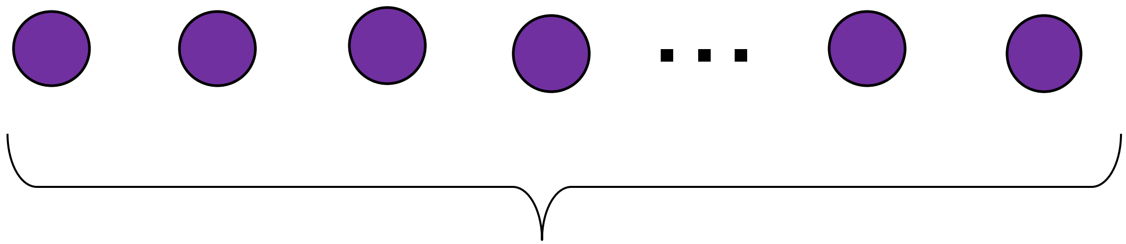
総数nのうち、その事象が起こった個数は確率変数であり、
個数xに対応する確率が確率密度関数$f(x)$に従うものとする。
この場合、この確率変数は二項分布に従う。

$$f(x) = {}_nC_x p^x (1-p)^{n-x}$$

この確率変数の平均値は？

二項分布とポアソン分布

個々について事象が起こる確率：p



事象が起こりうる個数：n

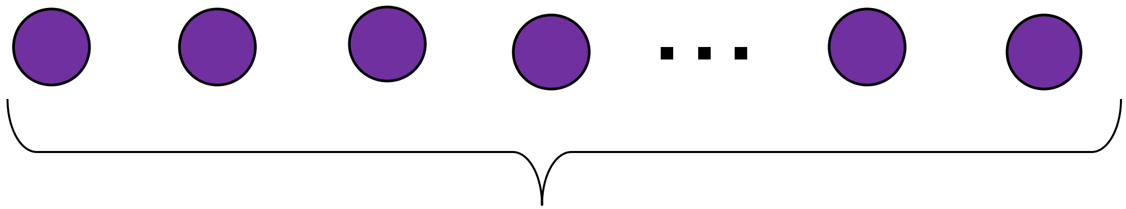
総数nのうち、その事象が起こった個数は確率変数であり、
個数xに対応する確率が確率密度関数$f(x)$に従うものとする。
この場合、この確率変数は二項分布に従う。

$$f(x) = {}_nC_x p^x (1-p)^{n-x}$$

この確率変数の平均値：np

二項分布とポアソン分布

個々について事象が起こる確率 : p



事象が起こりうる個数 : n

その事象が起こった個数xに対応する確率密度関数$f(x)$:

$$f(x) = {}_nC_x p^x (1-p)^{n-x}$$

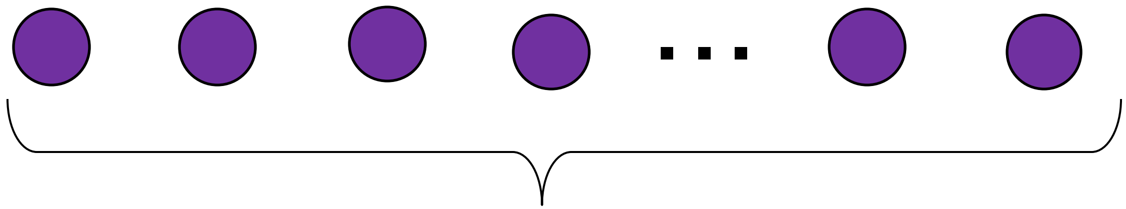
<u>この確率変数の平均値npをλとおく。</u>

$n \to \infty$（たくさんのものについて）、$p \to 0$（殆ど起こらない事象）の極限をとると、以下が成り立つ（ポアソンの少数の法則）:

