

バックリングと 中性子増倍率の関係

拡散方程式の解

中性子拡散方程式は以下で与えられる:

$$\frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} = -B^2 \phi(x)$$

ただし、

$$B^2 = \frac{\nu \Sigma_f - \Sigma_a}{D}$$

2つの境界条件 $\phi(0) = 0$ 、 $\phi(X) = 0$ を満足する解のうち物理的な意味があるものとして以下が得られた。

$$\phi(x) = E \sin Bx, \text{ ただし } BX = \pi$$

拡散方程式の解

中性子拡散方程式は以下で与えられる:

$$\frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} = -B^2 \phi(x)$$

ただし、

$$B^2 = \frac{\nu \Sigma_f - \Sigma_a}{D}$$

増倍系の組成で決まる
パラメータ

2つの境界条件 $\phi(0) = 0$ 、 $\phi(X) = 0$ を満足する解のうち
物理的な意味があるものとして以下が得られた。

増倍系の大きさに決まるパラメータ

$$\phi(x) = E \sin Bx, \text{ ただし } BX = \pi$$

増倍系の組成と大きさが与えられて拡散方程式が定義されるのに、
それを解いた結果、 B の定義が2通り与えられるとはどういうことか？

拡散方程式の解

中性子拡散方程式：
$$\frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} = -B^2 \phi(x)$$

$$B^2 = \frac{\nu \Sigma_f - \Sigma_a}{D}$$

増倍系の組成が与えられたら
これらのパラメータが決まり、
 B が決まる。

拡散方程式の解

中性子拡散方程式：
$$\frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} = -B^2 \phi(x)$$

$$B^2 = \frac{\nu \Sigma_f - \Sigma_a}{D}$$

増倍系の組成が与えられたら
これらのパラメータが決まり、
 B が決まる。



$$BX = \pi$$

この組成で構成される増倍系が臨界であるならば、増倍系の大きさ X が一意に決まる（増倍系の大きさ X がこの式を満足しない場合には、この増倍系が臨界である、という前提が成り立たない）。

拡散方程式の解

中性子拡散方程式：
$$\frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} = -B^2 \phi(x)$$

$$BX = \pi$$

増倍系の大きさ X が与えられたら
 B が決まる。

拡散方程式の解

中性子拡散方程式：
$$\frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} = -B^2 \phi(x)$$

$$B^2 = \frac{\nu \Sigma_f - \Sigma_a}{D}$$



$$BX = \pi$$

この大きさの増倍系が臨界であるならば、増倍系の組成はこの式を満足していなければならない（増倍系の組成がこの式を満足しない場合には、この増倍系が臨界である、という前提が成り立たない）。

増倍系の大きさ X が与えられたら B が決まる。


B^2 :バックリング

中性子拡散方程式: $\frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} = -B^2 \phi(x)$

$$B^2 = \frac{\nu \Sigma_f - \Sigma_a}{D}$$

材料バックリング

$$BX = \pi$$


$$B^2 = \left(\frac{\pi}{X}\right)^2$$

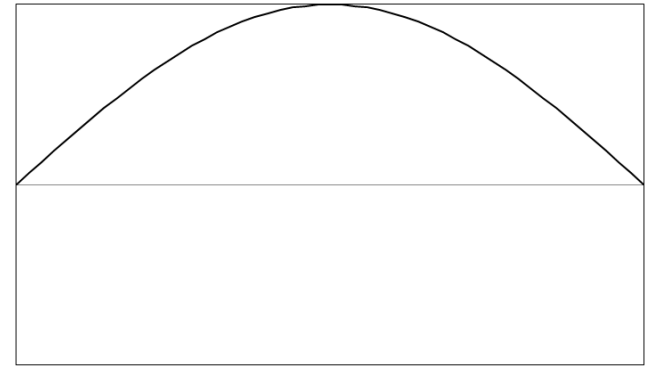
形状バックリング

B^2 :バックリング

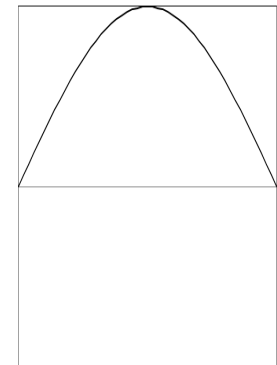
バックリングは、日本語では「湾曲」という意味を持ち、中性子束の空間分布の「歪み」の度合いを示す。

$$\phi(x) = E \sin Bx$$

B が小さい \rightarrow 歪みが小さい
 \rightarrow バックリング B^2 が小さい



B が大きい \rightarrow 歪みが大きい
 \rightarrow バックリング B^2 が大きい



材料バックリング(エネルギー1群近似)

$$B^2 = \frac{\nu\Sigma_f - \Sigma_a}{D}$$

- ・ $\nu\Sigma_f = \Sigma_a$ のとき、材料バックリングはゼロ
→ $k_\infty = 1.0$ のとき、材料バックリングはゼロ
- ・ $\nu\Sigma_f > \Sigma_a$ のとき、材料バックリングは正
→ $k_\infty > 1.0$ のとき、材料バックリングは正

材料バックリングは「その媒質の核分裂連鎖反応の観点からの性能を表す指標」と理解できる。これが負であることは $k_\infty < 1.0$ を意味するので、その媒質で持続的な連鎖反応を実現することは出来ない。

形状バックリング

$$B^2 = \left(\frac{\pi}{X}\right)^2$$

- ・ X が無限大のとき、形状バックリングはゼロ
→ 増倍系からの中性子の漏れがないとき
形状バックリングはゼロ
- ・ X が小さくなるにつれて、形状バックリングは増加
→ 増倍系からの中性子の漏れが大きいとき
形状バックリングは大

形状バックリングは「その増倍系からの中性子の漏れの量の指標」と理解できる。

材料バックリングと形状バックリング

中性子拡散方程式：
$$\frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} = -B^2 \phi(x)$$

