中性子拡散方程式の導入

臨界状態における中性子のバランス式

エネルギー1群近似を導入したとき、臨界状態にある**無限の大きさの**均質媒質からなる核分裂増倍系では以下の中性子数に関するバランス式が成り立つ:

$$\underbrace{\Sigma_a \phi}_{\text{中性子吸収反応率}} = \underbrace{\nu \Sigma_f \phi}_{\text{中性子生成率}}$$

中性子吸収反応率
（単位時間・単位体積あたりの中性子吸収反応数）

中性子生成率
（単位時間・単位体積あたりの核分裂による中性子生成数）

「中性子の吸収」と「生成」が釣り合っている状態

臨界状態における中性子のバランス式

エネルギー1群近似を導入したとき、臨界状態にある**有限の大きさの**均質媒質からなる核分裂増倍系では以下の中性子数に関するバランス式が成り立つ：

$$\text{（体系からの漏れ）} + \underline{\Sigma_a \phi} = \underline{\nu \Sigma_f \phi}$$

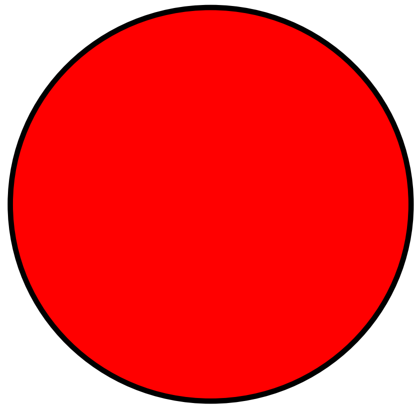
中性子吸収反応率
（単位時間・単位体積あたりの中性子吸収反応数）

中性子生成率
（単位時間・単位体積あたりの核分裂による中性子生成数）

「中性子の吸収＋漏れ」と「生成」が釣り合っている状態

有限体積での中性子のバランス式

以下で示す有限体積における中性子バランスを考える。



この領域の体積積分を$\int_V d\vec{r}$と記述するならば、バランス式は以下のように書ける。

$$L + \int_V \Sigma_a \phi(\vec{r}) d\vec{r} = \int_V \nu \Sigma_f \phi(\vec{r}) d\vec{r}$$

体系からの漏れ

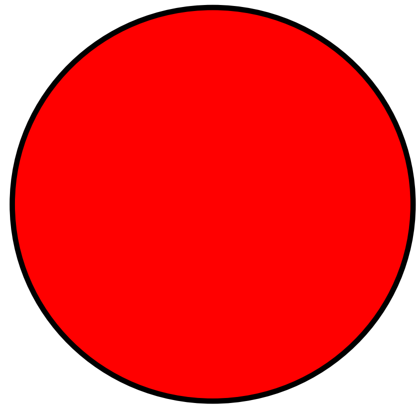
中性子吸収率

中性子生成率

有限体積での中性子のバランス式

以下で示す有限体積における中性子バランスを考える。

以降では、この有限体積表面からの中性子の漏れについて考える。



この領域の体積積分を$\int_V d\vec{r}$と記述するならば、バランス式は以下のように書ける。

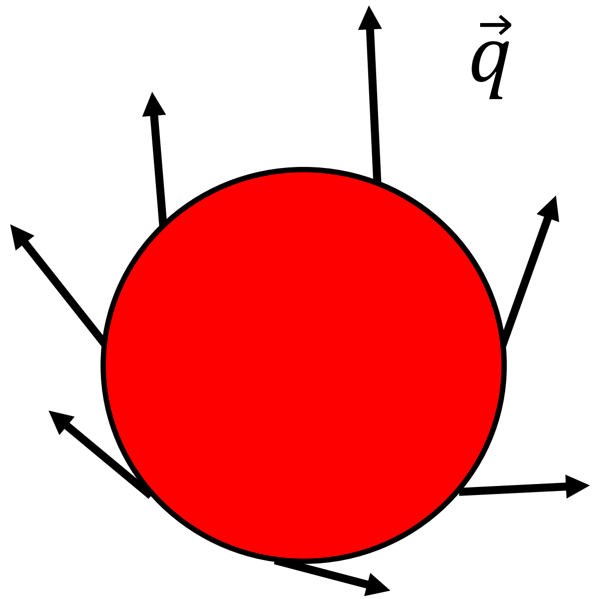
$$L + \int_V \Sigma_a \phi(\vec{r}) d\vec{r} = \int_V \nu \Sigma_f \phi(\vec{r}) d\vec{r}$$

体系からの漏れ

中性子吸収率

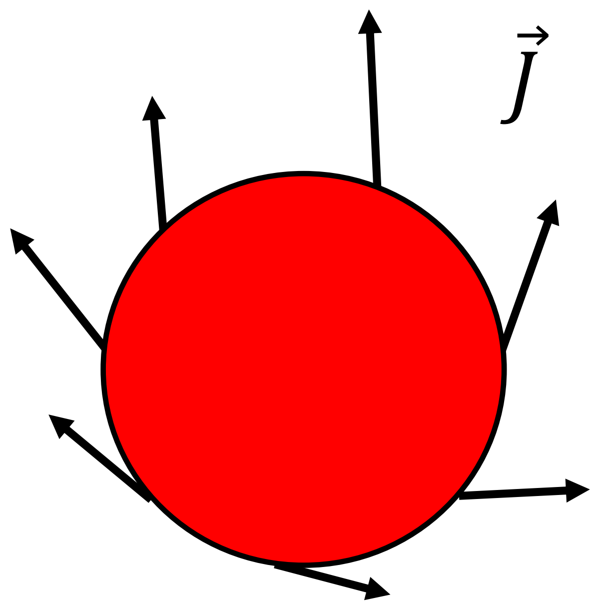
中性子生成率

熱流束による領域表面からの熱の漏れの定量化



各位置における、熱量の正味の流れを記述するパラメータとして、熱流束$\vec{q}$がある。
熱流束$\vec{q}$はベクトル量であり、その大きさは、「それと直交する平面での単位面積あたり、単位時間あたりの熱量の正味の移動量」として定義される。