$${}_nC_x p^x (1-p)^{n-x} \to e^{-\lambda}\lambda^x / x!$$

二項分布とポアソン分布

個々について事象が起こる確率 : p



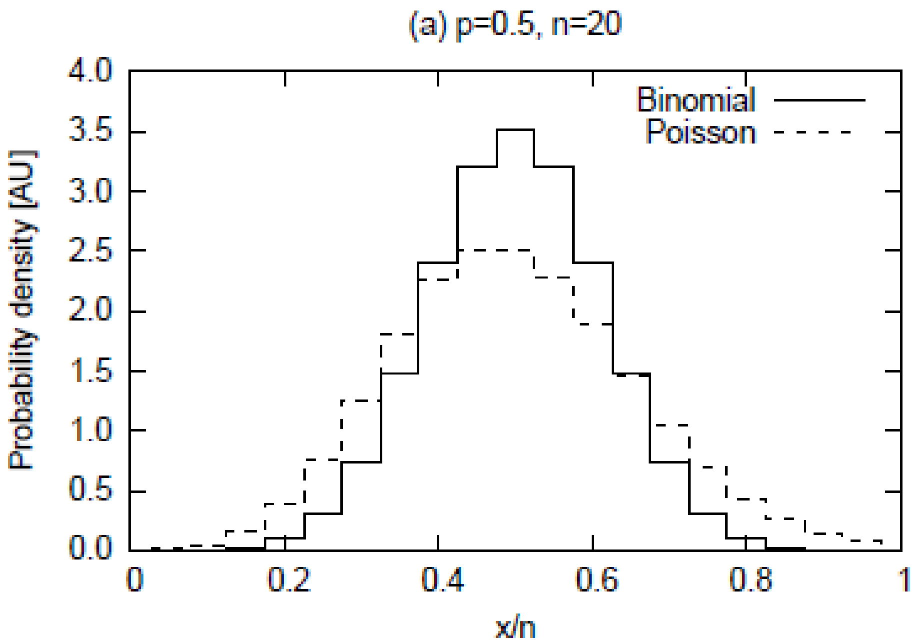
事象が起こりうる個数 : n

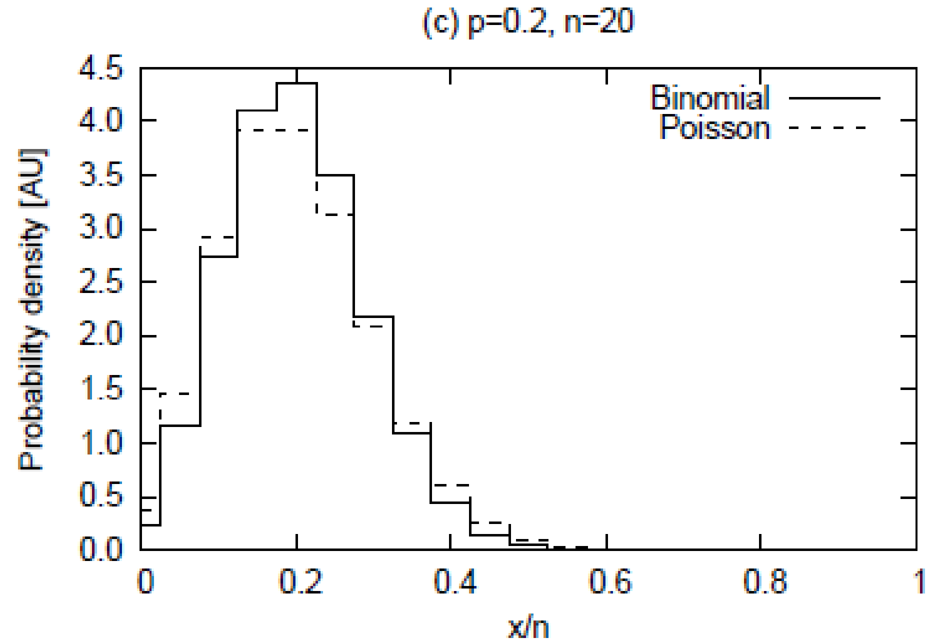
その事象が起こった個数xに対応する確率密度関数$f(x)$は、$n \to \infty$、$p \to 0$の極限では以下となる（ポアソン分布）:

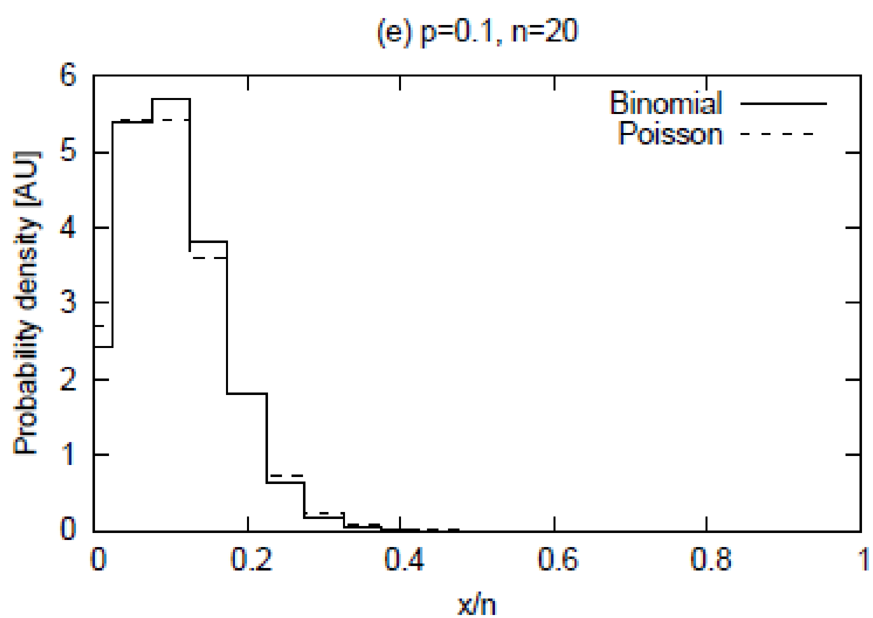
$$f(x) = e^{-\lambda}\lambda^{x}/x!$$

この確率変数の平均値: $np = \lambda$

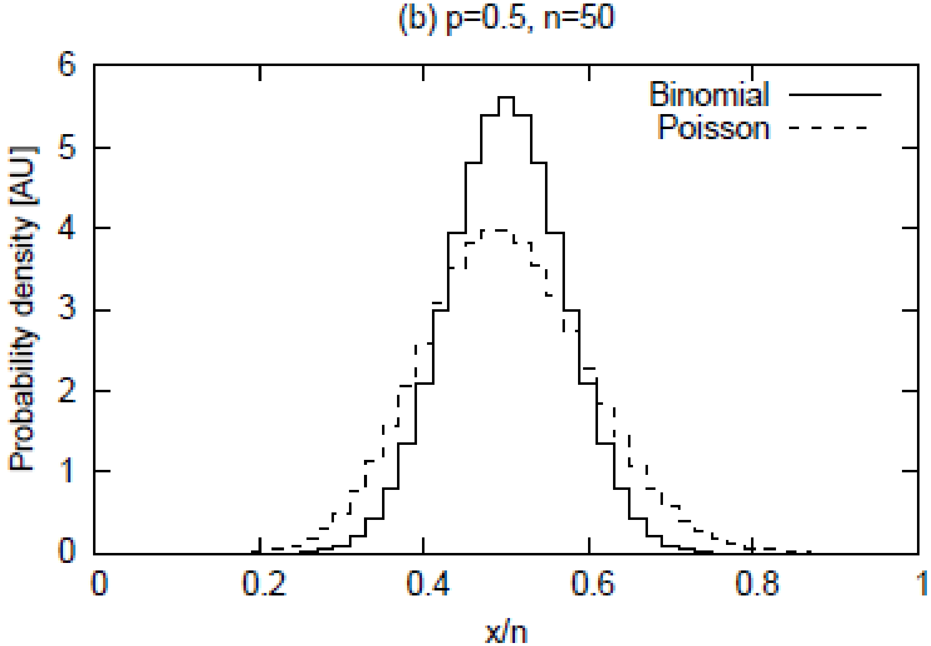
二項分布とポアソン分布（n ＝ 20のとき）

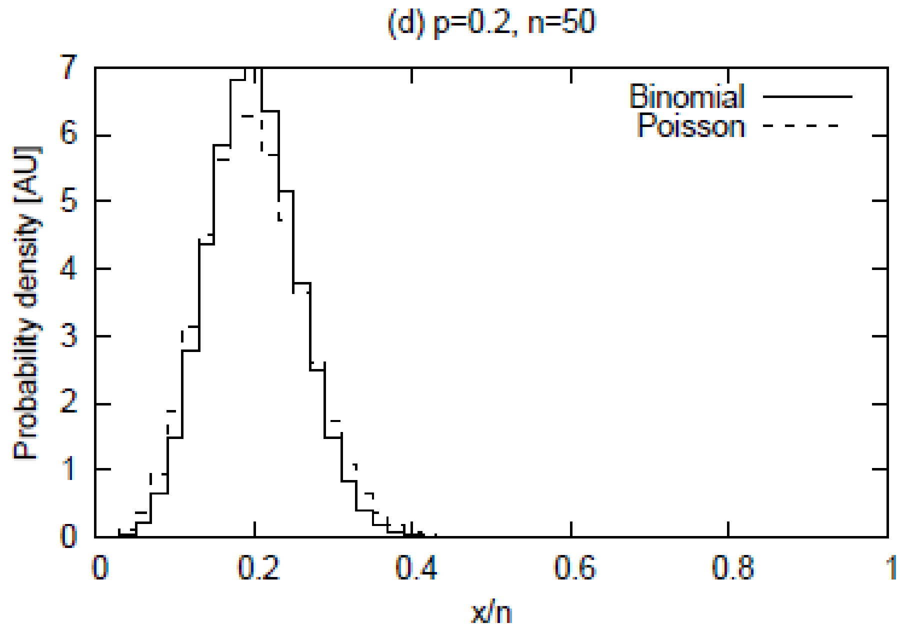


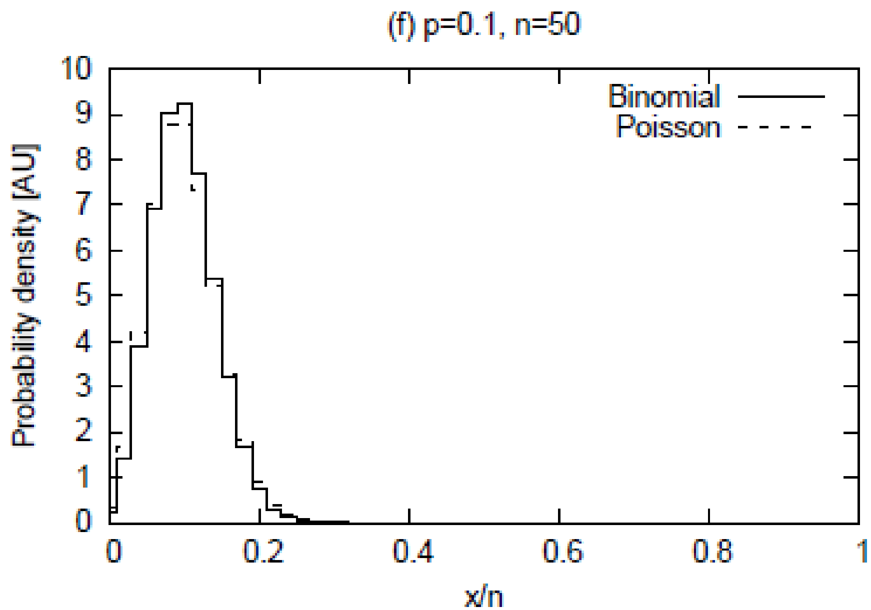




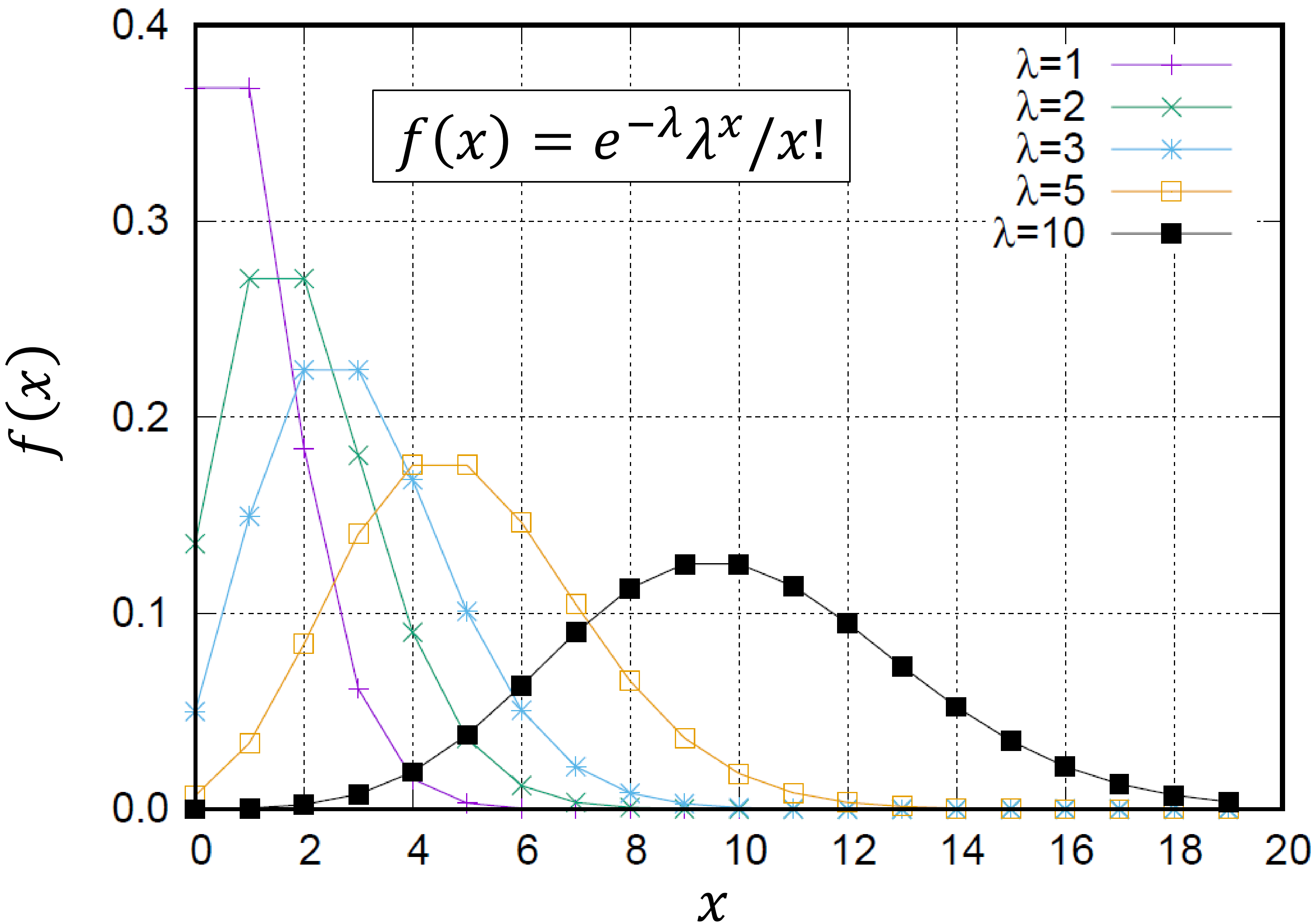
二項分布とポアソン分布（n = 50のとき）







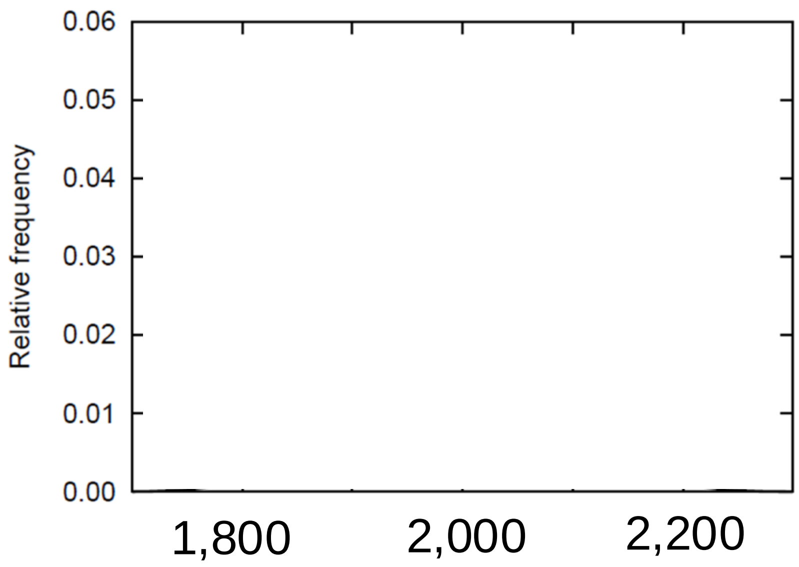