$$B^2 = \frac{\nu \Sigma_f - \Sigma_a}{D}$$

材料バックリング

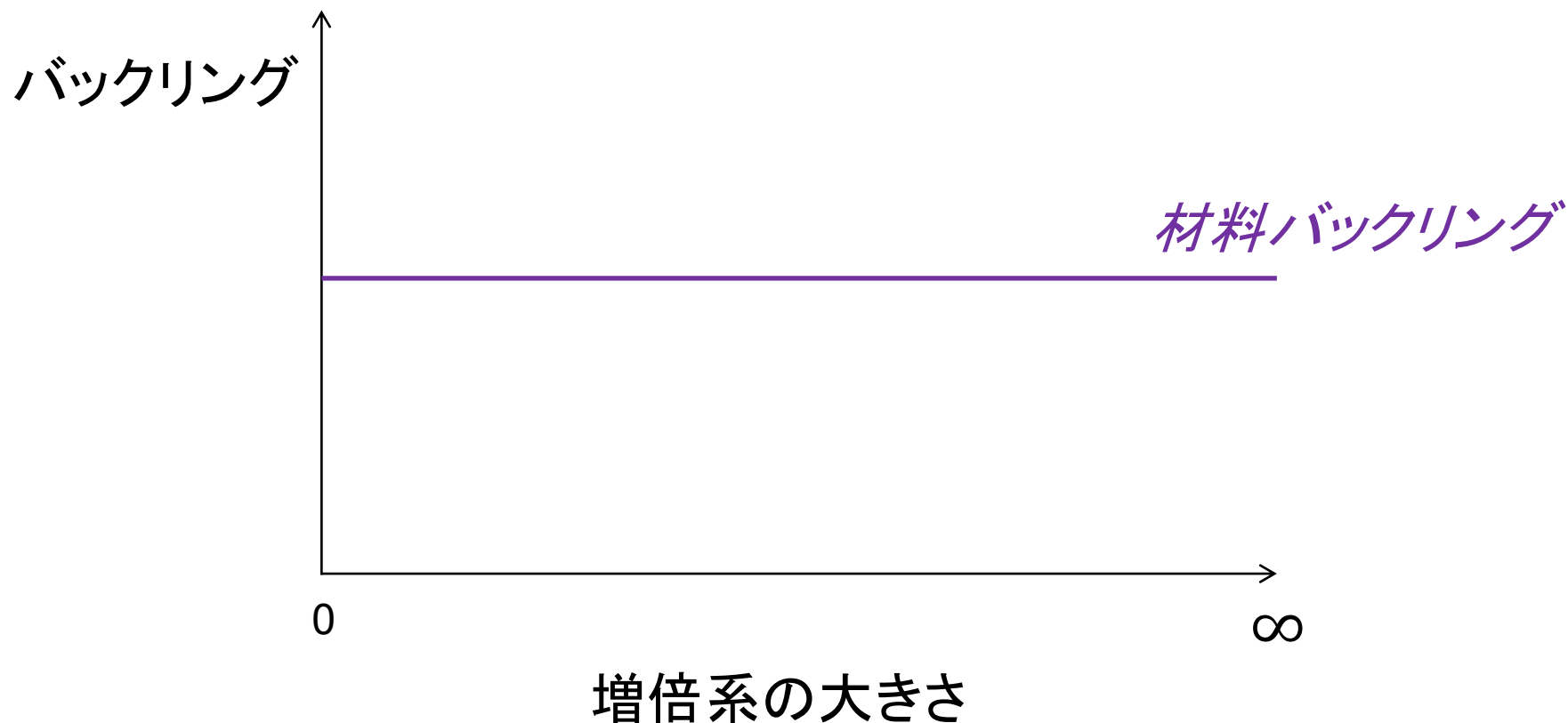
$$B^2 = \left(\frac{\pi}{X}\right)^2$$

形状バックリング

増倍系が臨界であるということは、材料バックリングと形状バックリングが同一であることに他ならない。

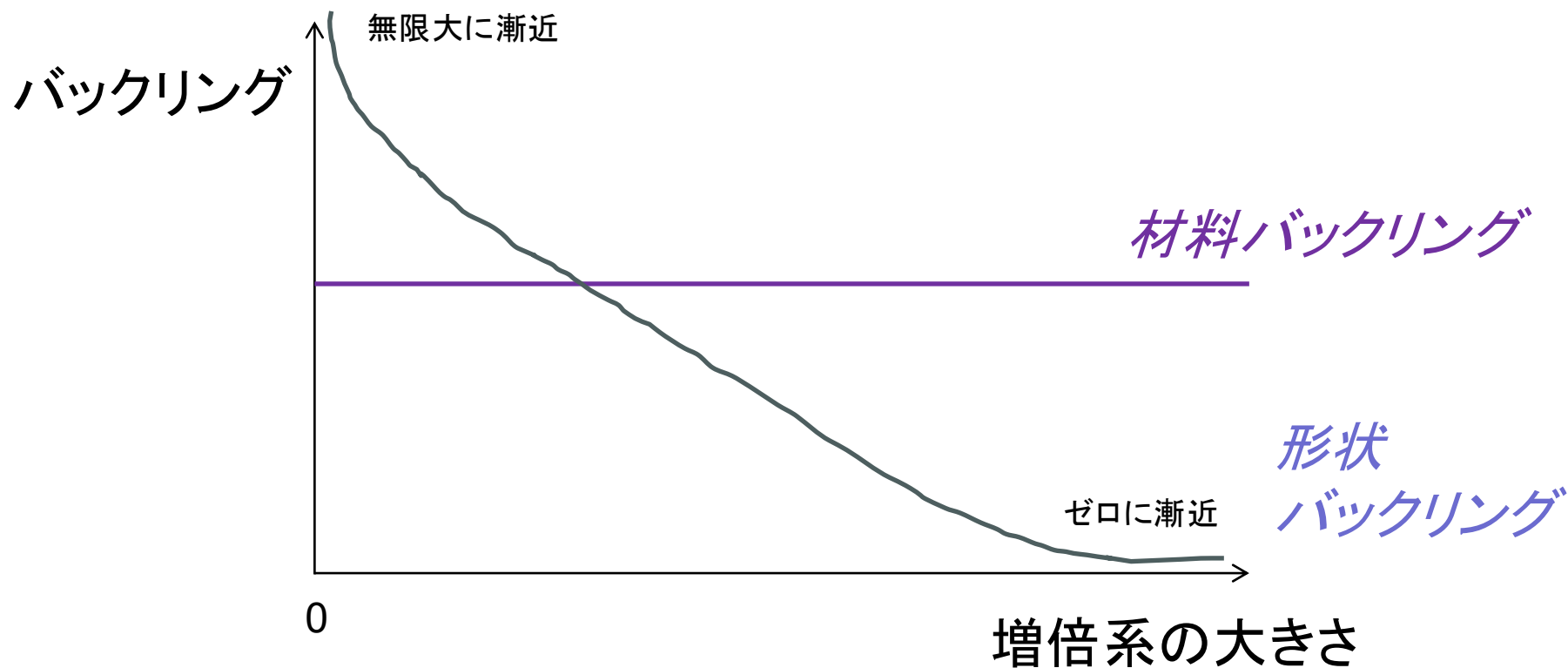
材料バックリングと形状バックリング

クイズ: 以下の図に対して形状バックリング $B^2 = \left(\frac{\pi}{X}\right)^2$ の線を引くと共に、増倍系の状態(臨界・未臨界・超臨界)を図示せよ。



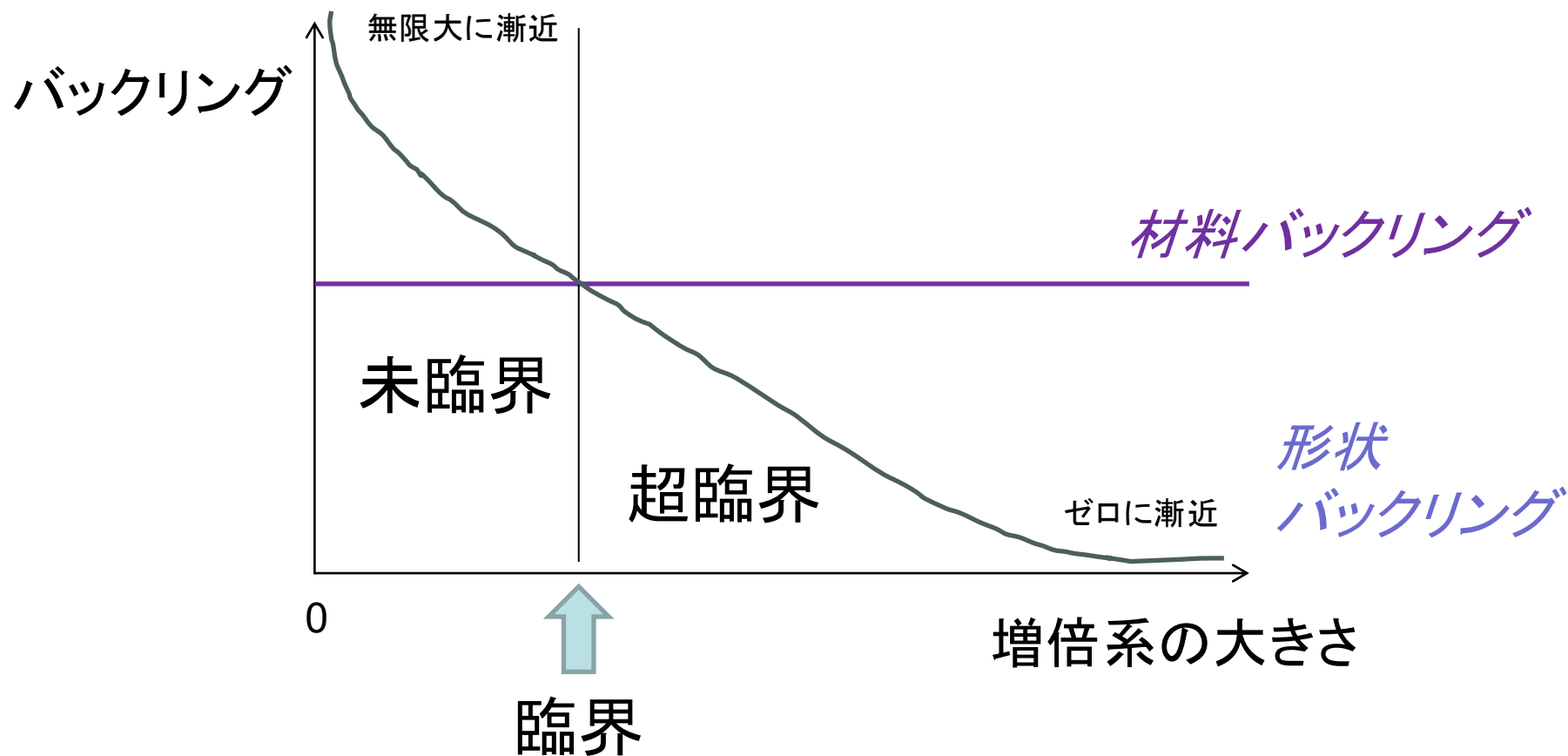
材料バックリングと形状バックリング

クイズ: 以下の図に対して形状バックリング $B^2 = \left(\frac{\pi}{X}\right)^2$ の線を引くと共に、増倍系の状態(臨界・未臨界・超臨界)を図示せよ。

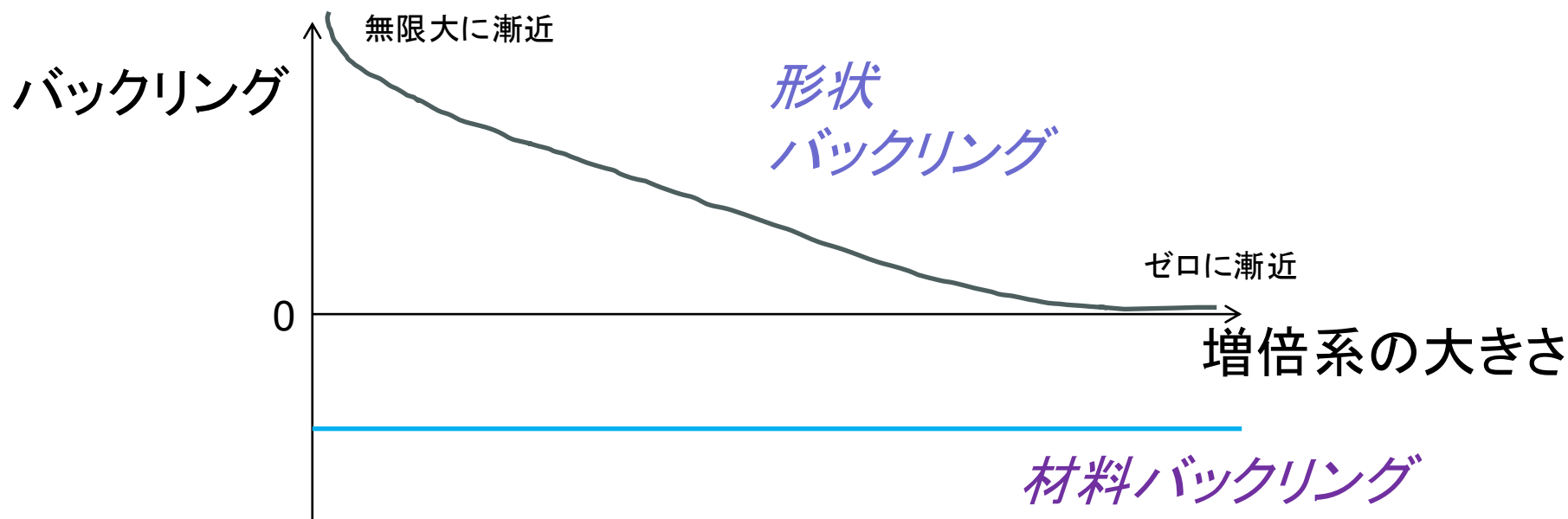


材料バックリングと形状バックリング

クイズ: 以下の図に対して形状バックリング $B^2 = \left(\frac{\pi}{X}\right)^2$ の線を引くと共に、増倍系の状態(臨界・未臨界・超臨界)を図示せよ。