中性子流による領域表面からの中性子の漏れの定量化

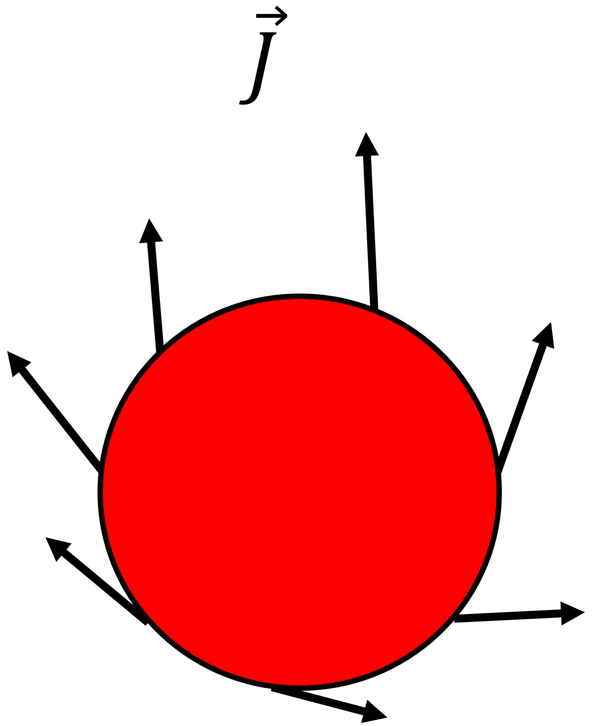


各位置における、中性子の正味の流れを記述するパラメータとして、中性子流$\vec{J}$がある。

中性子流$\vec{J}$はベクトル量であり、その大きさは、「それと直交する平面での単位面積あたり、単位時間あたりの中性子の正味の移動量」として定義される。

中性子流による領域表面からの中性子の漏れの定量化

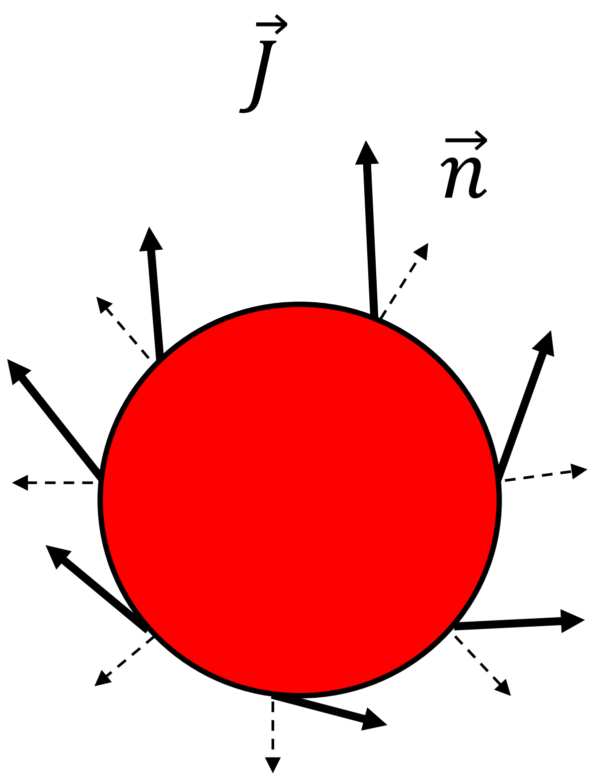
領域表面での中性子流が以下のように与えられたとき、領域表面からの中性子の漏れはどのように定量化できるか？