ポアソン分布の特徴



ポアソン分布に従う確率変数は平均値と分散が等しい。

測定するということ

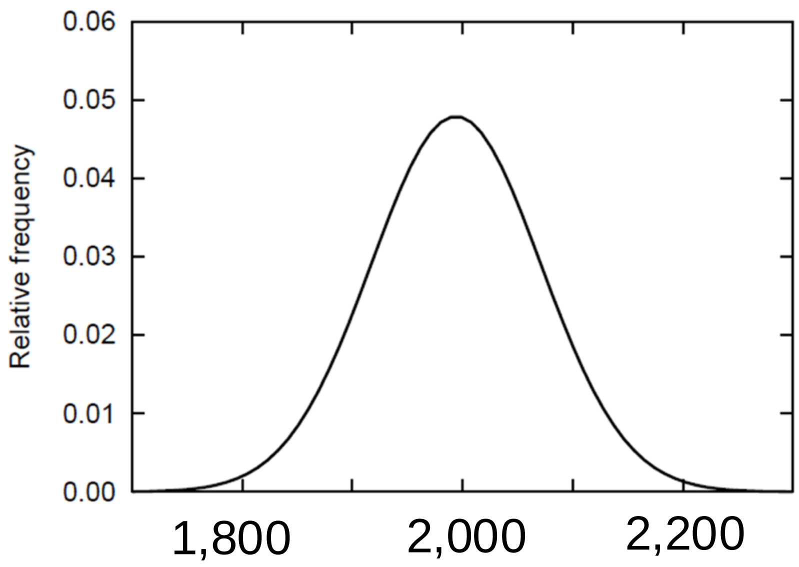
1回目：1,912



1回の測定により1,912という値が得られたとしたとき、それがどの程度の「不確かさ」を持っているかを知りたいものとする。

測定するということ

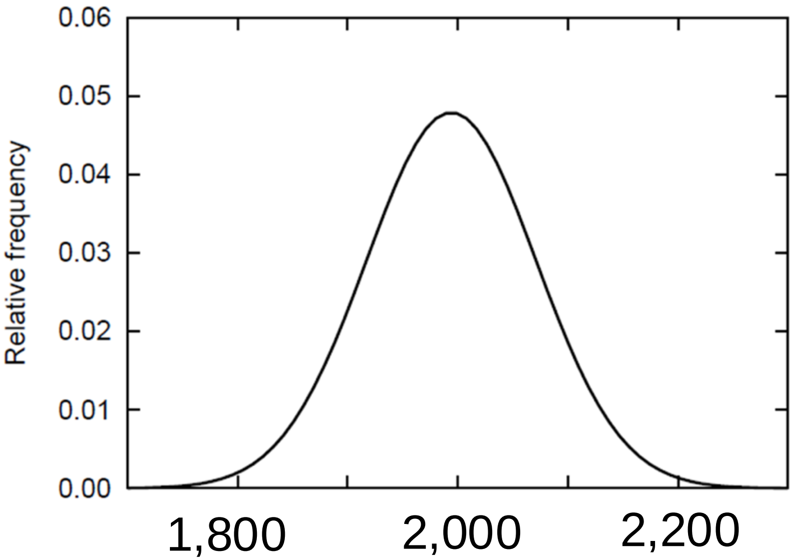
1回目:1,912



1回の測定により1,912という値が得られたとしたとき、それがどの程度の「不確かさ」を持っているかを知りたいものとする。
それは、測定対象とした確率変数の「母分布」の分散(母分散)が分かればよいであろう。