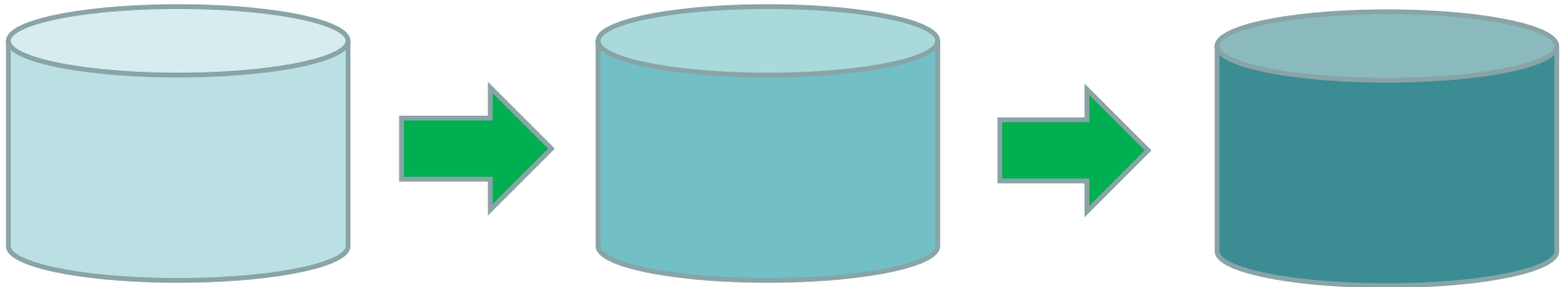
材料バックリングと形状バックリング



さきほどの例と異なり、材料バックリングが負であるとき、増倍系の大きさに関わらず、形状バックリング > 材料バックリングが成り立つので、この増倍系は臨界になり得ない。

核分裂増倍系を臨界に近づける

ある決まった体積の器に溶液状の核燃料をいれます。
未臨界だった核燃料の濃度をどんどん大きくするとします。

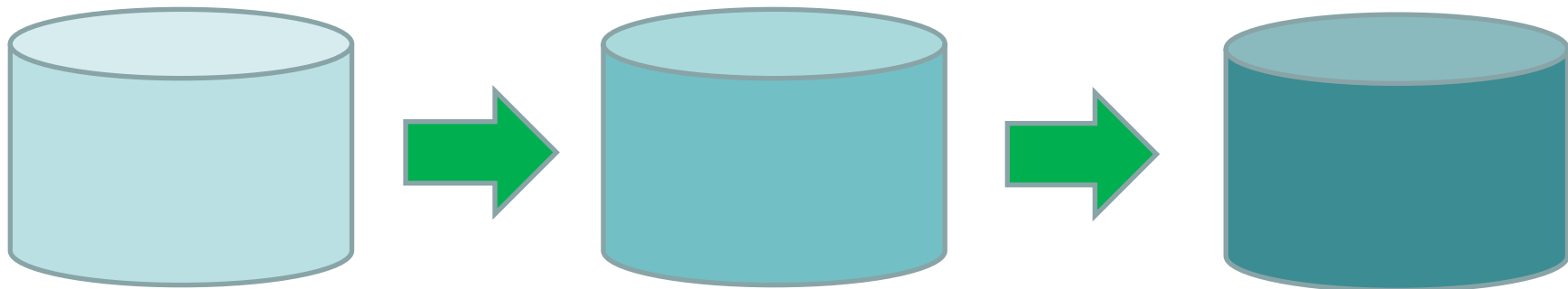


ある濃度のところで臨界になったとすると、
「何が変わったから臨界になった」と言えるでしょうか？

「〇〇バックリングが〇〇〇なったので臨界になった」

核分裂増倍系を臨界に近づける

ある決まった体積の器に溶液状の核燃料をいれます。
未臨界だった核燃料の濃度をどんどん大きくするとします。

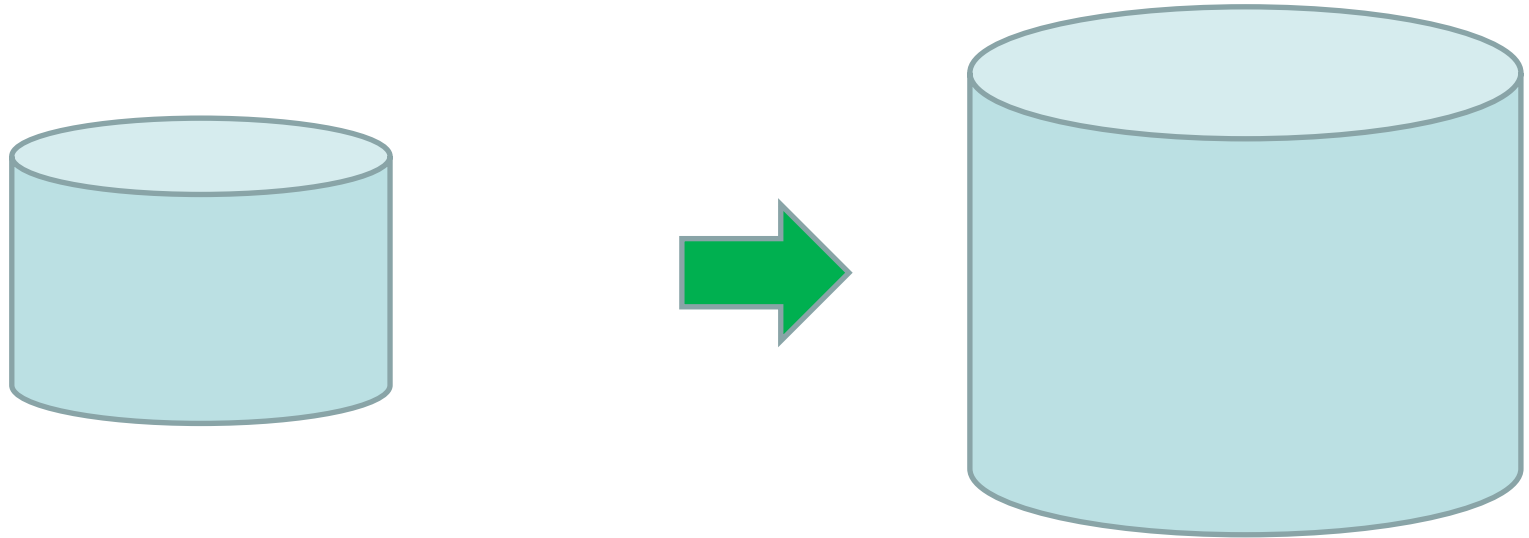


ある濃度のところで臨界になったとすると、
「何が変わったから臨界になった」と言えるでしょうか？

「材料バックリングが大きくなったので臨界になった」

核分裂増倍系を臨界に近づける

未臨界の溶液状核燃料の体積をどんどん大きくするとします。

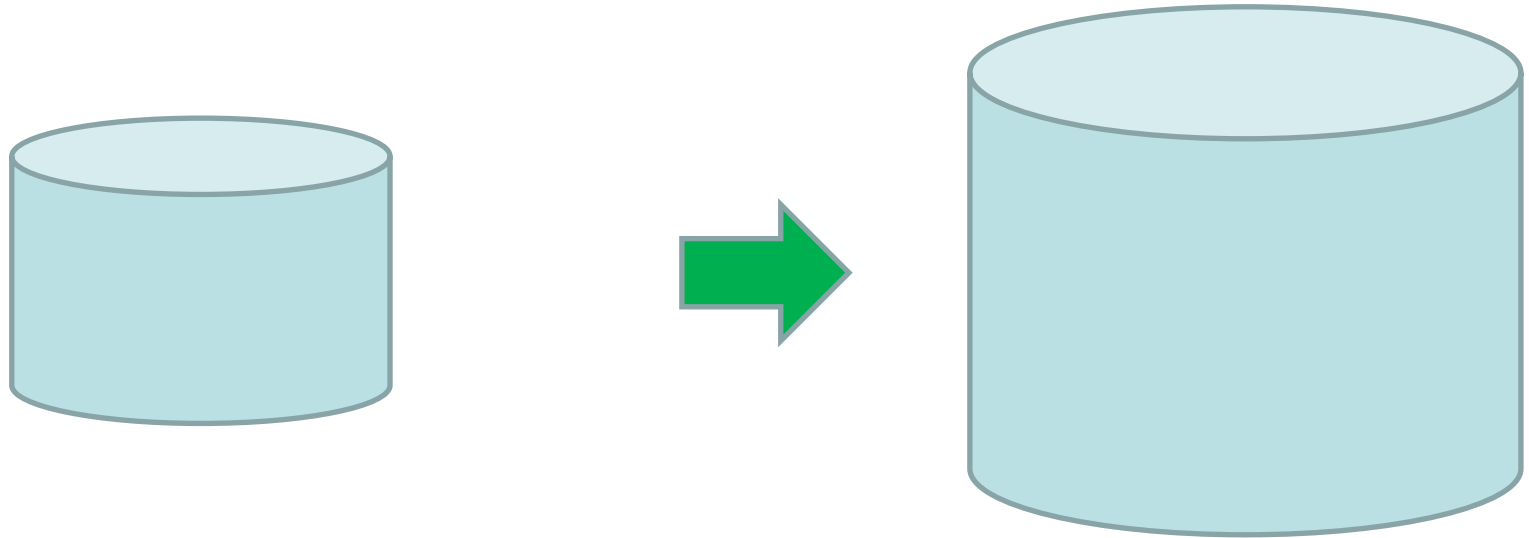


ある大きさのところで臨界になったとすると、「何が変わったから臨界になった」と言えるでしょうか？

「〇〇バックリングが〇〇〇なったので臨界になった」

核分裂増倍系を臨界に近づける

未臨界の溶液状核燃料の体積をどんどん大きくするとします。



ある大きさのところで臨界になったとすると、「何が変わったから臨界になった」と言えるでしょうか？

「形状バックリングが小さくなったので臨界になった」

中性子増倍率とバックリング

以下の式は、増倍系が臨界であるときのみ成り立つものであった。

$$-D \frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} + \Sigma_a \phi(x) = \nu \Sigma_f \phi(x)$$

臨界以外でも適用できるように、右辺にパラメータ k を導入する。
このような形式の方程式は「固有値方程式」と呼ばれる。

$$-D \frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} + \Sigma_a \phi(x) = \frac{1}{k} \nu \Sigma_f \phi(x)$$

無限体系の場合は左辺第一項がゼロなので、以下の表式が得られる。

$$k = \frac{\nu \Sigma_f}{\Sigma_a}$$

中性子増倍率とバックリング

以下の式は、増倍系が臨界であるときのみ成り立つものであった。

$$-D \frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} + \Sigma_a \phi(x) = \nu \Sigma_f \phi(x)$$