中性子流による領域表面からの中性子の漏れの定量化

領域表面での中性子流が以下のように与えられたとき、領域表面からの中性子の漏れはどのように定量化できるか？

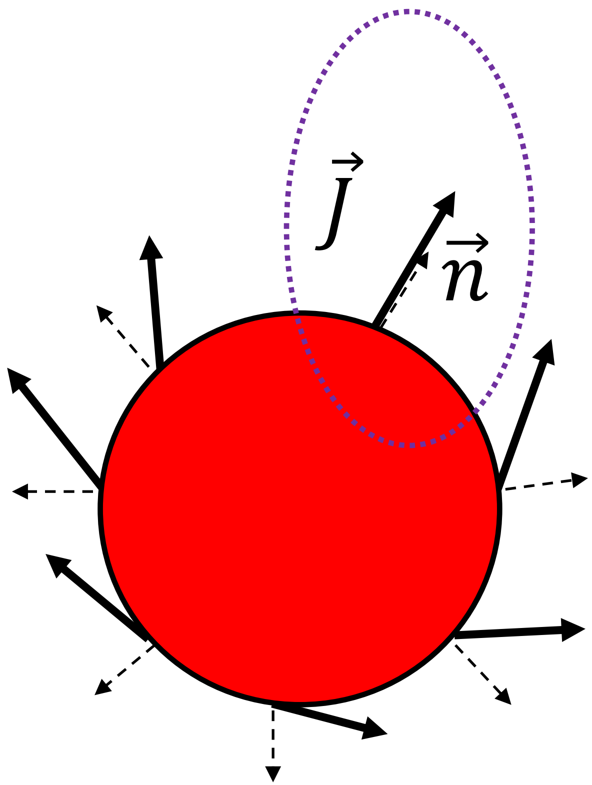
→ 領域表面の法線ベクトル$\vec{n}$との関係が大きく関わる。



中性子流による領域表面からの中性子の漏れの定量化

領域表面での中性子流が以下のように与えられたとき、領域表面からの中性子の漏れはどのように定量化できるか？

→ 領域表面の法線ベクトル$\vec{n}$との関係が大きく関わる。

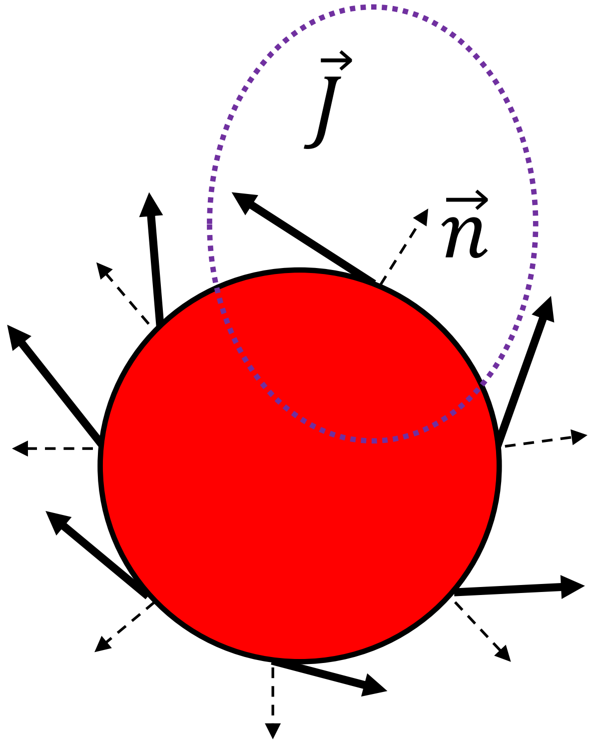


例えば、$\vec{J}$と$\vec{n}$とが同一の方向を向いている場合には、定義より、この位置から漏れる正味の中性子数は$|\vec{J}|$となる。

中性子流による領域表面からの中性子の漏れの定量化

領域表面での中性子流が以下のように与えられたとき、領域表面からの中性子の漏れはどのように定量化できるか？

→ 領域表面の法線ベクトル$\vec{n}$との関係が大きく関わる。

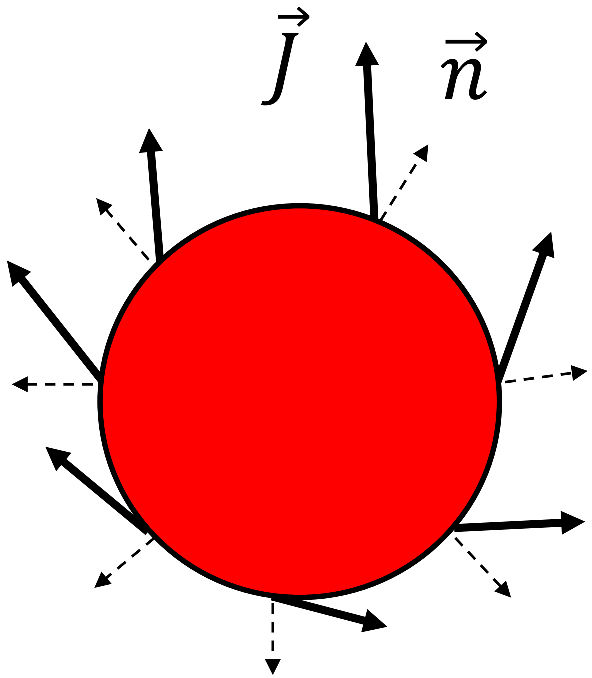


例えば、$\vec{J}$と$\vec{n}$とが直交する場合には、この位置から漏れる正味の中性子数はゼロとなる。

中性子流による領域表面からの中性子の漏れの定量化

領域表面での中性子流が以下のように与えられたとき、領域表面からの中性子の漏れはどのように定量化できるか？

→ 領域表面の法線ベクトル$\vec{n}$との関係が大きく関わる。

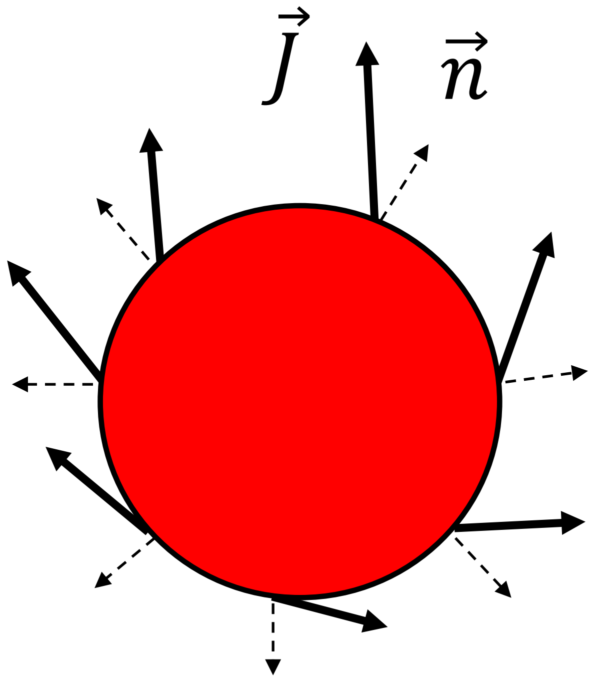


領域表面での正味の中性子の漏れは、$\vec{J}\cdot\vec{n}$として記述される。

中性子流による領域表面からの中性子の漏れの定量化

領域表面での中性子流が以下のように与えられたとき、領域表面からの中性子の漏れはどのように定量化できるか？

→ 領域表面の法線ベクトル$\vec{n}$との関係が大きく関わる。

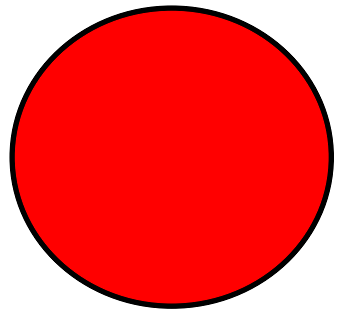


領域表面での正味の中性子の漏れは、$\vec{J}\cdot\vec{n}$として記述される。

この領域の全表面での正味の中性子の漏れは、表面積分を$\int \quad dS$と記述すると$\int \quad \vec{J}(\vec{r})\cdot\vec{n}\,dS$と記述される。

有限体積での中性子のバランス式

以下で示す有限体積における中性子バランスを考える。



この領域の体積積分を$\int_V \ d\vec{r}$、表面積分を$\int \ \ dS$と記述するならば、バランス式は以下のように書ける。

$$\int \ \vec{J}(\vec{r}) \cdot \vec{n} dS + \int_V \ \Sigma_a \phi(\vec{r}) d\vec{r} \ = \int_V \ \nu \Sigma_f \phi(\vec{r}) d\vec{r}$$

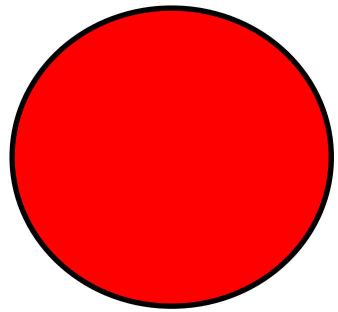
体系からの漏れ

中性子吸収率

中性子生成率

有限体積での中性子のバランス式

以下で示す有限体積における中性子バランスを考える。



この領域の体積積分を$\int_V d\vec{r}$、表面積分を$\int dS$と記述するならば、バランス式は以下のように書ける。

$$\int \vec{J}(\vec{r}) \cdot \vec{n} dS + \int_V \Sigma_a \phi(\vec{r}) d\vec{r} = \int_V \nu \Sigma_f \phi(\vec{r}) d\vec{r}$$

表面積分　　**体積積分**　　**体積積分**

中性子拡散方程式の導出

ガウスの発散定理により、表面積分を体積積分に変換する。

$$\int \vec{J}(\vec{r}) \cdot \vec{n} dS \Rightarrow \int_V \boxed{\nabla \cdot \vec{J}(\vec{r})} d\vec{r}$$

$\nabla \cdot \vec{J}$:
ベクトル場$\vec{J}$の発散（divergent）でスカラー量。
$\mathrm{div}\,\vec{J}$とも書く。
$\vec{J} = (J_x, J_y, J_z)$のとき、$\nabla \cdot \vec{J} = \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial z}$

中性子拡散方程式の導出

ガウスの発散定理により、表面積分を体積積分に変換する。

$$\int \vec{J}(\vec{r}) \cdot \vec{n} dS \Rightarrow \int_V \nabla \cdot \vec{J}(\vec{r}) d\vec{r}$$

$$\int_V \nabla \cdot \vec{J}(\vec{r}) d\vec{r} + \int_V \Sigma_a \phi(\vec{r}) d\vec{r} = \int_V \nu \Sigma_f \phi(\vec{r}) d\vec{r}$$

体積積分　体積積分　体積積分

中性子拡散方程式の導出

ガウスの発散定理により、表面積分を体積積分に変換する。

$$\int \vec{J}(\vec{r}) \cdot \vec{n} dS \Rightarrow \int_V \nabla \cdot \vec{J}(\vec{r}) d\vec{r}$$

$$\int_V \nabla \cdot \vec{J}(\vec{r}) d\vec{r} + \int_V \Sigma_a \phi(\vec{r}) d\vec{r} = \int_V \nu \Sigma_f \phi(\vec{r}) d\vec{r}$$

$$\Downarrow$$

$$\nabla \cdot \vec{J}(\vec{r}) + \Sigma_a \phi(\vec{r}) = \nu \Sigma_f \phi(\vec{r})$$

中性子拡散方程式の導出

ガウスの発散定理により、表面積分を体積積分に変換する。

$$\int \vec{J}(\vec{r}) \cdot \vec{n} dS \Rightarrow \int_V \nabla \cdot \vec{J}(\vec{r}) d\vec{r}$$

$$\int_V \nabla \cdot \vec{J}(\vec{r}) d\vec{r} + \int_V \Sigma_a \phi(\vec{r}) d\vec{r} = \int \nu \Sigma_f \phi(\vec{r}) d\vec{r}$$

中性子束ϕと中性子流$\vec{J}$の2つの物理量が満足する式となっている。

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{J}(\vec{r}) + \Sigma_a \phi(\vec{r}) = \nu \Sigma_f \phi(\vec{r})}$$

中性子拡散方程式の導出

フィックの法則により、中性子流$\vec{J}$と中性子束ϕを以下のように関係付ける（これは近似的扱いである）。

$$\vec{J}(\vec{r}) = -D\nabla\phi(\vec{r})$$

拡散係数

$\nabla\phi$：
スカラー場ϕの勾配（gradient）でベクトル量。
$\mathrm{grad}\ \phi$とも書く。
xyz座標系では、$\nabla\phi = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z}\right)$