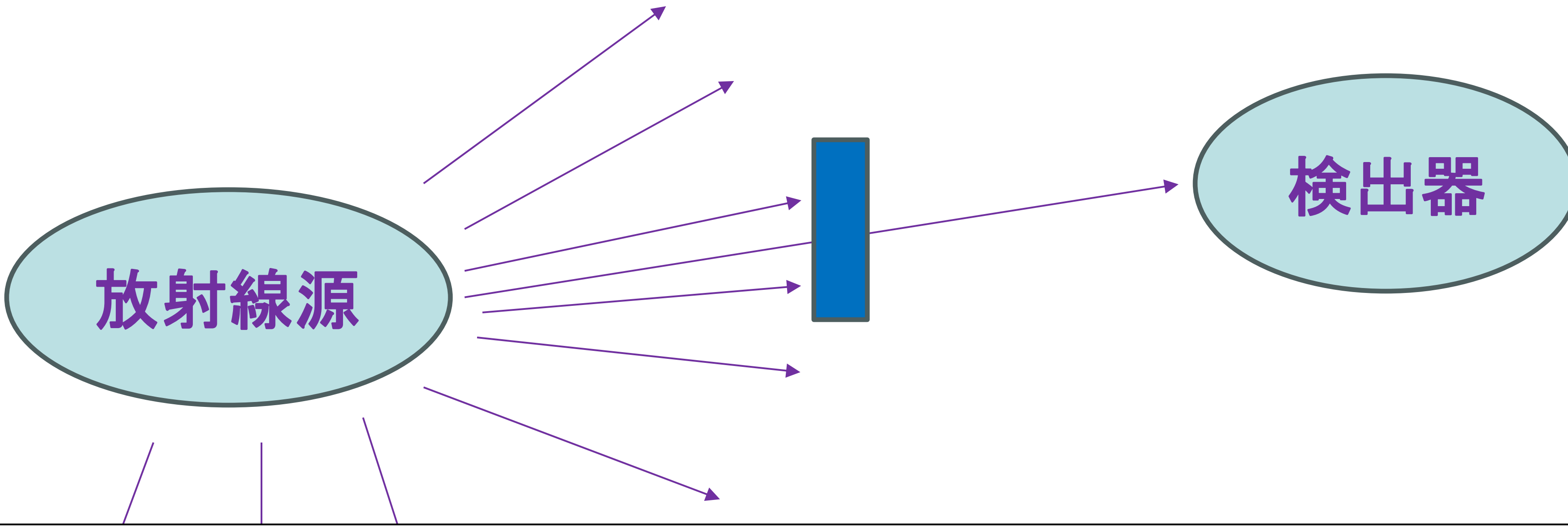
測定するということ

１回目：1,912
２回目：2,030
３回目：2,198



複数の標本を得ることができれば、母分散を推定することが可能である。

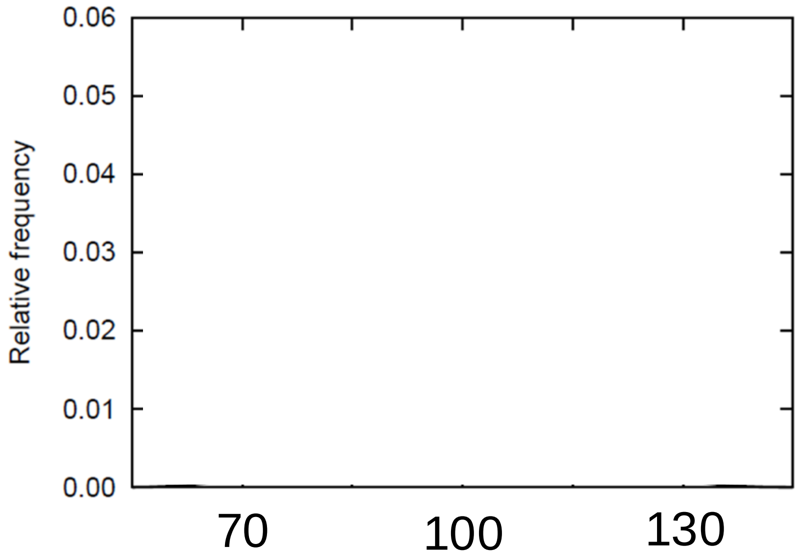
ポアソン分布



確率変数「ある時間内での、放射線源に含まれる不安定原子核が崩壊して放射線を放出し、それが物質を透過し、最終的に検出器で検知される回数」がポアソン分布に従うことが分かっていれば、例えばこの確率変数の標本として100が得られたとき、平均値を100程度と見做すことで、分散も100程度（標準偏差が10程度）と推定できる。

標本平均による母平均の推定

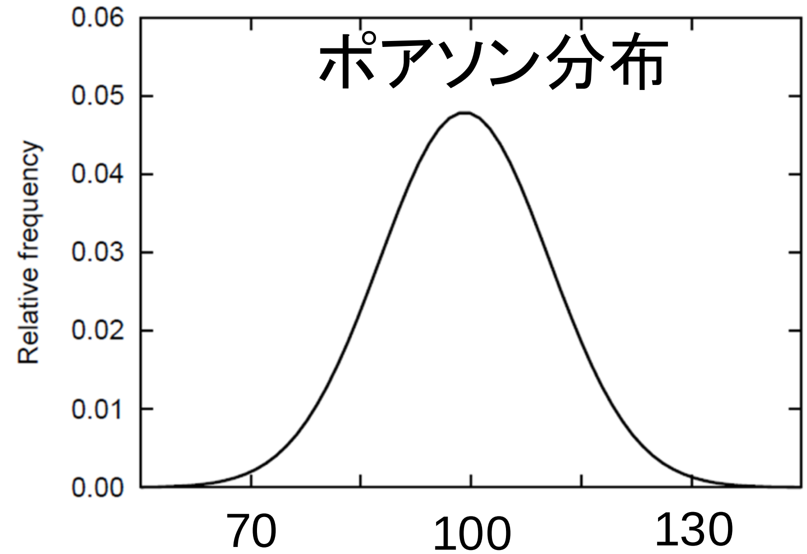
100



「放射線検出回数」として100が測定により得られたとする。

標本平均による母平均の推定

100



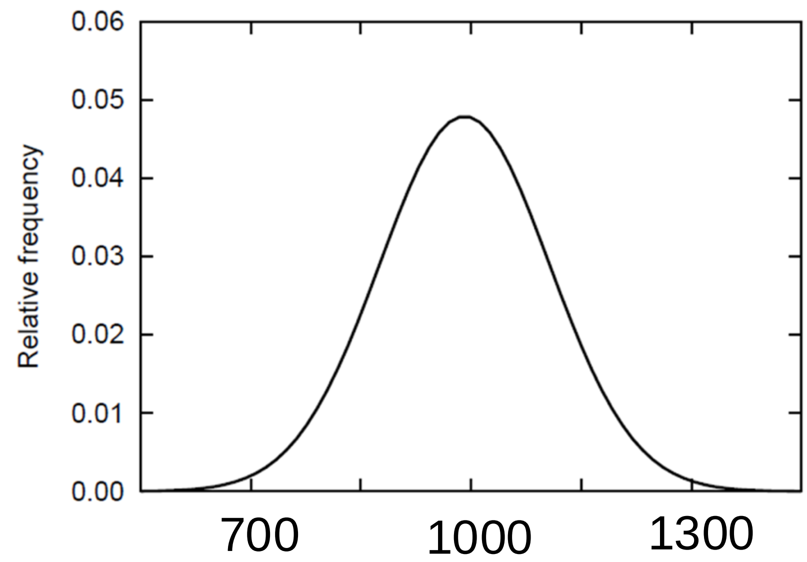
この測定条件下での「放射線検出回数」は、平均100、標準偏差10程度の確率変数であると大雑把に推定できる。標準偏差は相対値で10%程度となるので、もっと精度の高いデータを得たいならば、放射線検出回数をより大きくできる条件で測定すればよい。