臨界以外でも適用できるように、右辺にパラメータ k を導入する。
このような形式の方程式は「固有値方程式」と呼ばれる。

$$-D \frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} + \Sigma_a \phi(x) = \frac{1}{k} \nu \Sigma_f \phi(x)$$

無限体系の場合は左辺第一項がゼロなので、以下の表式が得られる。

$$k = \frac{\nu \Sigma_f}{\Sigma_a} = k_\infty$$

無限体系の場合は、上のように導入されたパラメータ k は中性子無限増倍率 k_∞ に対応するものであったことが分かる。

中性子増倍率とバックリング

増倍系の大きさ X が与えられた場合、以下の式が成り立つ。

$$\frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} = -B^2 \phi(x) \quad \text{ただし、} B^2 = \left(\frac{\pi}{X}\right)^2$$

この式を拡散方程式に代入する。

$$-D \frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} + \Sigma_a \phi(x) = \frac{1}{k} \nu \Sigma_f \phi(x)$$



$$DB^2 \phi(x) + \Sigma_a \phi(x) = \frac{1}{k} \nu \Sigma_f \phi(x)$$

この式を k について整理すると以下が得られる。

$$k = \frac{\nu \Sigma_f}{\Sigma_a + DB^2}$$

中性子増倍率とバックリング

$$k = \frac{\nu\Sigma_f}{\Sigma_a + DB^2} = \frac{\Sigma_a}{\Sigma_a + DB^2} \cdot \frac{\nu\Sigma_f}{\Sigma_a} = \frac{\Sigma_a}{\Sigma_a + DB^2} \cdot k_\infty$$

Σ_a が中性子の吸収に、 DB^2 が中性子の漏れに、それぞれ比例することを踏まえると、以下のことが分かる:

$$\frac{\Sigma_a}{\Sigma_a + DB^2} = \frac{\text{吸収量}}{\text{吸収量} + \text{漏れ量}} = P_{\text{NL}}$$

中性子が体系から
漏れない確率

これより、導入されたパラメータ k は、漏れがある場合には、中性子実効増倍率 k_{eff} に対応するものであったことが分かる。

$$k = \frac{\Sigma_a}{\Sigma_a + DB^2} \cdot k_\infty = P_{\text{NL}} \cdot k_\infty = k_{\text{eff}}$$

中性子が体系から漏れない確率

これまでの議論で、中性子が体系から漏れない確率 P_{NL} は以下で表されることが分かった:

$$P_{NL} = \frac{\Sigma_a}{\Sigma_a + DB^2}$$

これを、 $L^2 = D/\Sigma_a$ を用いて以下のように変形する。ここで、 L は拡散距離と呼ばれるパラメータである。

$$P_{NL} = \frac{\Sigma_a}{\Sigma_a + DB^2} = \frac{1}{1 + L^2 B^2}$$

拡散距離は媒質の特性に依存して決まるパラメータである。
この拡散距離と形状バックリングから、中性子が漏れない確率を見積もることができる。

平板体系での中性子束分布と形状バックリング



- ・中性子拡散方程式: $-D \frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} + \Sigma_a \phi(x) = \nu \Sigma_f \phi(x)$
- ・中性子束分布: $\phi(x) \propto \sin\left(\frac{\pi}{X} x\right)$
- ・形状バックリング: $B^2 = \left(\frac{\pi}{X}\right)^2$

多次元の中性子拡散方程式

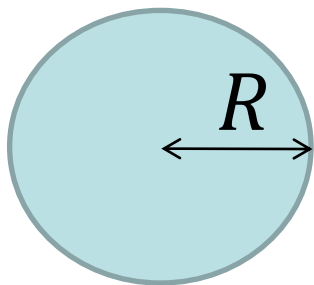
$$-D\nabla^2\phi(\vec{r}) + \Sigma_a\phi(\vec{r}) = \nu\Sigma_f\phi(\vec{r})$$



$$\nabla^2\phi(\vec{r}) = -B^2\phi(\vec{r})$$

なお、 $\nabla^2\phi = \nabla \cdot \nabla\phi = \text{div}(\text{grad } \phi)$

球体系での中性子束分布と形状バックリング

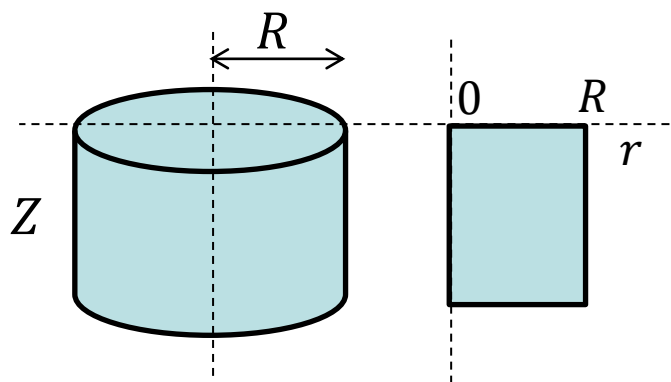


$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right)$$

$$\phi(r) \propto \frac{\sin(\pi r / R)}{r}$$

$$B^2 = \left(\frac{\pi}{R} \right)^2$$

円筒体系での中性子束分布と形状バックリング



$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

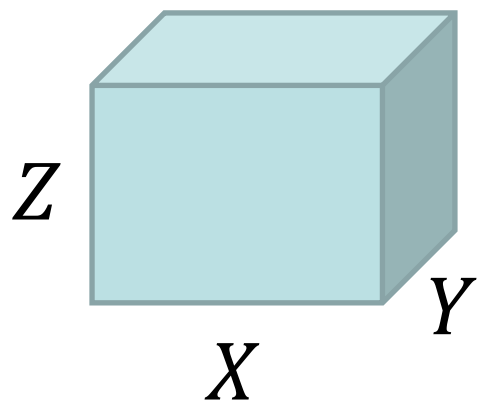
径方向分布がベッセル関数、
軸方向分布が三角関数となる。

$$\phi(r, z) \propto J_0 \left(\frac{2.405r}{R} \right) \sin \left(\frac{\pi z}{Z} \right)$$

(第一種)ベッセル関数

$$B^2 = \left(\frac{2.405}{R} \right)^2 + \left(\frac{\pi}{Z} \right)^2$$

直方体体系での中性子束分布と形状バックリング

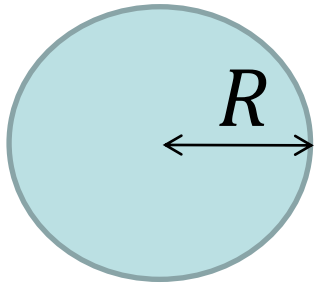


$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

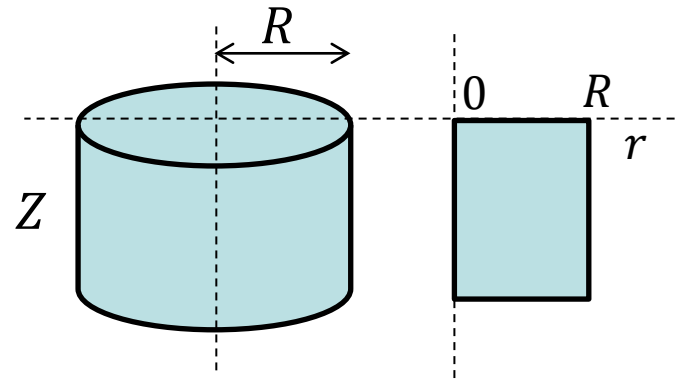
$$\phi(x, y, z) \propto \sin\left(\frac{\pi x}{X}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{Y}\right) \sin\left(\frac{\pi z}{Z}\right)$$

$$B^2 = \pi^2 \left(\frac{1}{X^2} + \frac{1}{Y^2} + \frac{1}{Z^2} \right)$$

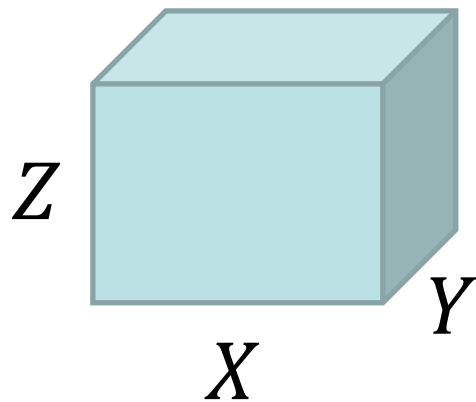
さまざまな体系での形状バックリング



$$B^2 = \left(\frac{\pi}{R}\right)^2$$



$$B^2 = \left(\frac{2.405}{R}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{Z}\right)^2$$

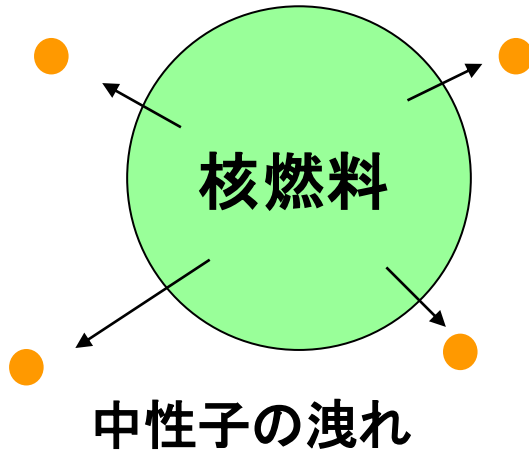


$$B^2 = \pi^2 \left(\frac{1}{X^2} + \frac{1}{Y^2} + \frac{1}{Z^2} \right)$$

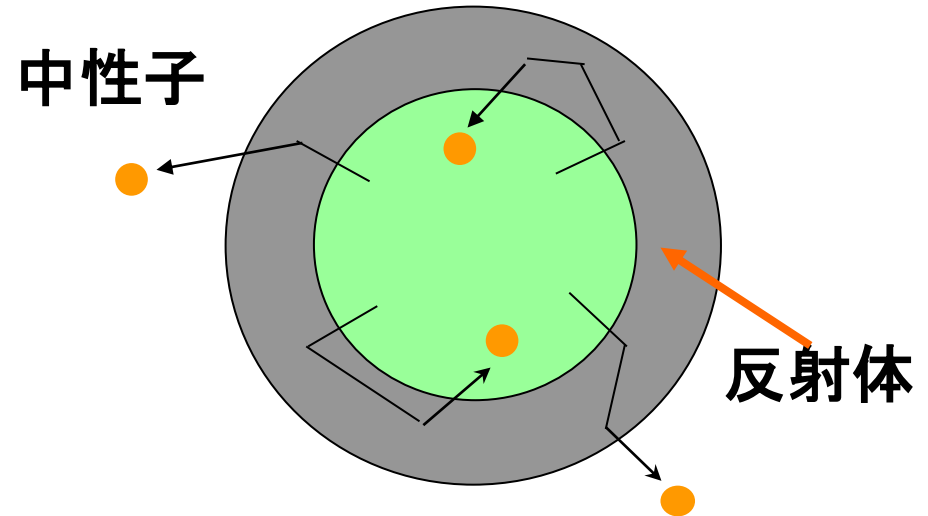
多様な形状の核分裂増倍系の形状バックリングは、系が単一の組成で構成されている場合に、これらの式により定量化することが可能である。