中性子拡散方程式の導出

フィックの法則により、中性子流$\vec{J}$と中性子束ϕを以下のように関係付ける（これは近似的扱いである）。

$$\vec{J}(\vec{r}) = -D\nabla\phi(\vec{r})$$

$$\nabla \cdot \vec{J}(\vec{r}) + \Sigma_a\phi(\vec{r}) = \nu\Sigma_f\phi(\vec{r})$$

$$\Downarrow$$

$$-D\nabla^2\phi(\vec{r}) + \Sigma_a\phi(\vec{r}) = \nu\Sigma_f\phi(\vec{r})$$

中性子拡散方程式

中性子拡散方程式の導出

フィックの法則により、中性子流$\vec{J}$と中性子束ϕを以下のように関係付ける（これは近似的扱いである）。

$$\vec{J}(\vec{r}) = -D\nabla\phi(\vec{r})$$

$$\nabla \cdot \vec{J}(\vec{r}) + \Sigma_a\phi(\vec{r}) = \nu\Sigma_f\phi(\vec{r})$$

$$\Downarrow$$

$$-D\nabla^2\phi(\vec{r}) + \Sigma_a\phi(\vec{r}) = \nu\Sigma_f\phi(\vec{r})$$

$$\nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$$

臨界状態での一次元中性子拡散方程式

以降では、単一媒質で構成される一次元平板の増倍系を考える。

$$\phi(0) = 0$$

$$\phi(X) = 0$$

臨界状態での一次元中性子拡散方程式

一次元平板における中性子拡散方程式

$$-D\frac{d^2\phi(x)}{dx^2}+\Sigma_a\phi(x)=\nu\Sigma_f\phi(x)$$

ϕ :中性子束[/cm²/s]
Σ_a : 巨視的中性子吸収断面積[/cm]
ν :核分裂あたりの平均中性子発生数
Σ_f :巨視的中性子核分裂断面積[/cm]
D :拡散係数[cm]

$\Sigma\phi$:反応率[/cm³/s]
毎秒・単位体積あたりに起こっている反応数

臨界状態での一次元中性子拡散方程式

一次元平板における中性子拡散方程式

$$\underbrace{-D\frac{d^2\phi(x)}{dx^2}+\Sigma_a\phi(x)}_{\text{損失}}=\underbrace{\nu\Sigma_f\phi(x)}_{\text{生成}}$$

損失

生成

中性子漏洩率

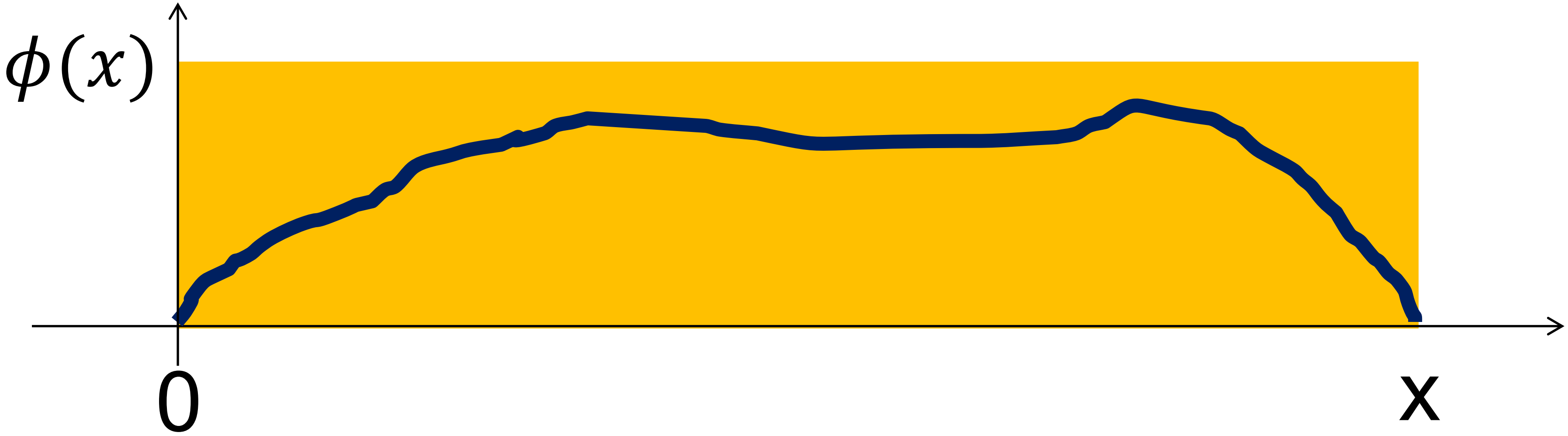
D: 拡散係数（後述）

中性子吸収率
（位置xにおける単位時間・単位体積あたりの中性子吸収反応数）

中性子生成率
（位置xにおける単位時間・単位体積あたりの核分裂による中性子生成数）

全ての位置xにおいて中性子の損失と生成が釣り合っている状態

臨界状態での一次元中性子拡散方程式



$$\phi(0) = 0 \qquad \phi(X) = 0$$

物理的に、中性子束は非負でなければならない。

臨界状態での一次元中性子拡散方程式

$$\phi(0) = 0 \qquad \phi(X) = 0$$

$$\boxed{-D\frac{d^2\phi(x)}{dx^2} + \Sigma_a\phi(x) = \nu\Sigma_f\phi(x)}$$

・このバランス式が体系の全ての位置xで成立する。
・この微分方程式を解くことにより、中性子束の空間分布$\phi(x)$を知ることが出来る。

拡散方程式の解

$\phi(0) = 0$ $\phi(X) = 0$

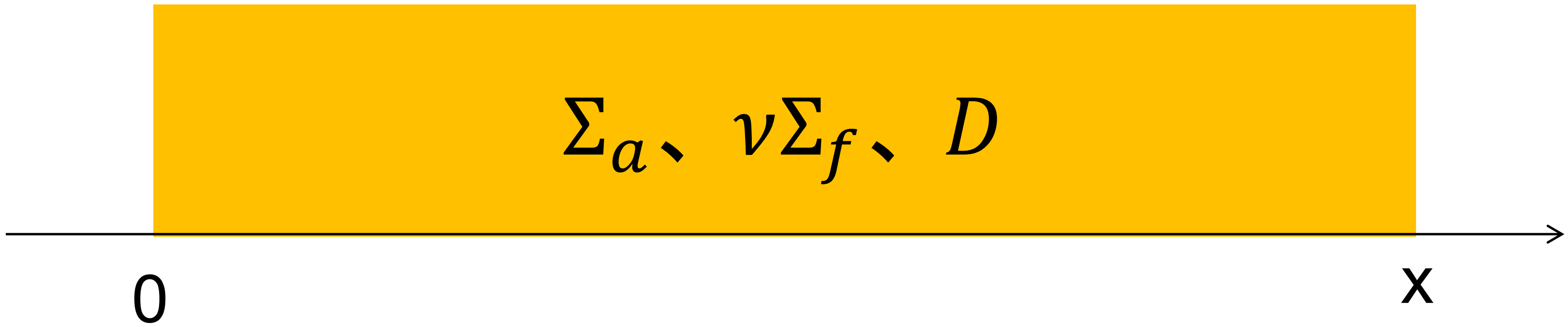
$$-D\frac{d^2\phi(x)}{dx^2} + \Sigma_a\phi(x) = \nu\Sigma_f\phi(x)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d^2\phi(x)}{dx^2} = \underline{\frac{\Sigma_a - \nu\Sigma_f}{D}}\phi(x)$$