標本平均による母平均の推定

1000

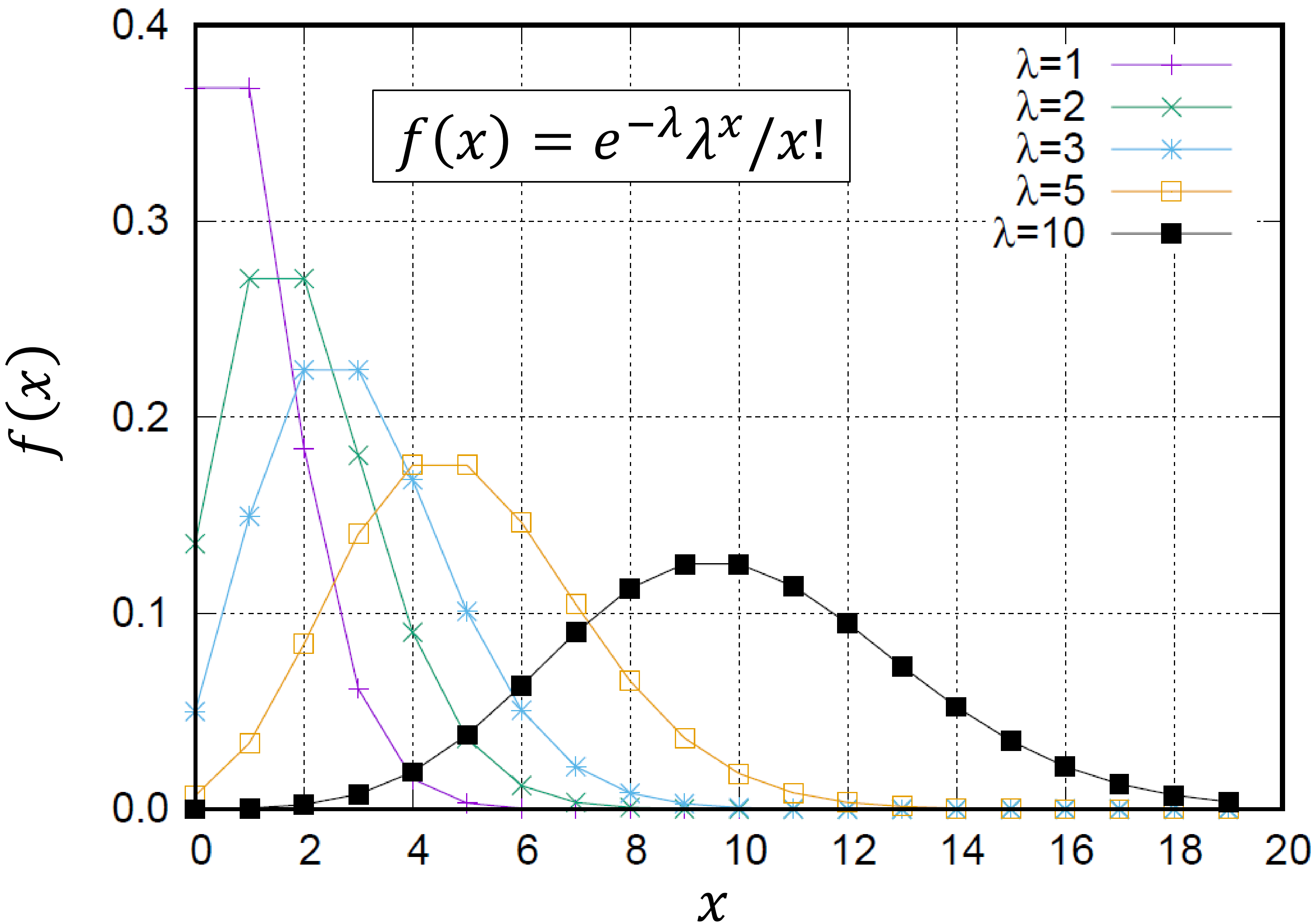
↓

標準偏差は$\sqrt{1000} = 31.6$となり、
相対値で3%程度に縮小される。



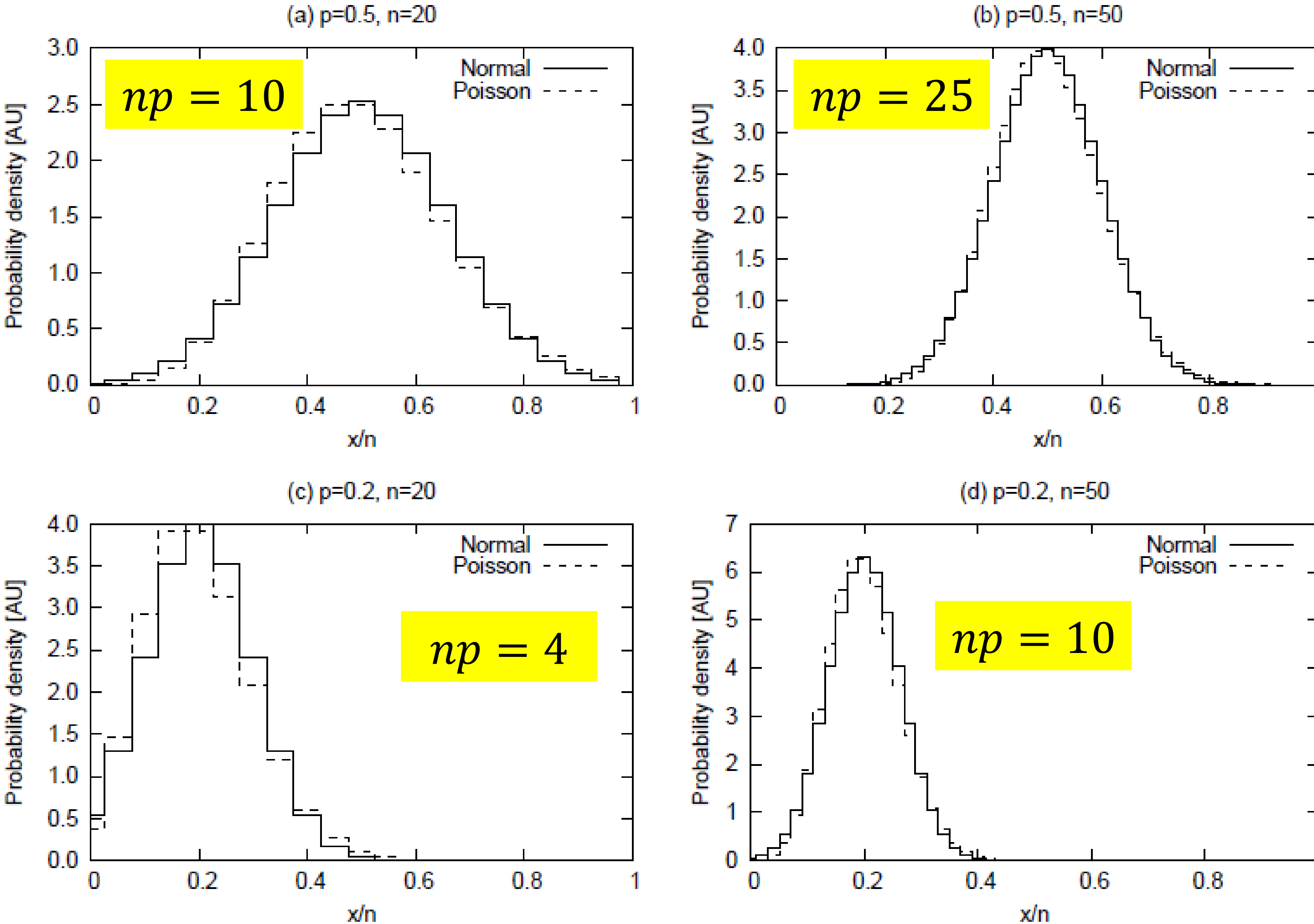
この測定条件下での「放射線検出回数」は、平均100、標準偏差10程度の確率変数であると大雑把に推定できる。標準偏差は相対値で10%程度となるので、もっと精度の高いデータを得たいならば、放射線検出回数をより大きくできる条件で測定すればよい。