裸の増倍系と反射体付きの増倍系

裸の増倍系



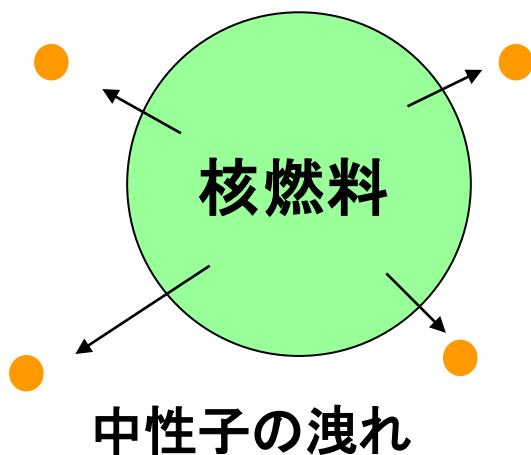
(中性子) 反射体付き増倍系



核分裂増倍系の外側に、軽水など、中性子を散乱させる(反射する)物質が配置されていると、配置されていない場合と比べて、核分裂の連鎖反応の観点から有利である。

裸の増倍系と反射体付きの増倍系

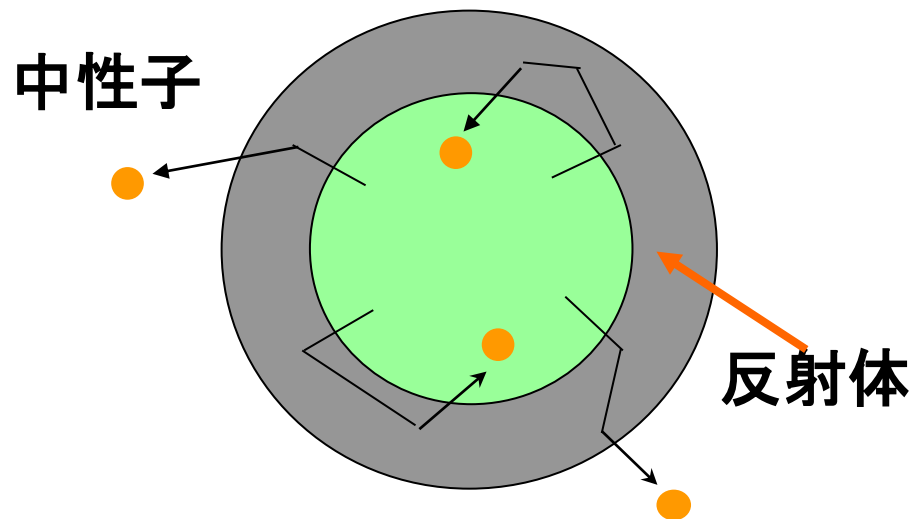
裸の増倍系



$$k_{\text{eff}} = 1$$



(中性子) 反射体付き増倍系

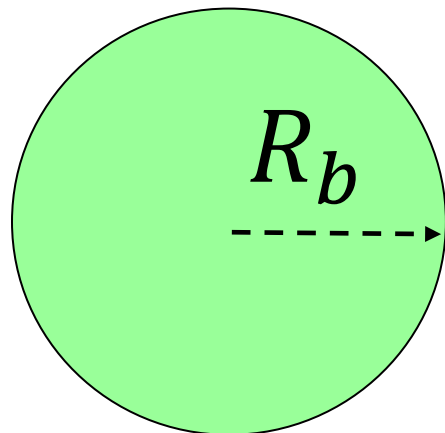


$$k_{\text{eff}} > 1$$

外側に反射体を配置すると、中性子実効増倍率は増加する。

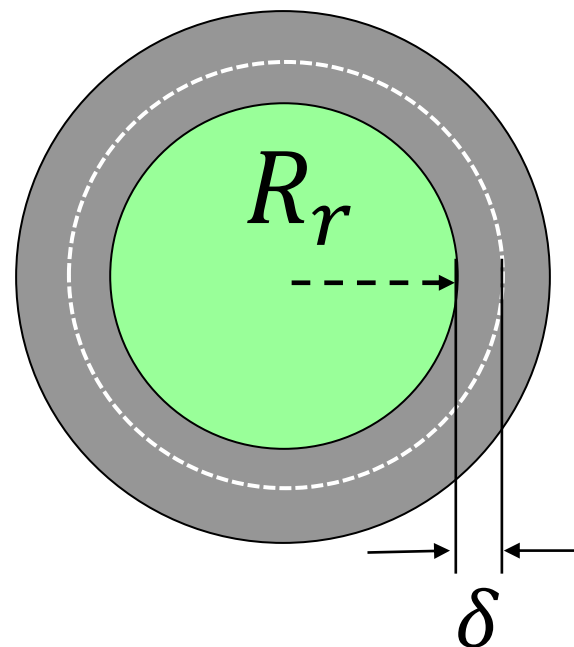
裸の増倍系と反射体付きの増倍系

裸の増倍系



$$k_{\text{eff}} = 1$$

(中性子) 反射体付き増倍系

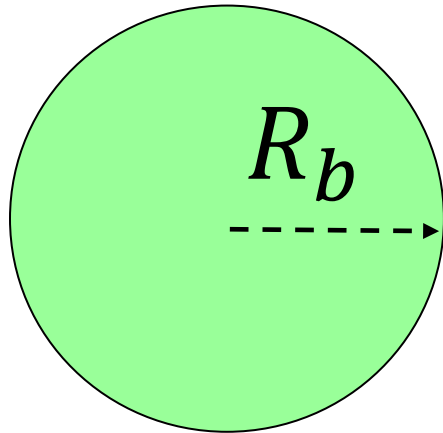


$$k_{\text{eff}} = 1$$

外側に反射体を配置すると、同一の中性子実効増倍率を得るために必要な増倍系の大きさは低減する。

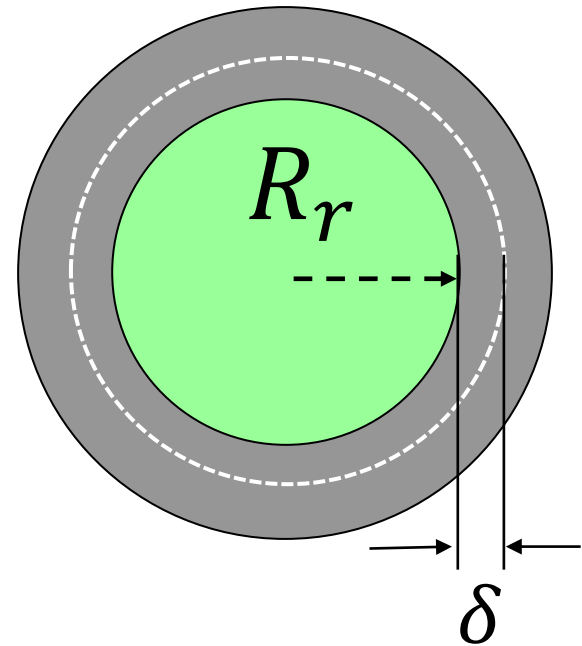
裸の増倍系と反射体付きの増倍系

裸の増倍系



$$k_{\text{eff}} = 1$$

(中性子) 反射体付き増倍系

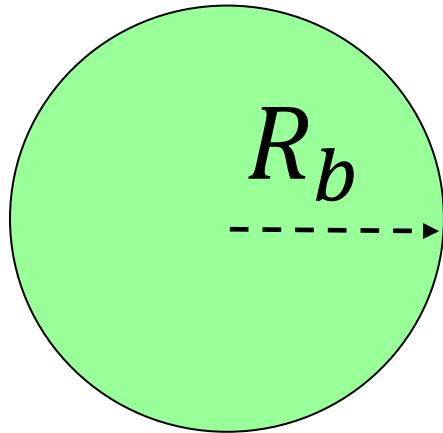


$$k_{\text{eff}} = 1$$

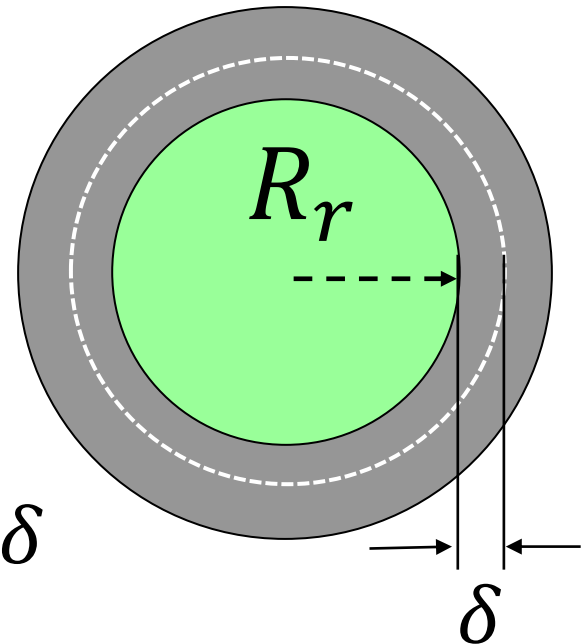
$$\text{反射体節約} : \delta = R_b - R_r$$

裸の増倍系と反射体付きの増倍系

裸の増倍系



(中性子) 反射体付き増倍系

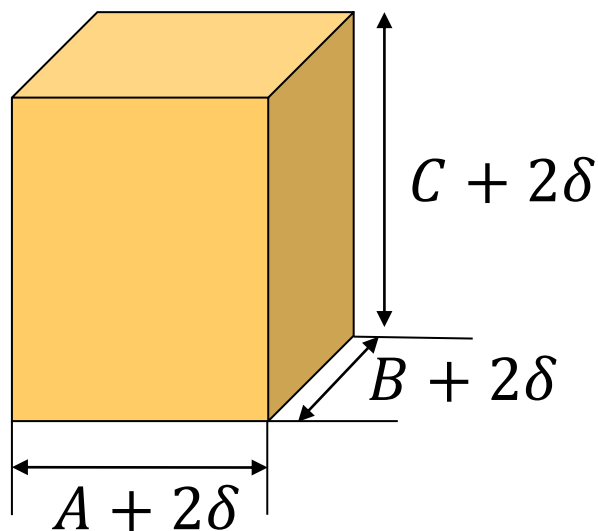