これが正となるか負となるかで中性子束の空間分布$\phi(x)$は大きく異なる。

拡散方程式の解



$\phi(0) = 0$　　　　$\phi(X) = 0$

・ここで考えているのは臨界状態なので$k_{\mathrm{eff}} = 1.0$である。

・この媒質の無限増倍率k_∞は$\nu\Sigma_f/\Sigma_a$となることが分かっている。

・$k_\infty > k_{\mathrm{eff}}$なので、$k_\infty = \frac{\nu\Sigma_f}{\Sigma_a} > k_{\mathrm{eff}} = 1.0$、すなわち、この媒質で臨界となる増倍系が成立するためには$\frac{\nu\Sigma_f}{\Sigma_a} > 1.0$、つまり$\nu\Sigma_f > \Sigma_a$が成り立たなければならないことが分かる。

拡散方程式の解

$\phi(0) = 0$ $\qquad\qquad$ $\phi(X) = 0$

$$-D\frac{d^2\phi(x)}{dx^2} + \Sigma_a\phi(x) = \nu\Sigma_f\phi(x)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d^2\phi(x)}{dx^2} = \underline{\frac{\Sigma_a - \nu\Sigma_f}{D}}\phi(x)$$

$\nu\Sigma_f > \Sigma_a$であるので負となることが分かる。

拡散方程式の解

$\phi(0) = 0$ $\qquad$ $\phi(X) = 0$

$$-D\frac{d^2\phi(x)}{dx^2} + \Sigma_a\phi(x) = \nu\Sigma_f\phi(x)$$

$$\frac{d^2\phi(x)}{dx^2} = -B^2\phi(x)$$

$$B^2 = \frac{\nu\Sigma_f - \Sigma_a}{D}$$

拡散方程式の解

$\phi(0) = 0$　　　　　　　　　　　　$\phi(X) = 0$

$$\frac{d^2\phi(x)}{dx^2} = -B^2\phi(x)$$

- この式の一般解は、$\phi(x) = E \sin Bx + F \cos Bx$
- 境界条件$\phi(0) = 0$より、$F = 0$
- 境界条件$\phi(X) = 0$より、$BX = n\pi$

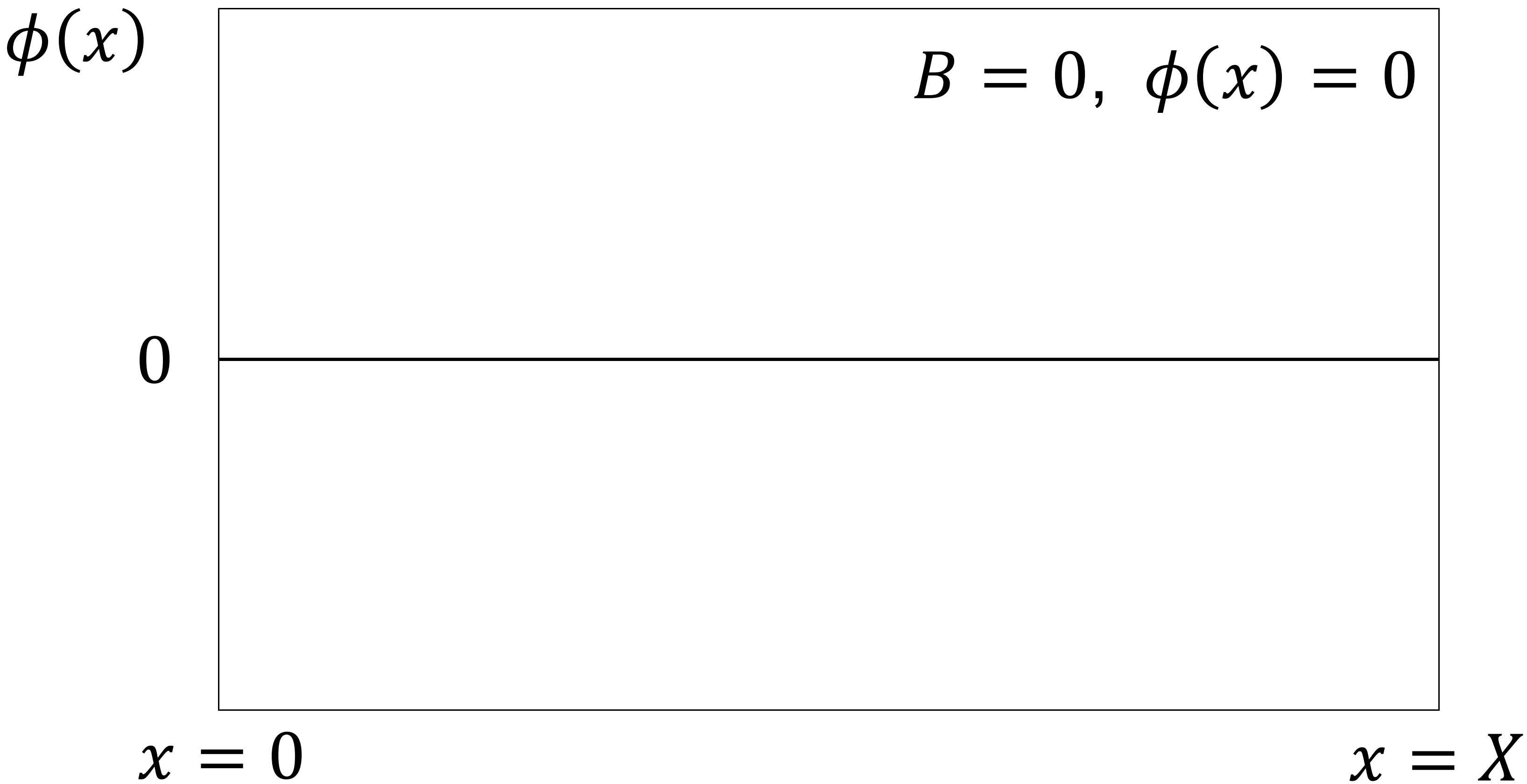
$\boxed{\phi(x) = E \sin Bx\text{、ただし}BX = n\pi\text{（}n\text{は整数）}}$