ポアソン分布と正規分布

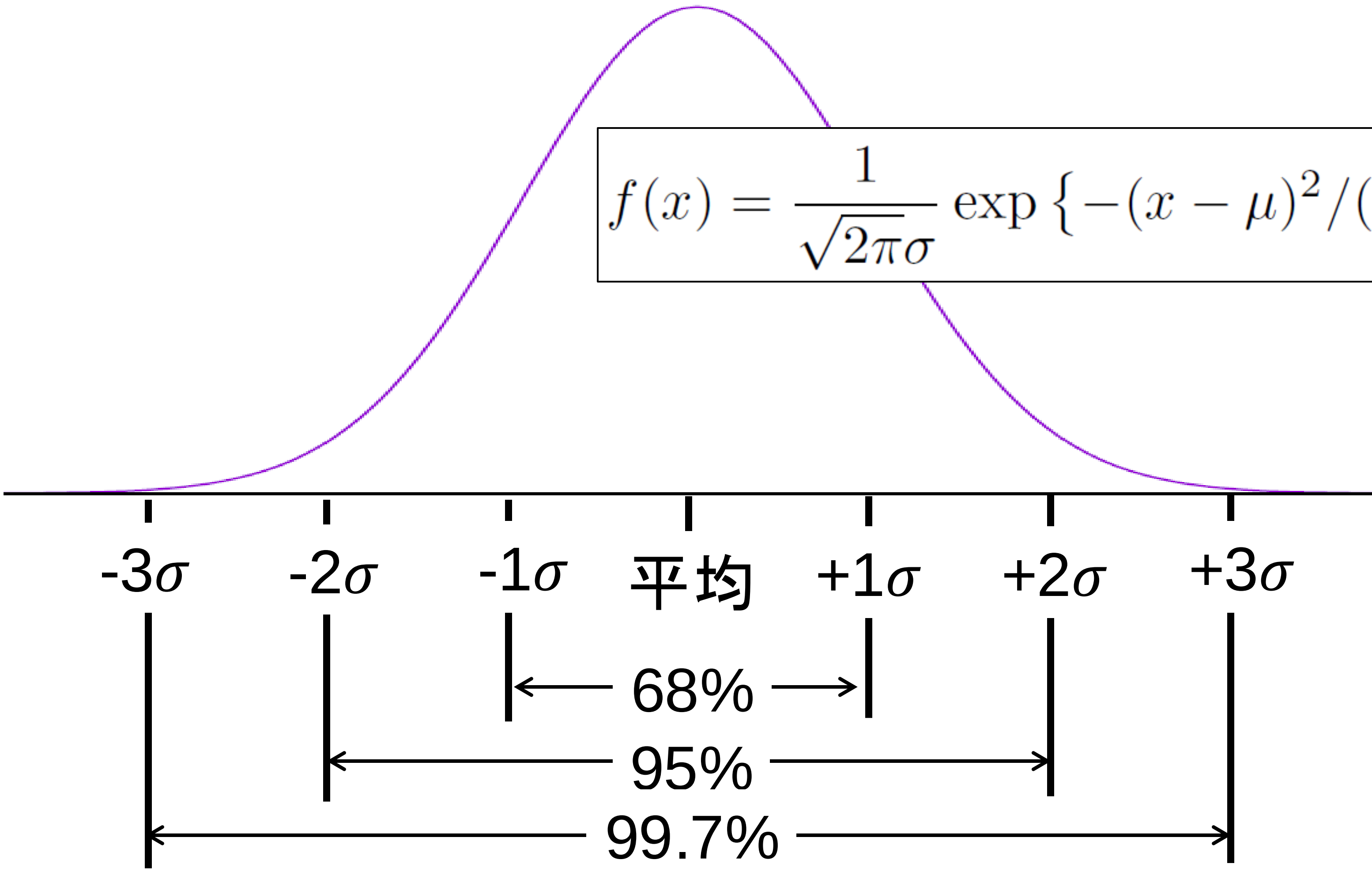


平均値が大きいポアソン分布は正規分布と一致する。

ポアソン分布と正規分布



正規分布

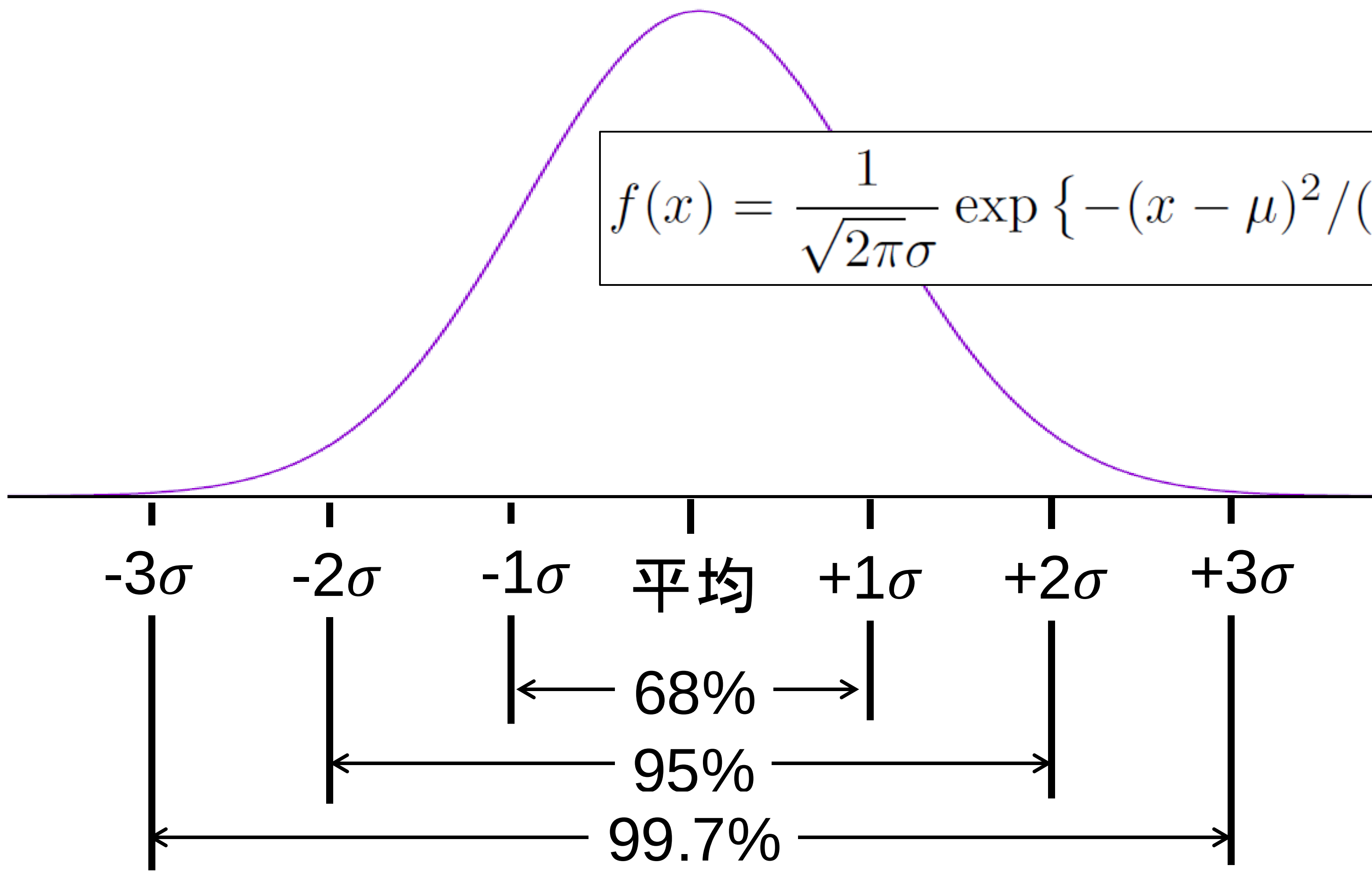


$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)\right\}$$

正規分布に従う確率変数について標本をランダムに抽出したとき、平均値からのずれが標準偏差以内となる確率は68%である。

正規分布

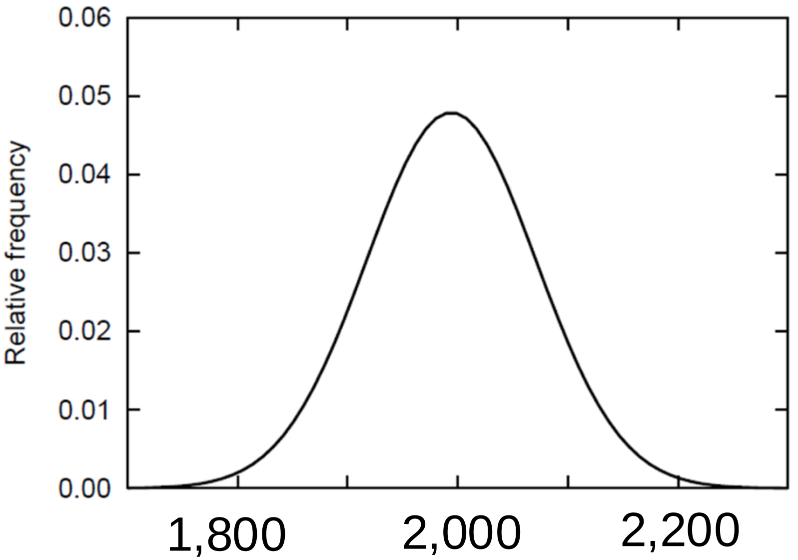
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)\right\}$$



平均値が大きいポアソン分布に従う確率変数の標本について、
平均値からのずれが標準偏差以内となる確率は68%である。

測定するということ

1回目：1,912
2回目：2,030
3回目：2,198



平均2,000、標準偏差100の正規分布に従う母分布から、例えば1,500が標本として抽出される確率はほぼゼロである。

測定するということ

１回目：1,500
２回目：2,030
３回目：2,198

← ポアソン分布に従うことが分かっている母分布

測定対象となる変数がポアソン分布に従っているということが分かっていれば、このような測定結果が得られることは確率的にはあり得ない。このような場合には、測定の手続きや測定機器に何かしらの問題がある可能性が高い。

出典一覧

No.	ライセンス	出典情報
【1】	‡	日本原子力文化財団「原子力・エネルギー図面集」