$$R_b = R_r + \delta$$

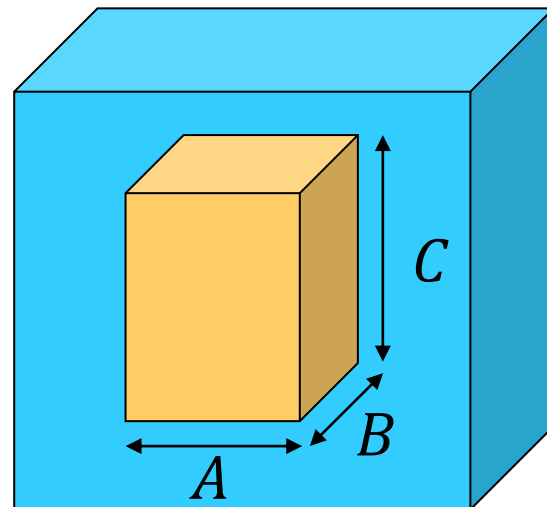
反射体節約の考え方を使うことによって、反射体付きの増倍系を等価な裸の増倍系に置き換えることができる。その等価な裸の増倍系での形状バックリングを用いて、中性子が漏れない確率を見積もることができる。

直方体体系の裸の増倍系と反射体付き増倍系

裸の増倍系



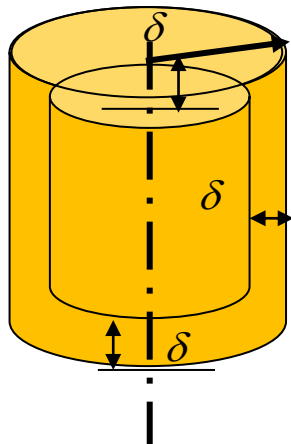
(中性子) 反射体付き増倍系



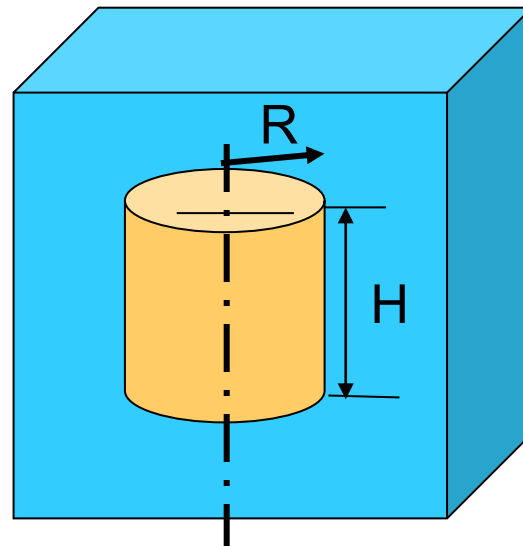
$$B_G^2 = \left(\frac{\pi}{A + 2\delta} \right)^2 + \left(\frac{\pi}{B + 2\delta} \right)^2 + \left(\frac{\pi}{C + 2\delta} \right)^2$$

円筒体系の裸の増倍系と反射体付き増倍系

裸の増倍系



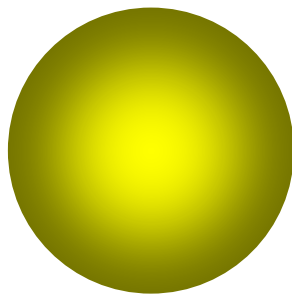
(中性子) 反射体付き増倍系



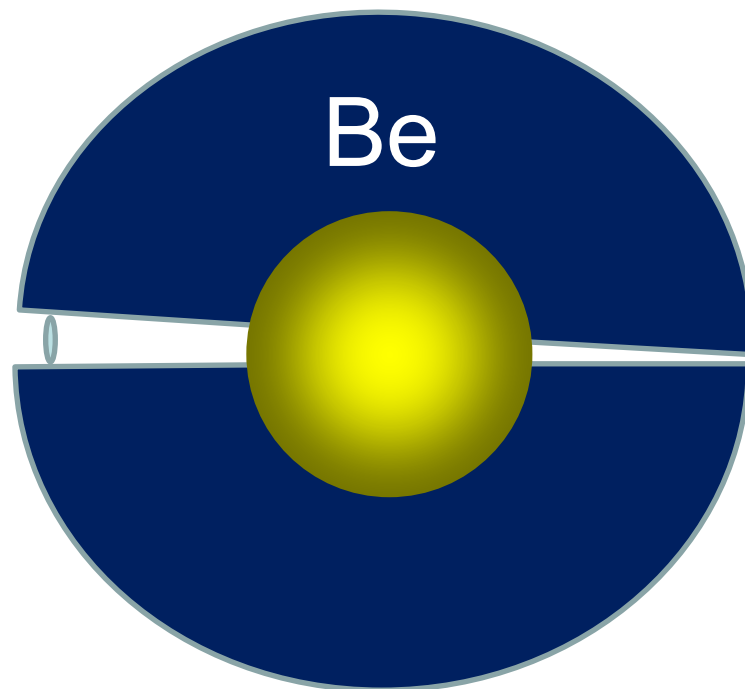
$$B_G^2 = \left(\frac{\pi}{H + 2\delta} \right)^2 + \left(\frac{2.405}{R + \delta} \right)^2$$

米国ロスアラモス研究所での臨界事故

6.2kgの球形の金属プルトニウムを用いて実験を行っていた。

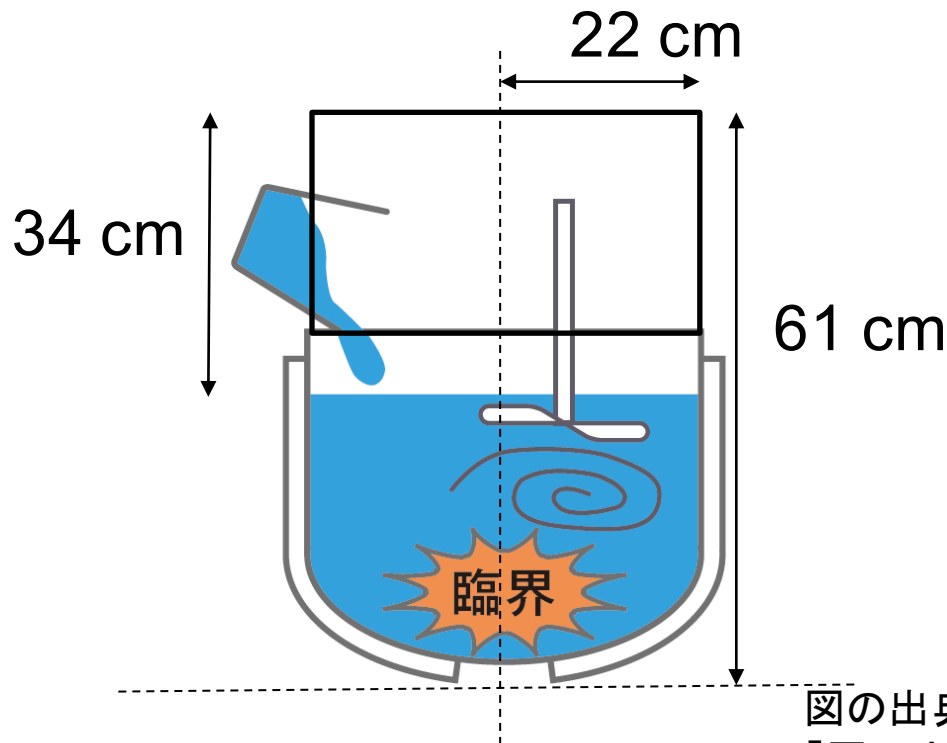


ベリリウムの中性子反射効果を実験的に評価していたときに臨界事故が発生した。



JCOでの臨界事故における実効増倍率の概算

- 溶液中のウラン235濃縮度: 18.9 wt%
- 溶液中のウラン濃度: 360 g/liter
- 溶液の体積: 44 liters
- 溶液中のウラン重量: 15.8 kg