拡散方程式の解

$$\boxed{\phi(x) = E\sin Bx\text{、ただし}BX = n\pi\text{（}n\text{は整数）}}$$

$$B^2 = \frac{\nu\Sigma_f - \Sigma_a}{D}$$

$$n = 0$$

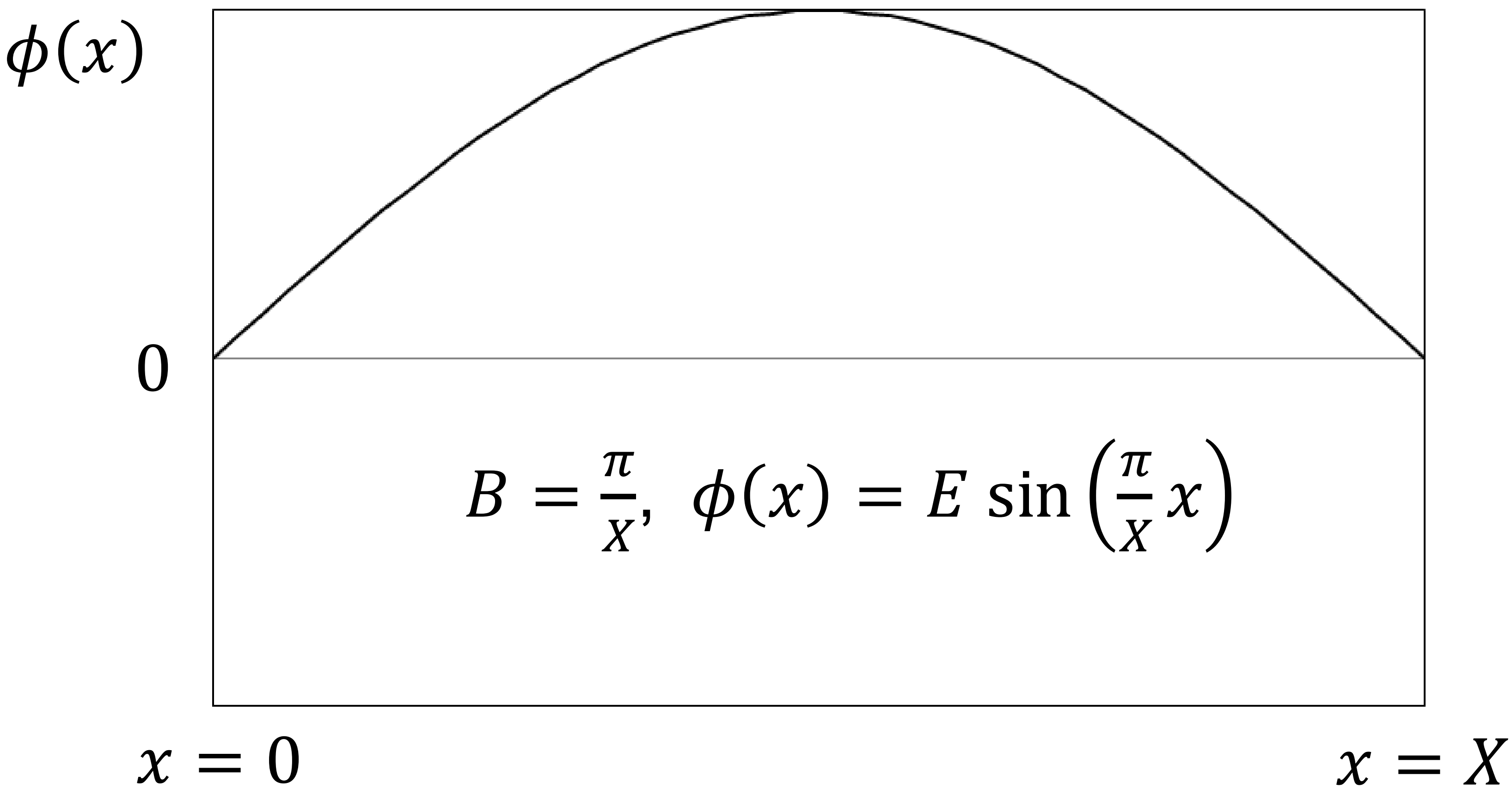


拡散方程式の解

$$\phi(x) = E\sin Bx、ただし BX = n\pi（n は整数）$$

$$B^2 = \frac{\nu\Sigma_f - \Sigma_a}{D}$$

$$n = 1$$



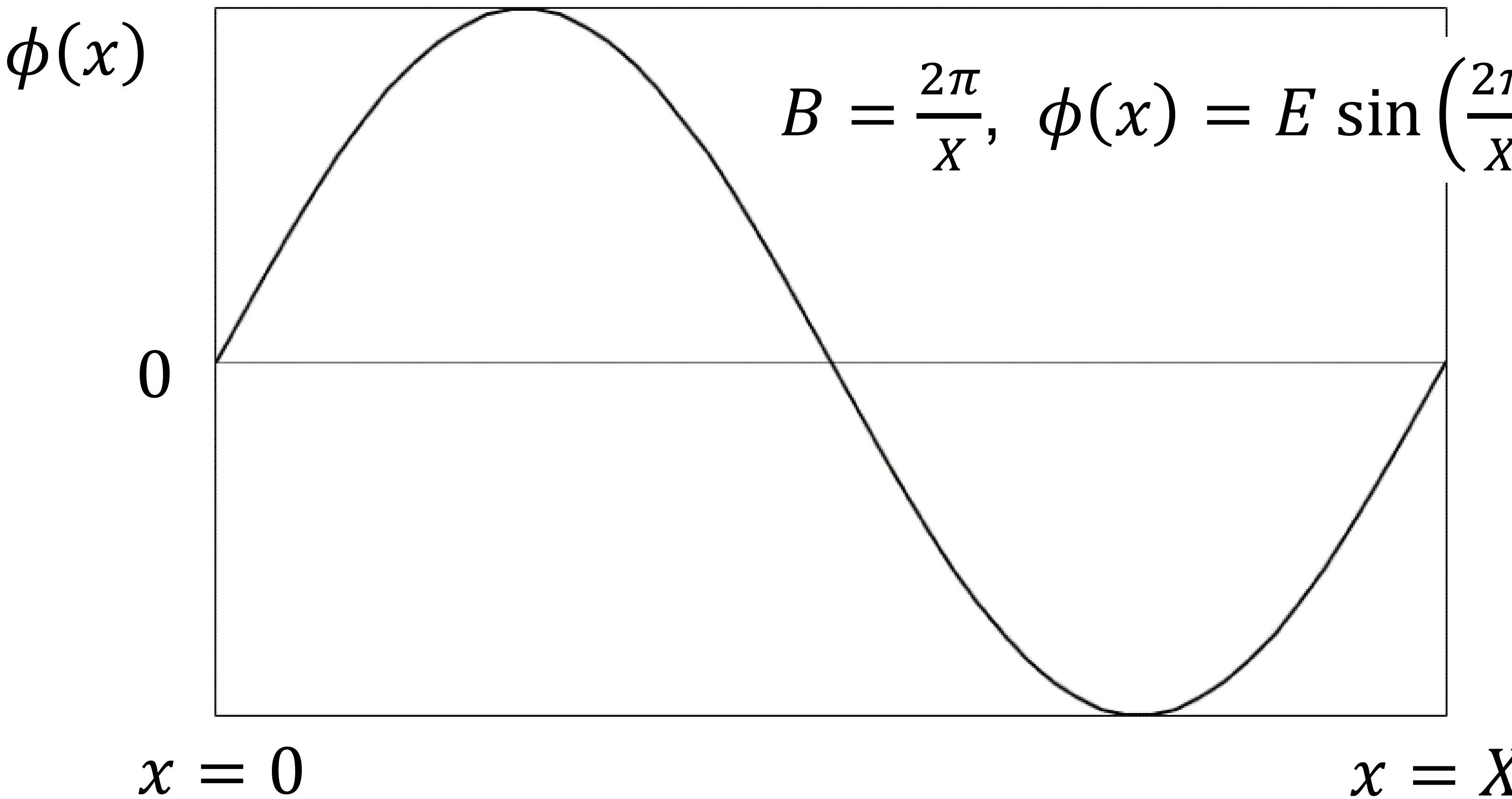
$$B = \frac{\pi}{X},\ \phi(x) = E\sin\left(\frac{\pi}{X}x\right)$$

拡散方程式の解

$$\phi(x) = E\sin Bx\text{、ただし}BX = n\pi\text{（}n\text{は整数）}$$

$$B^2 = \frac{\nu\Sigma_f - \Sigma_a}{D}$$

$$n = 2$$



$$B = \frac{2\pi}{X},\ \phi(x) = E\sin\left(\frac{2\pi}{X}x\right)$$

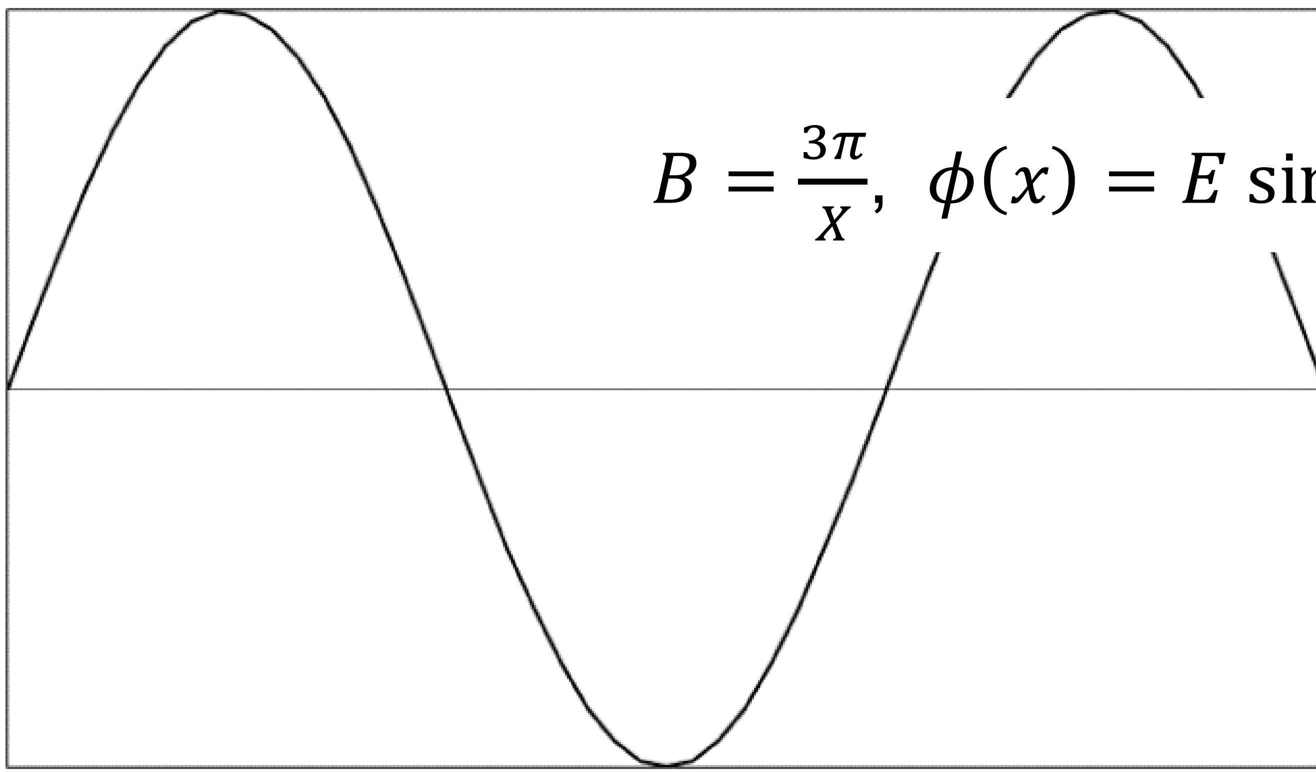
拡散方程式の解

$$\phi(x) = E\sin Bx\text{、ただし}BX = n\pi\text{（}n\text{は整数）}$$

$$B^2 = \frac{\nu\Sigma_f - \Sigma_a}{D}$$

$n = 3$

$\phi(x)$



$$B = \frac{3\pi}{X},\ \phi(x) = E\sin\left(\frac{3\pi}{X}x\right)$$

0

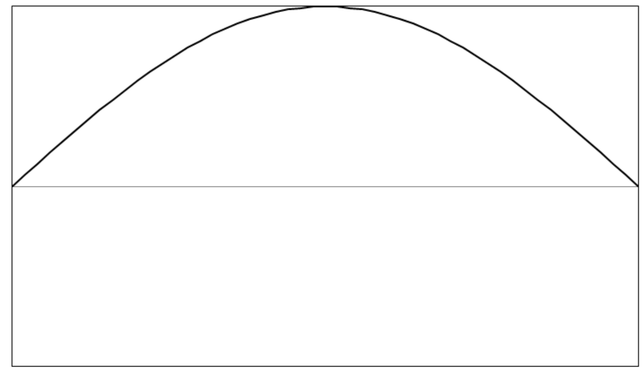
$x = 0$ $x = X$

拡散方程式の解

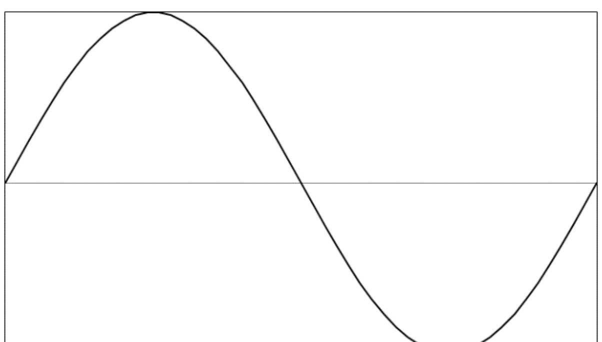
$$\phi(x) = E \sin Bx\text{、ただし}BX = n\pi\text{（}n\text{は整数）}$$