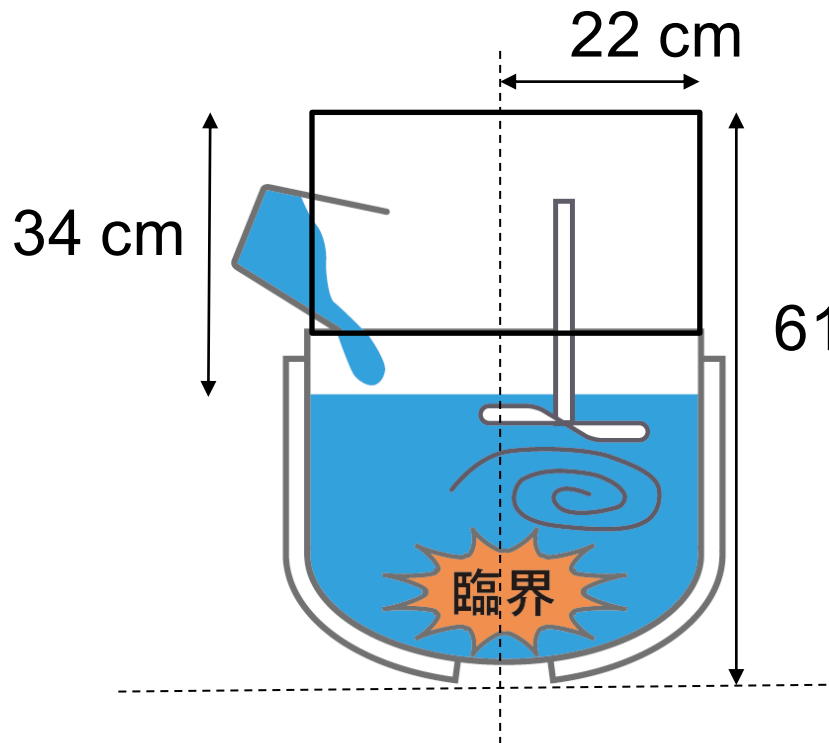


これまでの解説を踏まえて、この体系の中性子実効増倍率 k_{eff} を概算する。

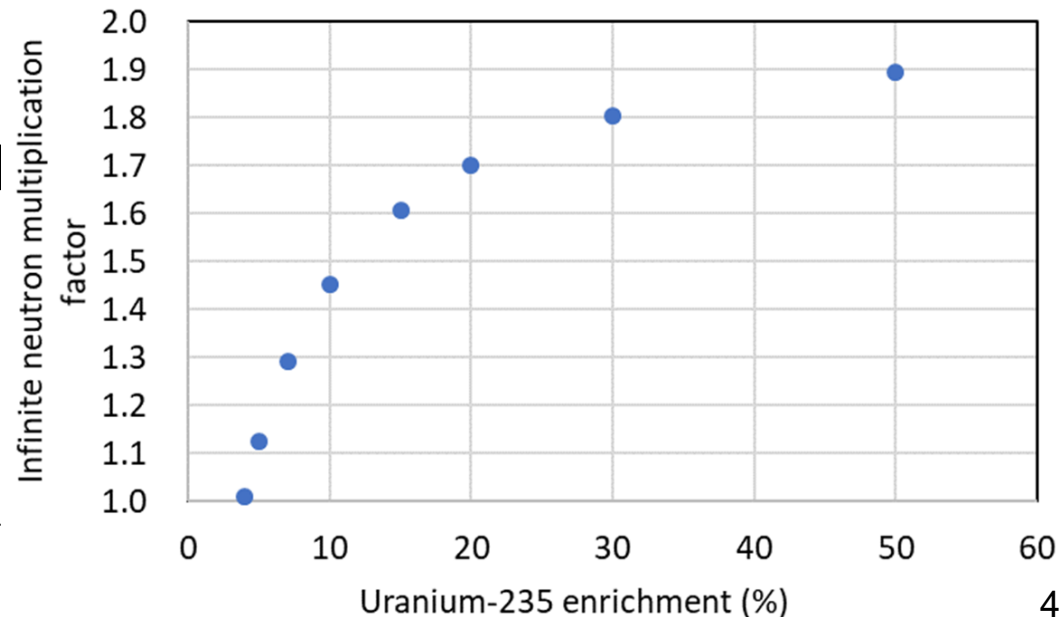
$k_{\text{eff}} = P_{\text{NL}}k_{\infty}$ より、 k_{∞} 、 P_{NL} が分かればよい。

JCOでの臨界事故における実効増倍率の概算

- 溶液中のウラン235濃縮度: 18.9 wt%
- 溶液中のウラン濃度: 360 g/liter
- 溶液の体積: 44 liters
- 溶液中のウラン重量: 15.8 kg



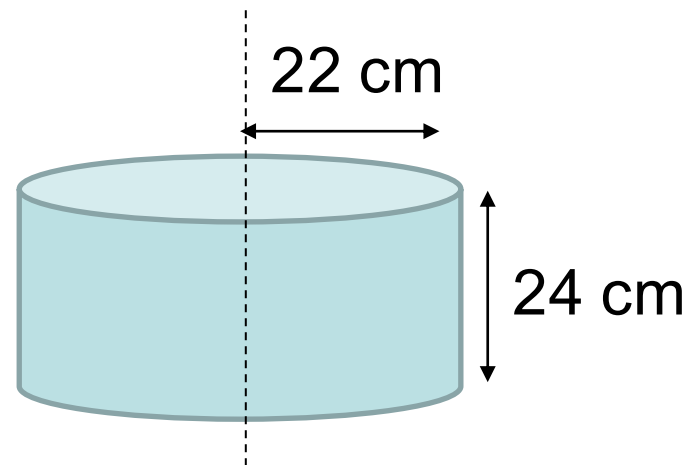
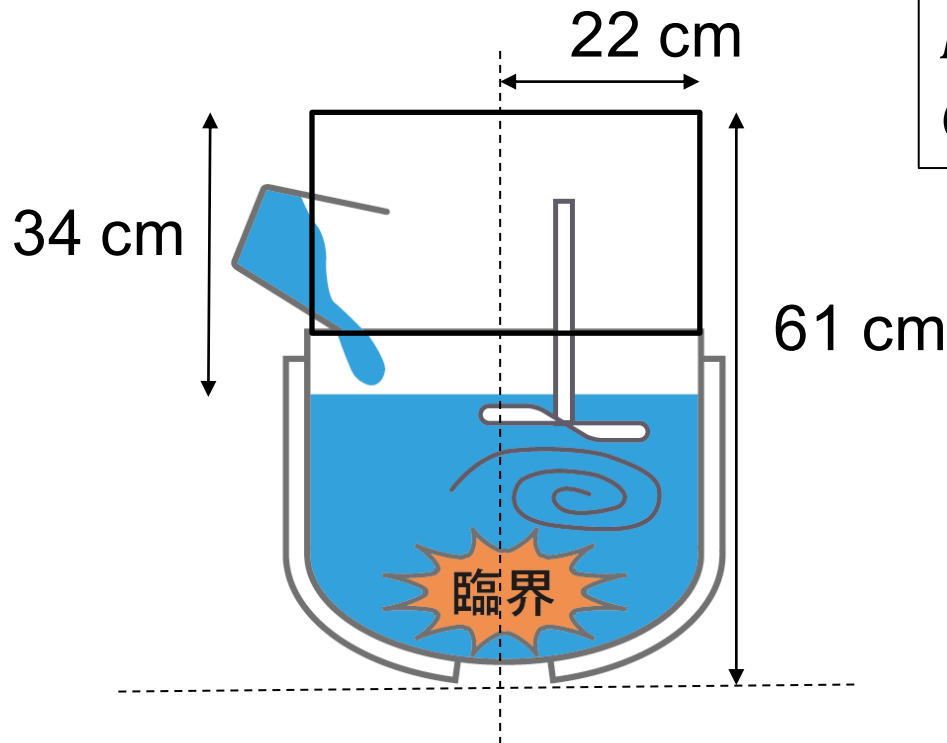
下の図より、中性子無限増倍率 k_{∞} は1.7程度と見積られる。



JCOでの臨界事故における実効増倍率の概算

- 溶液中のウラン235濃縮度: 18.9 wt%
- 溶液中のウラン濃度: 360 g/liter
- 溶液の体積: 44 liters
- 溶液中のウラン重量: 15.8 kg

次に、中性子が漏れない確率 P_{NL} を見積もるため、体系を以下のように円筒で近似する。

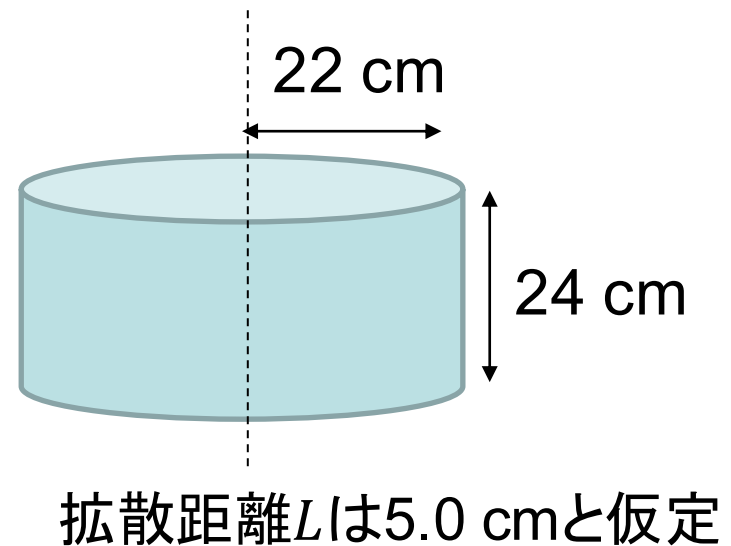
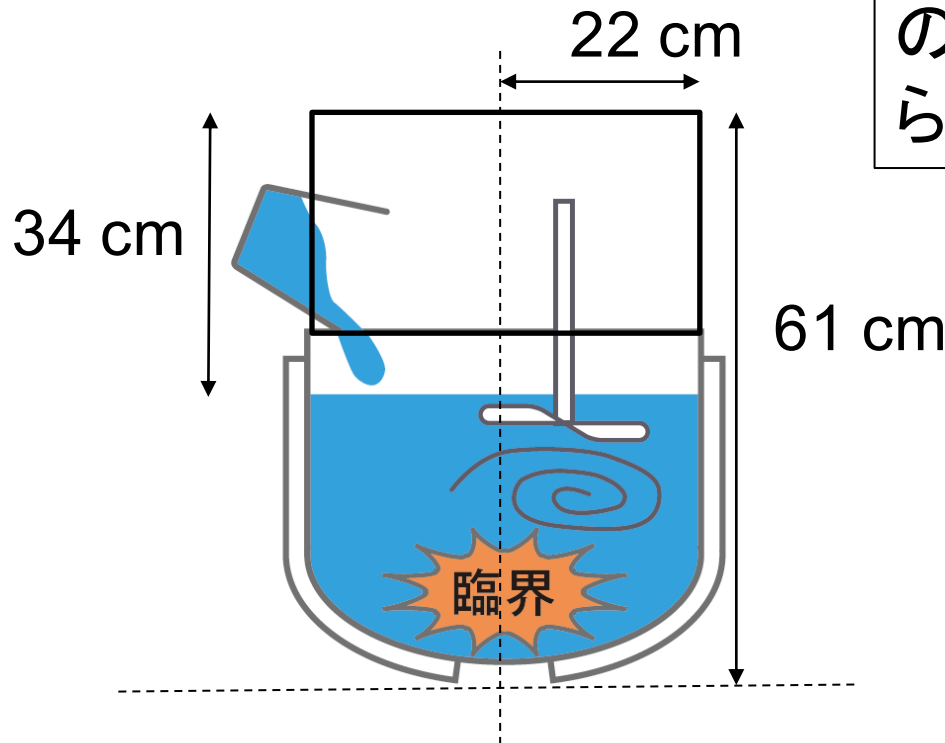