$B = 0\ (n = 0)$

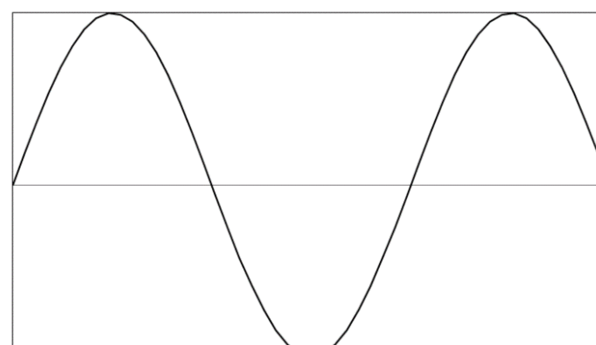
$B = \dfrac{\pi}{X}\ (n = 1)$



$B = \dfrac{2\pi}{X}\ (n = 2)$



$B = \dfrac{3\pi}{X}\ (n = 3)$

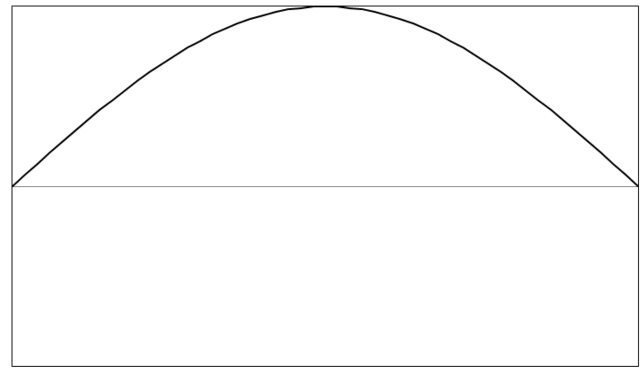


拡散方程式の解

$\phi(x) = E \sin Bx$、ただし$BX = n\pi$（nは整数）

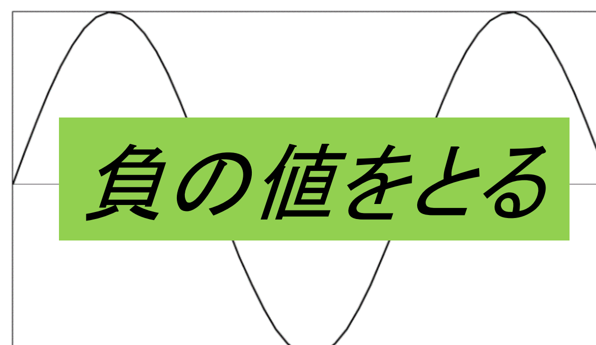
$B = 0 \ (n = 0)$

$B = \dfrac{\pi}{X} \ (n = 1)$



$B = \dfrac{2\pi}{X} \ (n = 2)$

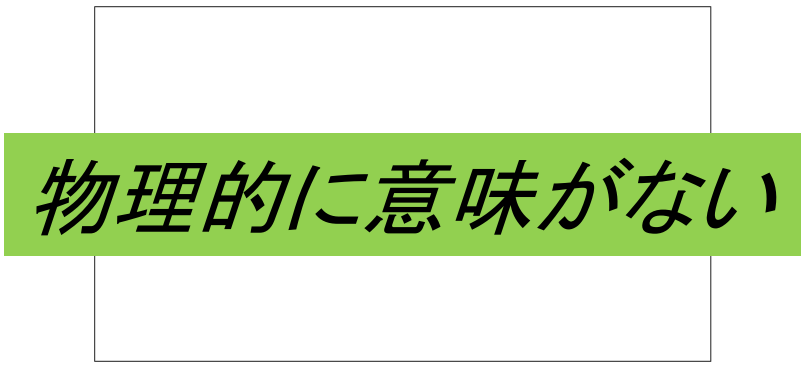
$B = \dfrac{3\pi}{X} \ (n = 3)$



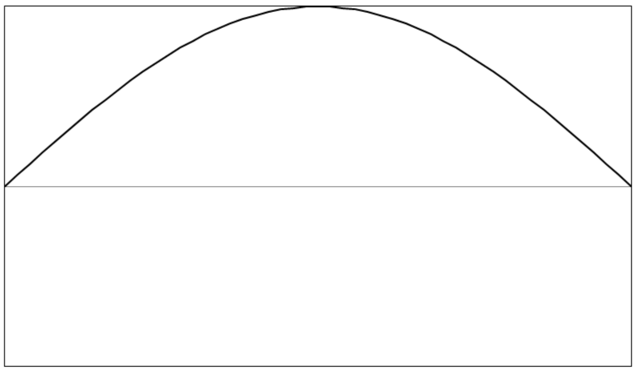
拡散方程式の解

$$\phi(x) = E \sin Bx$$、ただし$BX = n\pi$（nは整数）

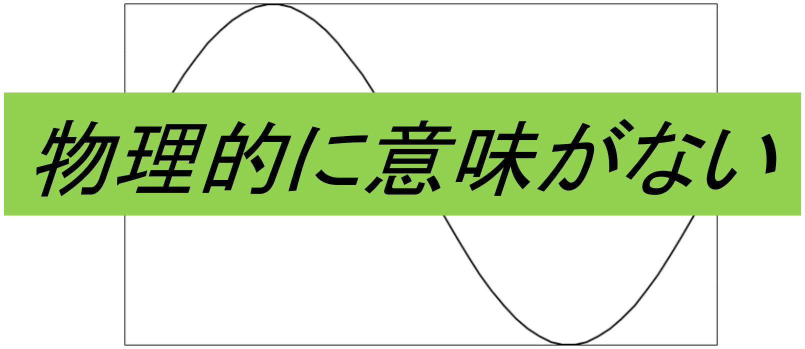
$B = 0\ (n = 0)$



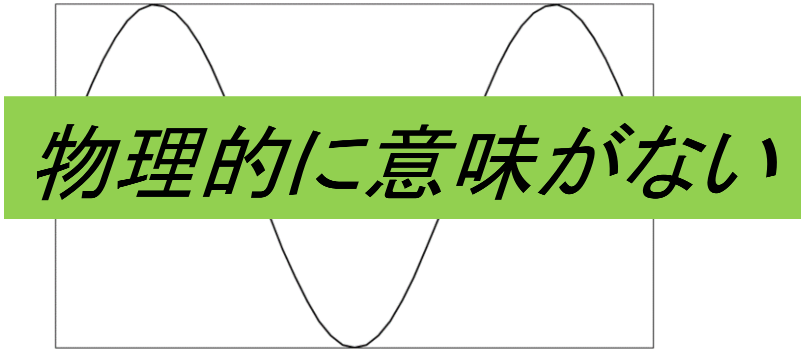
$B = \dfrac{\pi}{X}\ (n = 1)$



$B = \dfrac{2\pi}{X}\ (n = 2)$



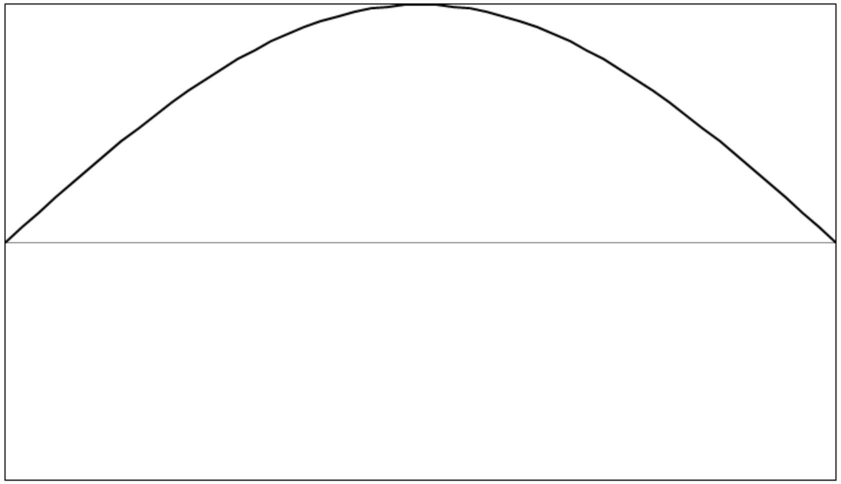
$B = \dfrac{3\pi}{X}\ (n = 3)$



拡散方程式の解

$\phi(x) = E \sin Bx$、ただし$BX = n\pi$（nは整数）

$$B = \frac{\pi}{X}\ (n = 1)$$



物理的に意味がある解が得られるのは、
$n = 1$、すなわち$B = \dfrac{\pi}{X}$であるときだけである。

拡散方程式の解

中性子拡散方程式は以下で与えられる:

$$\frac{d^2\phi(x)}{dx^2} = -B^2\phi(x)$$

ただし、

$$B^2 = \frac{\nu\Sigma_f - \Sigma_a}{D}$$

一般解として、$\phi(x) = E\sin Bx + F\cos Bx$が得られた。

さらに、2つの境界条件$\phi(0) = 0$、$\phi(X) = 0$を満足する解のうち物理的な意味があるものとして以下が得られた。

$$\boxed{\phi(x) = E\sin Bx\text{、ただし}BX = \pi}$$