拡散距離 L は 5.0 cm と仮定

JCOでの臨界事故における実効増倍率の概算

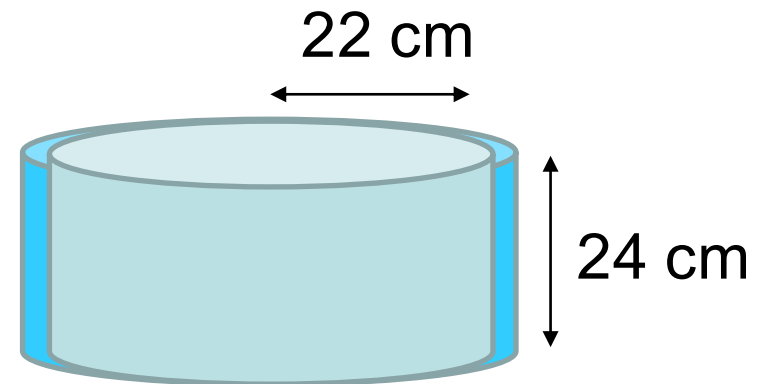
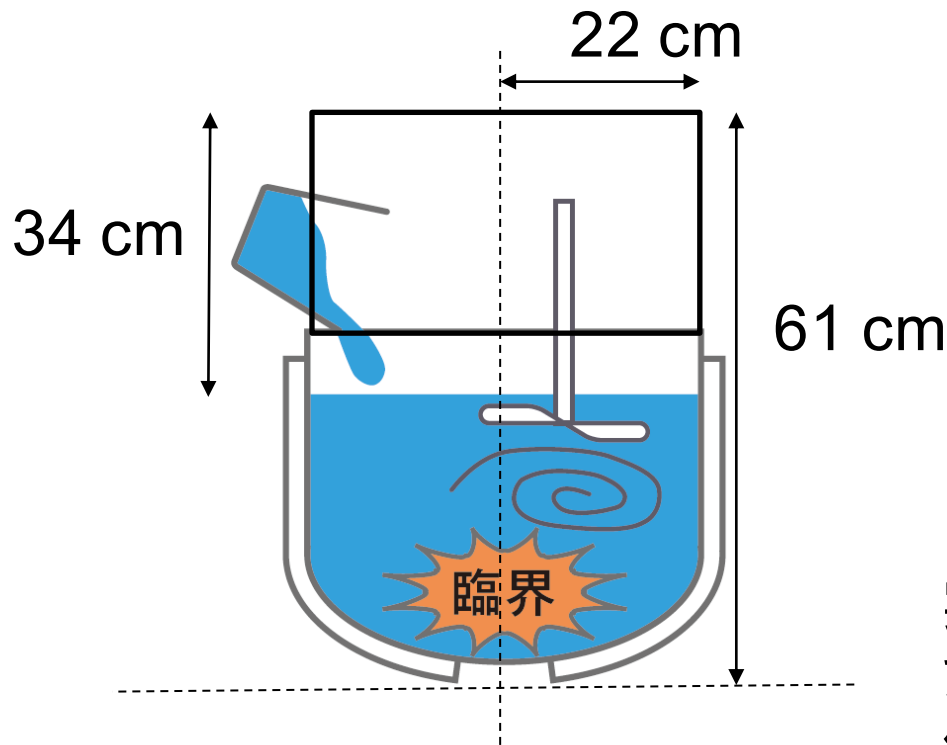
- 溶液中のウラン235濃縮度: 18.9 wt%
- 溶液中のウラン濃度: 360 mg/l
- 溶液の体積: 44 liters
- 溶液中のウラン重量: 15.84 g

円筒体系の形状バックリングは
$$B^2 = \left(\frac{2.405}{R}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{Z}\right)^2 = 0.029$$
、その結果 $P_{NL} = \frac{1}{1+L^2B^2} = 0.58$ となるので、 $k_{\text{eff}} = k_{\infty}P_{NL} = 0.99$ が得られる。



JCOでの臨界事故における実効増倍率の概算

- 溶液中のウラン235濃縮度: 18.9 wt%
- 溶液中のウラン濃度: 360 g/liter
- 溶液の体積: 44 liters
- 溶液中のウラン重量: 15.8 kg



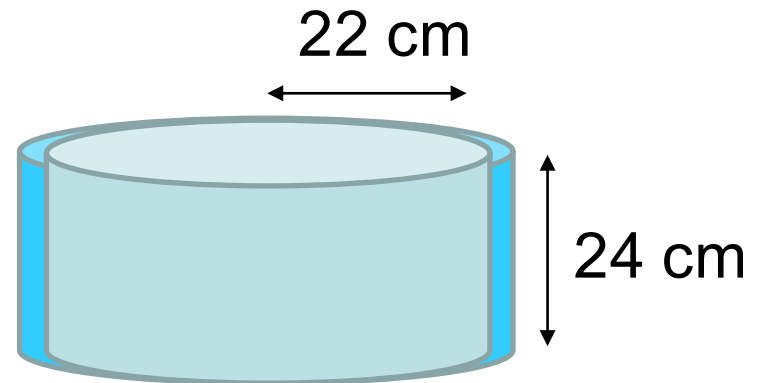
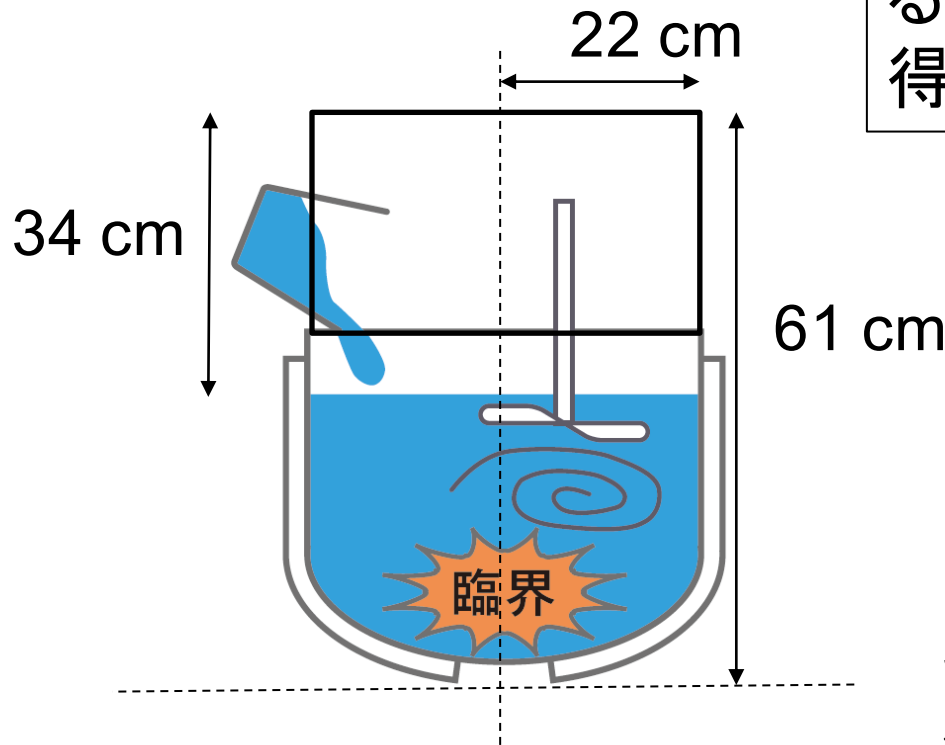
実際には水ブランケットで囲まれていた
ので、径方向に水反射体があると
仮定し、反射体節約を2cmとする。

JCOでの臨界事故における実効増倍率の概算

- 溶液中のウラン235濃縮度: 18.9 wt%
- 溶液中のウラン濃度: 3.405 wt%
- 溶液の体積: 44 liters
- 溶液中のウラン重量: 1.51 kg

このときの形状バックリングは

$$B^2 = \left(\frac{2.405}{R+\delta}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{Z}\right)^2 = 0.027$$
、その結果、 $P_{NL} = \frac{1}{1+L^2B^2} = 0.60$ となるので、 $k_{\text{eff}} = k_{\infty}P_{NL} = 1.02$ が得られる。

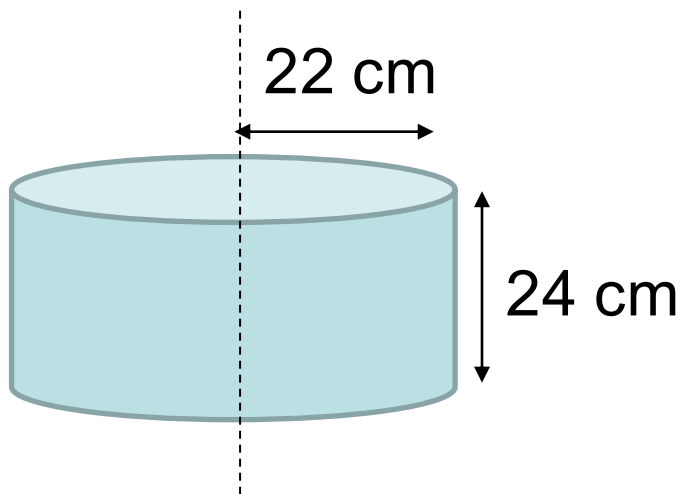


実際には水ブランケットで囲まれていたので、径方向に水反射体があると仮定し、反射体節約を2cmとする。

JCOでの臨界事故における実効増倍率の概算

- 溶液中のウラン235濃縮度: 18.9 wt%
- 溶液中のウラン濃度: 360 g/liter
- 溶液の体積: 44 liters
- 溶液中のウラン重量: 15.8 kg

$$k_{\text{eff}} = 0.99$$



$$k_{\text{eff}} = 1.02$$

